Math. P. 335 u

Mayr, A.

Vollständige Theorie

des

Differenzial-Calculs.

Mit Anwendungen

auf

Analysis, Geometrie und Mechanik.

Von

Dr. A. Mayr,

öffentl. ordentl. Professor der Mathematik und Astronomie an der Julius-Maximilians-Universität zu Würzburg.

Bibliothek
Munchen

Θάρσει· λέγων τἀληθὲς οὐ σφαλεῖ ποτε·
Ἅπαντα τἀδόκητα πρῶτον ἦλθ' ἄπαξ.

Sophoclis fragmenta.

Mit 45 in den Text eingedruckten Holzschnitten.

Regensburg.

Verlag von G. Joseph Manz.

1854.

131. D.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Ueber Zweck und Anwendung des vorliegenden Werkes habe ich hier nur Weniges vorauszuschicken, da die Gründe für das Eine wie für das Andere in den Untersuchungen selbst angegeben worden sind.

Wie sich Jeder überzeugen wird, habe ich mir vornehmlich das Ziel gesetzt, die Differenzialien jeder Ordnung als endliche, messbare und gleichsam greifbare Grössen nachzuweisen, und zwar nicht bloss hie und da, sondern durchgängig, sowohl im Calcul selbst, als auch in allen seinen Anwendungen auf Analysis, Geometrie und Mechanik. Dabei sind diese Anwendungen so ausführlich und durchgreifend, dass das vorliegende Werk wohl als eine vollständige Theorie des Differenzial-Calculs gelten kann. Die Natur der Aufgabe brachte es mit sich, dass ich die ersten Lehrsätze der Differenzialien so vollständig als möglich behandeln musste; denn von der Grundlage hängt Alles ab, und es kann bei ihr niemals mit zu viel Umsicht und Ausführlichkeit verfahren werden. Aber auch die nachfolgenden Lehren sind mit grosser Vollständigkeit behandelt worden, wodurch sich in den einzelnen Theilen das gehörige Ebenmass herausgestellt hat.

Das Werk zerfällt in fünf Abtheilungen, in die Einleitung, in die Technik der Differenzial-Operationen, und in ihre Anwendungen auf Analysis, Geometrie und Mechanik.

In der Einleitung handelt es sich um die Feststellung der Lehren, die für den Differenzial-Calcul vorausgesetzt werden. Bei dieser Feststellung muss mit bestimmtester Deutlichkeit und mit grösster Offenheit zu Werke gegangen werden, wenn das Ziel erreicht werden soll, das darin besteht, dass man im Differenzial-Calcul selbst klar sehe und vollkommen bestimmte Erkenntnisse gewinne.

Bei der Technik der Differenzial-Operationen kommt es darauf an, dass die Differenzial-Operationen abgeleitet und naturgemäss unter die übrigen Operationen der Analysis eingereiht werden. Auch müssen die nothwendigen Symbole erläutert und festgestellt werden. Denn es ist das Resultat einer gereiften wissenschaftlichen Erfahrung, dass eine gute Zeichensprache der halbe Calcul selbst ist. Diess hat sich gerade beim Differenzial-Calcul herausgestellt, in welchem seit einer langen Reihe von Jahren Symbole der verschiedensten Art versucht und wieder verworfen worden sind.

Die dritte Abtheilung, welche die Anwendung des Differenzial-Calculs auf die Analysis enthält, beschäftigt sich mit der Lösung der Aufgaben, die in den vorhergehenden Theilen der Analysis vorkommen, aber in ihnen gar nicht, oder doch nicht vollständig gelöst werden können. Denn das ist das Wesen der mathematischen Methode, dass alles Nachfolgende auch auf alles Vorhergehende Licht verbreitet, und dass Vieles in den vorhergehenden Theilen als Problem auftaucht, was erst durch die Hilfsmittel der nachfolgenden Theile als Lehrsatz

ausgesprochen und bewiesen werden kann. Dadurch, dass es als Problem in den vorhergehenden Theilen steht, ist der Ordnung der Methode Genüge geleistet; und die Wissenschaft selbst hat immer Mittel genug, in der organischen Aufeinanderfolge ihrer Theile die Lehren zu finden, die den vorhergehenden Problemen gleichsam zu Hilfe kommen, und sie lösen, wodurch auch der Forderung der Erkenntniss genügt wird. — Wenn ich einen Theil dieser Anwendungen, nämlich die Auffindung der Wurzeln der Gleichungen ausführlicher behandelt habe, so geschah diess, weil verschiedene Werke über Differenzial- und Integral-Rechnung eine Menge von Formeln, wie die Maclaurin'sche, Lambert'sche, die Umkehrungsformeln von La Grange und La Place, die Reihen von Euler, Cagnoli, Paoli und Andern als ziemlich verschiedene und von einander unabhängige Formeln hingestellt haben, während sie im Grunde, aus einer gemeinschaftlichen Wurzel entsprossen, eine und dieselbe Formel sind, wie Cap. XV. und Cap. XVI. nachgewiesen worden ist.

Die vierte und fünfte Abtheilung, die Anwendungen des Differenzial-Calculs auf Geometrie, Mechanik und Physik, sind für den besondern Gesichtspunkt dieser Untersuchungen das Wichtigste. Denn wer die Differenzialien überhaupt als endliche und messbare Grössen betrachtet, der hat diess gerade und vorzugsweise in den Anwendungen auf Geometrie und Mechanik nachzuweisen. Wenn irgendwo, so gilt hier der Spruch: *Hic Rhodus, hic salta.*

Was nützt es, wenn man analytisch die Differenzialien als endliche Grössen kennt und nachweist, wenn man aber bei der Anwendung auf Geometrie und Mechanik nicht im Stande ist, zu zeigen, welche bestimmte

endliche Linie, welche bestimmte endliche Fläche, und welcher bestimmter endlicher Körper das erste, das zweite, das dritte und überhaupt jedes höhere Differenzial-Operationen auf Linien, Flächen und Körper angewendet werden?

Bei diesen Anwendungen habe ich auch Mehreres in den Differenzial-Calcul gezogen, was gewöhnlich für die Anwendungen des Integral-Calculs aufbewahrt wird, und worüber ich mich zu erklären habe.

Differenzial- und Integral-Calcul sind Theile der reinen Analysis, und beide verhalten sich wie entgegengesetzte Operationen, z. B. wie Addition und Subtraction, oder wie Multiplication und Division u. s. w. — Ist z. B. die Grösse a gegeben, die durch b dividirt werden soll, so findet man das gesuchte Resultat $\left(\frac{a}{b}\right)$, wenn man eine Grösse $c = \frac{a}{b}$ herstellen kann, die mit b multiplicirt wieder a giebt. Eben so findet man das Integral eines gegebenen Ausdrucks (Differenzials) A, wenn man eine Grösse $B = \int A$ herstellen kann, die differenzirt wieder die gegebene Grösse A giebt, so dass $dB = A$ ist. — So wie sich die Division auf Multiplication gründet, sogar ihrer Definition nach, so gründet sich die Integration auf Differenziation, sogar ihrer Definition nach; ihrem Wesen nach sind sie, wie Multiplication und Division, dasselbe, und sie unterscheiden sich nur in der Technik ihrer Operationen, die bei der Differenzirung gewöhnlich leichter und einfacher sind, als bei der Integrirung, so wie ja auch die Operationen der Multiplication einfacher sind, als die der Division.

In ihren Anwendungen auf die nämlichen Gegenstände müssen sie daher vielfach ineinander übergreifen; aber es kann keinem Zweifel unterliegen, dass es der vorhergehenden Operation, also der Differenzirung zukommt, die Differenzial-Ausdrücke, die bei der Anwendung auf Geometrie und Mechanik erfordert werden, herzustellen und zu beweisen. Kommt es z. B. dem Differenzial-Calcul zu, die Differenzialien der Ordinaten einer Curve herzustellen, so kommt es ihm auch zu, die Differenzialien des Bogens, der Fläche und des Körpers herzustellen. Zwar sucht man bei den gewöhnlichen Aufgaben nicht das Differenzial des Bogens, sondern den Bogen selbst (Rectification), nicht das Differenzial der Fläche, sondern die Fläche selbst (Complanation), nicht das Differenzial des Körpers, sondern den Körper selbst (Cubatur), was man erst durch nachfolgende Integration finden kann. Allein diese Integration wäre analytisch nicht auszuführen, wenn nicht vorher die Differenzial-Ausdrücke des Bogens, der Fläche und des Körpers gegeben wären; der Integral-Calcul setzt voraus, dass ihm der Differenzial-Calcul die Wege bereite, dass er ihm also z. B. die Differenzial-Ausdrücke des Bogens, der Fläche und des Körpers herstelle und beweise. Nur erst, wenn diess geschehen ist, können die Integral-Operationen angewendet werden.

Es ist daher Gesetz der Methode, dass alle Differenzial-Ausdrücke im Differenzial-Calcul selbst vollständig hergestellt werden. Es heisst die Methode verderben und die Uebersicht des Ganzen zerreissen, wenn dem Differenzial-Calcul die Herstellung einiger Differenzial-Ausdrücke, hingegen dem Integral-Calcul die Herstellung der übrigen Differenzial-Ausdrücke zugetheilt wird. Der Differenzial-Calcul hat alle Differenzial-

Ausdrücke zu geben, er hat für alle Anwendungen dem Integral-Calcul die Wege zu bereiten.

Einigemale habe ich in Beispielen und um der Erläuterung willen leichte Integral-Ausdrücke aufgestellt. Wer einmal weiss, dass z. B. $d(x^m) = mx^{m-1}dx$ ist, der weiss auch, dass umgekehrt: $\int mx^{m-1}dx = x^m$ ist; oder, wer einmal weiss, dass $d\,log\,x = \frac{dx}{x}$ ist, (was er im Differenzial-Calcul lernt), der weiss auch, dass $\int\frac{dx}{x} = log\,x$ ist. Im Gange der Lehrsätze darf allerdings ein solches Vorgreifen nicht stattfinden, aber in Beispielen und um der Erläuterungen willen ist es erlaubt, auf etwas Nachfolgendes hinzuweisen, wenn dadurch die Abrundung und das letzte Verständniss der erläuterten Beispiele herbeigeführt werden kann. Und mehr ist auch nicht geschehen, als dass überall auf den Integral-Calcul hingewiesen wurde, der in seinen rein analytischen Operationen, in der Technik seiner Formeln, viele Probleme löst, die der Differenzial-Calcul nur als Probleme, und zwar als bestens formulirte Probleme mit unerschütterlicher Bestimmtheit herstellt, die Technik der Ausführung selbst aber dem Integral-Calcul überlässt.

In der fünften Abtheilung, welche die Anwendung des Differenzial-Calculs auf Mechanik und Physik enthält, ist dasselbe Verfahren eingehalten worden. Nur bringt es hier, wie Jeder einsieht, die Natur dieser Disciplinen mit sich, dass den Anwendungen ein Mass gesetzt werden muss. Denn wollte man diese vollständig geben, so müsste die ganze Mechanik und die ganze Physik geschrieben werden, da in diesen Wissenschaften Alles, was wissenschaftlich ist, vom Differenzial-Calcul abhängt. Es kommt hier also darauf an, dass

man das rechte Mass findet. Es sind die Elemente zu geben, aus denen die zusammengesetzten Formeln hervorgehen, und es ist die Methode an einzelnen Beispielen in ganzer Vollständigkeit durchzuführen, damit sie für andere Beispiele und Aufgaben als Leuchte und Massstab diene. Denn das Schema der Beweise wiederholt sich in allen Lehrsätzen und die Methode ist überall eine und dieselbe. Ist diese daher in einigen wesentlichen Lehren vollständig gegeben und begriffen, dann kann sie bei allen andern Lehrsätzen unbedingt angewendet, und gleichsam von einem Probleme auf das andere übertragen werden. Mehr als diess auszuführen, ist nicht die Aufgabe des Differenzial-Calculs; denn wollte er weiter gehen, so würde er in die jenen Disciplinen eigenthümlichen Gebiete eingreifen, was ihm nicht zukommt, was er vielmehr diesen selber überlassen muss.

Hie und da habe ich kritische Bemerkungen eingeflochten und namentlich die Angriffe zurückgewiesen, denen einige Resultate des Differenzial-Calculs von jeher und zwar von Seite der grössten Mathematiker ausgesetzt waren. Wenn in diesen Bemerkungen die Sprache ganz deutlich gesprochen worden ist, so ist es bloss der Sache willen geschehen. Denn wollte man hier minder deutlich sprechen, so wäre Gefahr vorhanden, dass die Wahrheit an Vielen vorüberginge, ohne erkannt zu werden. Einen andern Zweck, als die objective Wahrheit und die über allen Irrthum erhabene Natur des Calculs herzustellen und zu beweisen, haben diese Bemerkungen nicht, wo und wie sie auch vorkommen mögen.

Nicht aber hie und da, sondern überall ist ferner darauf hingewiesen, dass die Differenzialien, welche

Andere für unendlich kleine Grössen genommen haben, in Wahrheit nichts anderes sind, als endliche, messbare, erkennbare und gleichsam greifbare Grössen, die man berechnen, zeichnen, darstellen kann, wie alle übrigen Grössen der Mathematik.

Dass ich hier ganz offen reden musste, ist klar; doch wird Jeder finden, dass ich mit möglichster Schonung der Vorurtheile zu Werke gegangen bin, dass ich so sanft als möglich die Binde lösen wollte, die seit zweihundert Jahren ein Vielen unbegreifliches Verhängniss gewoben hat. Doch habe ich Schritt vor Schritt immer deutlicher gesprochen, und am Ende, wo die begriffene Wahrheit ohnehin nicht mehr verletzen kann, die offensten und unumwundensten Erklärungen gegeben. Aber auch diese haben nur den objectiven Zweck, dass sie die Wahrheit an's Tageslicht bringen, wie sich Jeder überzeugen kann, der sie aufmerksam verfolgen und in ihrer Reihenfolge vergleichen wird. Die dieses thun, werden auch einsehen, dass die Wahrheit, soll sie je wieder die rechte und natürliche Erkenntniss bringen können, ganz offen ausgesprochen werden müsse.

Diess ist, was ich zu erläutern hatte. Ich schliesse mit der Bemerkung, dass ich einige wenige Sätze und Beispiele, die ich in frühern kleinen Schriften im Einzelnen behandelt hatte, in diese allgemeine Theorie des Differenzial-Calculs, wie es der Natur der Sache angemessen war, herübergenommen habe.

Würzburg, den 15. August 1854.

Der Verfasser.

Inhalt.

Seite

Erste Abtheilung.

Einleitung in den Differenzial-Calcul.

Cap. I. Ableitung, Begriff und Definition des Differenzial-Calculs.

§. 1. Prinzipien des Differenzial-Calculs 3
§. 2. Bemerkung über die Methode 5
§. 3. Eintheilung der Analysis 6
§. 4. Ableitung des Differenzial-Calculs 8
§. 5. Definition des Differenzial-Calculs 10
§. 6. Geschichtlicher Rückblick 10

Cap. II. Zusammenstellung einiger Lehren der niedern Analysis.

§. 7. Constante und veränderliche Grössen. Bezeichnung der Functionen 14
§. 8. Ueber die complexen Grössen 16
§. 9. Convergenz und Divergenz der Reihen 18
§. 10. Lehrsatz I. 19
§. 11. Lehrsatz II. Gleichheit und Identität zweier Reihen . . . 21
§. 12. Lehrsatz III. Entwicklung der analytischen Functionen in Reihen 24
§. 13. Anwendung der obigen Sätze auf die Reihen-Entwicklung der Functionen 28
§. 14. I. Entwicklung der Reihe $(1+x)^n$ 28
§. 15. II. Entwicklung der logarithmischen Reihe: ${}^a log(1+x)$ . . 30
§. 16. III. Entwicklung der Exponential-Reihe: a^x 31

Seite

§. 17. IV. Entwicklung der Reihen für $\sin x$ und $\cos x$ 34
§. 18. V. Reihe für die Tangenten und Cotangenten 37
§. 19. VI. Entwicklung der Reihen für Secanten und Cosecanten . 38
§. 20. Allgemeine Bemerkung zu den goniometrischen Reihen . . 38
§. 21. VII. Ableitung der cyclometrischen Reihen 40
§. 22. Allgemeine Bemerkung über diese Reihen 44

Cap. III. Der binomische Lehrsatz.

§. 23. Bestimmung der Coefficienten der binomischen Reihe . . . 46
§. 24. Ableitung des Coefficienten des m^{ten} Gliedes der Potenz $(\mu+1)$ aus den Coefficienten des m^{ten} und $(m-1)^{\text{ten}}$ Gliedes der Potenz μ 49
§. 25. Allgemeine Gültigkeit des Bildungs-Gesetzes der Binomial-Coefficienten 50
§. 26. Allgemeine Gültigkeit der Binomial-Reihe 52
§. 27. Andere Schreibart für die Reihe: $(a+b)^{\mu}$ 53

Zweite Abtheilung.

Die Technik der Differenzial-Operationen.

Cap. IV. Der Differenzial-Lehrsatz von nur *einer* veränderlichen Grösse.

§. 28. Zunahme und Abnahme der veränderlichen Grössen . . . 59
§. 29. Der Differenzial-Lehrsatz für Potenzen 60
§. 30. Bezeichnungen von α und ω und Definitionen dieser Zeichen 61
§. 31. Definition des Differenzirens 64
§. 32. Differenzial der Function $y=ax^{\mu}+b$ 65
§. 33. Allgemeiner Ausdruck der Reihe Δy_x 67
§. 34. Das Gesetz der Reihe Δy_x gilt allgemein für alle Functionen einer Veränderlichen x 69
§. 35. Die Taylor'sche Reihe 74
§. 36. Allgemeine Bemerkung 76
§. 37. Ableitung dieses Satzes nach La Grange 77

Cap. V. Ausführung der in den Symbolen dy_x, d^2y_x etc. angedeuteten Operationen.

§. 38. Differenzirung der Summen, Differenzen, Producte und Quotienten 83
§. 39. Differenzirung der Urfunctionen erster Reihe 86
§. 40. Differenzirung der Urfunctionen zweiter Reihe 91
§. 41. Allgemeine Zusätze 93
§. 42. Allgemeine Bemerkung 95

Seite

Cap. VI. Entwicklung der Function einer Veränderlichen, die ihrerseits wieder eine Function einer andern Veränderlichen ist. Vertauschung der unabhängig Veränderlichen.

§. 43. Entwicklung von Δy_z, wenn $y = fx$, und $x = \varphi z$ ist . . 96
§. 44. Vertauschung der unabhängig Veränderlichen 100
§. 45. Vertauschung der unabhängig Veränderlichen für höhere Differenzialien 105
§. 46. Differenzialien der Urfunctionen, ohne Voraussetzung ihrer Reihen 106
§. 47. Beweis der Allgemeingültigkeit der Bildungs-Gesetze der Reihen für $\log x$, $\sin x$, $\cos x$ etc. 111
§. 48. Uebung im Differenziren zusammengesetzter Functionen einer veränderlichen Grösse 113
§. 49. Differenzialien. Uebungsbeispiele im Differenziren einiger zusammengesetzter Functionen 114
§. 50. Die höheren Differenzialien zusammengesetzter Functionen . 120

Cap. VII. Fortsetzung des vorhergehenden Cap. Allgemeine Substitutions-Formeln.

§. 51. Einführung neuer unabhängiger Variabeln in gegebene Differenzial-Formeln 121
§. 52. Anwendung der vorigen Formeln 122
§. 53. Andere Beispiele über dieselbe Formel 125
§. 54. Allgemeingültigkeit dieser Formeln 128
§. 55. Beispiel 130
§. 56. Anwendung auf $y = \sin e^z$ 131

Cap. VIII. Differenzialien von Functionen mehrerer veränderlicher Grössen. Partielle Differenzialien.

§. 57. Bezeichnung der partiellen Differenzialien 133
§. 58. Differenzialien von Functionen zweier veränderlicher Grössen 136
§. 59. Directe Ableitung der obigen Reihe 140
§. 60. Die obige Reihe für constante dx und dy 142
§. 61. Beispiele zur allgemeinen Formel 145
§. 62. Die Differenzialien unentwickelt gegebener Functionen zweier Veränderlicher 146
§. 63. Entwicklung der Differenzialien unentwickelter Functionen dreier Veränderlicher 150
§. 64. Differenzirung von Functionen mehrerer Veränderlicher, für die zugleich eine Anzahl Bedingungs-Gleichungen dieser Veränderlichen gegeben ist 151
§. 65. Zweiter Fall 154

Seite

§. 66. Dritter Fall 156
§. 67. Allgemeine Bemerkung 158

Cap. IX. Indepedente Darstellung der n^{ten} Differenzialien der Functionen.

§. 68. Discussion, ob für alle Functionen indepedente Differenzial-Ausdrücke aufgestellt werden sollen 159
§. 69. Die n^{ten} Differenzialien für Potenzen, Exponential-Grössen, Logarithmen, Sinusse, Cosinusse 162
§. 70. Die n^{ten} Differenzialien für *arc. sin x*, *arc. cos x*, *arc. tg x* und *arc. cotg x* 164
§. 71. Allgemeine Differenzialien des Bogens in Bezug auf Secante und Cosecante 168
§. 72. Die allgemeinen Differenzialien für Tangente und Cotangente, Secante und Cosecante 169
§. 73. Schlussbemerkung 171

Dritte Abtheilung.

Anwendung des Differenzial-Calculs auf Analysis.

Cap. X. Allgemeine Gesichtspunkte für die Anwendung des Differenzial-Calculs auf Analysis.

§. 74. Bedingungen, unter denen die Differenzial-Reihen auf die Analysis angewendet werden können 175
§. 75. Verschiedenheit der besondern Werthe, welche die einzelnen Glieder der Differenzial-Reihen annehmen können . . . 178
§. 76. Bestimmung der Taylor'schen Reihe 180
§. 77. Bestimmung der Reste dieser Reihen 182

Cap. XI. Der Maclaurin'sche Satz.

§. 78. Der Maclaurin'sche Satz für Functionen einer veränderlichen Grösse 186
§. 79. Ableitung dieser Reihe von Maclaurin 188
§. 80. Beispiele über die Maclaurin'sche Reihe 189
§. 81. Die Maclaurin'sche Formel für Functionen von Veränderlichen, die ihrerseits Functionen von andern unabhängigen Veränderlichen sind 193
§. 82. Sinusse und Cosinusse vielfacher Bogen 195
§. 83. Historische Vergleichung 197
§. 84. Andere Beispiele 199

Seite

§. 85. Die Maclaurin'sche Reihe für Functionen mehrerer veränderlicher Grössen 202
§. 86. Der Moivre'sche Lehrsatz 203
§. 87. Der Cotes'sche Satz 207

Cap. XII. Maxima und Minima.

§. 88. Allgemeine Erörterung 210
§. 89. Kritik und Zurückweisung der Fälle, die constante Functionen geben, also nicht zum Maximum und Minimum gehören 214
§. 90. Maximum und Minimum für entwickelte Functionen einer veränderlichen Grösse 216
§. 91. Maximum und Minimum für entwickelte Functionen von zwei unabhängigen Veränderlichen 218
§. 92. Maximum und Minimum für entwickelte Functionen von mehreren unabhängigen Variabeln 222
§. 93. Maxima und Minima einer Function u, wenn diese Function unentwickelt gegeben ist 223
§. 94. Maxima und Minima entwickelter Functionen zweier Variabeln $u = f(x, y)$, für welche noch eine unentwickelte Bedingungs-Gleichung $P = \varphi(x, y) = 0$ gegeben ist . . . 224
§. 95. Bestimmung der Maxima und Minima für eine Function u, die unentwickelt zugleich mit den Variabeln x, y gegeben ist, und für welche noch eine unentwickelte Bedingungs-Gleichung $P = \varphi(x, y) = 0$ gilt 228
§. 96. Maxima und Minima für Functionen von beliebig vielen Variabeln mit einer beliebigen Anzahl von Bedingungs-Gleichungen 230

Cap. XIII. Fälle, in welchen die Differenzialien die Form $\alpha + \frac{\beta}{0} = \infty$ annehmen.

§. 97. Allgemeine Uebersicht 232
§. 98. Das Differenzial: $dy = \infty$ 237
§. 99. Weitere Angriffe gegen den Differenzial-Calcul 238

Cap. XIV. Functionen, die für bestimmte Werthe der Veränderlichen unter den Formen: $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0.\infty$; ∞^0 etc. erscheinen.

§. 100. Die Form $\frac{0}{0}$ für Functionen einer Veränderlichen . . . 242
§. 101. Die gewöhnliche Methode 244
§. 102. Beispiele 246
§. 103. Die Form $\frac{\infty}{\infty}$ für Functionen einer Veränderlichen . . . 248

Seite

§. 104. Die Form $0 \times \infty$ für Functionen einer Veränderlichen . . 249
§. 105. Singuläre Art, die Werthe von $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ etc. zu finden . . 250
§. 106. Beispiele 252
§. 107. Eine andere allgemeine Methode der Berechnung der Werthe $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ etc. 254
§. 108. Functionen von der Form 0^x, ∞^0 etc. 257

Cap. XV. Auflösung der Gleichungen mit Hilfe der Differenzialien.

§. 109. Grenzwerthe der Wurzeln einer Gleichung 259
§. 110. Allgemeine Reihe für die Wurzeln einer Gleichung . . . 260
§. 111. Specielle Reihen für die Wurzeln einer Gleichung . . . 261
§. 112. Vorbereitung für die Ableitung dieser speciellen Reihen . 262
§. 113. Ableitung der gesuchten Reihen 264
§. 114. Beispiele 269
§. 115. Reihen für Urfunctionen 274
§. 116. Weitere allgemeine Reihen für Werthe einer gegebenen Gleichung 276
§. 117. Entwicklung dieser Reihen 277
§. 118. Beispiele 278
§. 119. Entwicklung dieser Reihen für die Urfunctionen 280
§. 120. Andere Schreibart dieser Reihen 282
§. 121. Reihen, die nach zwei oder mehreren Veränderlichen geordnet sind 283
§. 122. Die Euler'sche Formel 285
§. 123. Die Formel von Paoli 287

Cap. XVI. Fortsetzung der vorhergehenden Untersuchung. Die Umkehrungs-Reihen von La Place und La Grange. Allgemeine Maclaurin'sche Umkehrungs-Reihe.

§. 124. Bestimmung einer beliebigen Function der Wurzeln einer gegebenen Gleichung oder Reihe 288
§. 125. Weitere Ausführung dieser Reihen 291
§. 126. Allgemeine Reihe 293
§. 127. Das Theorem von La Grange 294
§. 128. Prüfung des La Grange'schen Theorems 296
§. 129. Die La Place'sche Umkehrungs-Reihe 299
§. 130. Die allgemeine Maclaurin'sche Reihe 300
§. 131. Elimination der unbestimmten Functionen 303
§. 132. Schlussbemerkung 305

Seite

Vierte Abtheilung.

Anwendung des Differenzial-Calculs auf Geometrie.

Cap. XVII. Die geradlinigen Coordinaten der ebenen Curven und ihre Differenzialien.

§. 133. Vorerinnerung 309
§. 134. Ebene Curven und ihre Gleichungen 310
§. 135. Erläuterung 311
§. 136. Die Differenzialien der Coordinaten 312
§. 137. Erstes Differenzial der Ordinate 314
§. 138. Zusätze 317
§. 139. Singuläre Werthe der Differenzialien der Ordinaten . . . 320
§. 140. Gleichungen der Subtangenten und Subnormalen 321
§. 141. Das zweite Differenzial der Ordinate 322
§. 142. Das dritte Differenzial der Ordinate 324
§. 143. Die höheren Differenzialien der Ordinaten 325
§. 144. Schlussbemerkung 328

Cap. XVIII. Die Differenzialien der übrigen Functionen der Curven.

§. 145. Das erste Differenzial des Bogens. Rectification 330
§. 146. Die höheren Differenzialien des Bogens 334
§. 147. Quadratur ebener Curven 338
§. 148. Planirung der Rotations-Oberflächen 344
§. 149. Cubatur der Rotations-Körper 347
§. 150. Allgemeiner Zusatz über die Differenzialien der schiefwinkeligen Coordinaten 349

Cap. XIX. Ableitung der vorausgehenden Resultate aus den Polar-Coordinaten.

§. 151. Polar-Coordinaten 350
§. 152. Unabhängige Bestimmung der Differenzialien der Polar-Coordinaten 353
§. 153. Ueber die tangirenden Spiralen 354
§. 154. Differenzialien der Polar-Coordinaten 356
§. 155. Rectification 361
§. 156. Quadratur 362
§. 157. Complanation der Rotations-Oberflächen 364
§. 158. Cubatur der Rotations-Körper 364
§. 159. Die verschiedenen Coordinaten-Systeme 365

Seite

Cap. XX. Einige Anwendungen auf die analytische Geometrie.

§. 160. Gleichungen der Tangenten und Normalen 369
§. 161. Beispiele zur Verdeutlichung 371
§. 162. Asymptoten 375
§. 163. Beispiele zur Verdeutlichung 377
§. 164. Berührungen der Curven 381
§. 165. Tangirende Parabeln 387
§. 166. Osculirende Kreise 388
§. 167. Evoluten gegebener Curven 390
§. 168. Vergleichung des Krümmungshalbmessers mit dem Bogen der Evolute 394
§. 169. Formel des Krümmungshalbmessers in Polar-Coordinaten 396

Cap. XXI. Die Differenzialien der von Flächen abhängigen Functionen.

§. 170. Eintheilung dieser Functionen 398
§. 171. Die ersten Differenzialien der Coordinaten 399
§. 172. Gleichung der tangirenden Ebene 402
§. 173. Die Normalen der Flächen 405
§. 174. Die vorhergehenden Differenzialien in Ausdrücken von Polar-Coordinaten 407
§. 175. Die zweiten Differenzialien der Coordinaten im rechtwinkeligen Coordinaten-System 410
§. 176. Ueber die Eigenschaften der tangirenden Flächen zweiter Ordnung 413

Cap. XXII. Die Formeln für Complanation und Cubatur.

§. 177. Ueber die Complanation der Flächen 422
§. 178. Partielle Differenzen und partielle Differenzialien der Flächen 425
§. 179. Das Flächen-Element 426
§. 180. Zusätze 430
§. 181. Planirung der cylindrischen Flächen 434
§. 182. Rotations-Flächen 438
§. 183. Cubatur der Körper 440
§. 184. Das Körper-Element 443
§. 185. Die Complanations-Formel der Flächen in Polar-Coordinaten 447
§. 186. Die Cubatur-Formel in Polar-Coordinaten 449

Cap. XXIII. Anwendung des Differenzial-Calculs auf Curven doppelter Krümmung.

§. 187. Analyse der Aufgaben, die bei diesen Untersuchungen vorkommen 452

Seite

§. 188. Die Differenzialien der Coordinaten der räumlichen Curven 454
§. 189. Gleichungen der Tangenten und Asymptoten 456
§. 190. Gleichung der Normal-Ebene 461
§. 191. Die Polar-Coordinaten für Curven doppelter Krümmung . 461
§. 192. Rectification der Curven doppelter Krümmung 463
§. 193. Die osculirende Ebene der Curven doppelter Krümmung . 468
§. 194. Der osculatorische Kreis 470
§. 195. Zusätze 475

Cap. XXIV. Einige Anwendungen der vorhergehenden Lehren.

§. 196. Die Krümmungsverhältnisse der Flächen 477
§. 197. Gleichung der Ebene, die durch die Normale gelegt wird 478
§. 198. Ausführung dieser Operationen 479
§. 199. Maximum und Minimum der Krümmungshalbmesser . . 480
§. 200. Einführung des Krümmungshalbmessers in die vorhergehenden Formeln 482
§. 201. Nabel- oder Kreispunkte der Flächen 483
§. 202. Die concav-convexen Flächen 484
§. 203. Die windschiefen Flächen 485
§. 204. Beispiele über die windschiefen Flächen 490

Fünfte Abtheilung.

Anwendung des Differenzial-Calculs auf Mechanik und Physik.

Cap. XXV. Anwendung auf die Bestimmung des Schwerpunkts der Linien, Flächen und Körper.

§. 205. Mass dieser Anwendungen 505
§. 206. Der Schwerpunkt ebener Flächen 506
§. 207. Der Schwerpunkt des Bogens einer Curve 512
§. 208. Schwerpunkt des Kreis-Sectors 516
§. 209. Schwerpunkt der Rotations-Flächen 516
§. 210. Schwerpunkt der Flächen überhaupt 518
§. 211. Schwerpunkt der Rotations-Körper 522
§. 212. Schwerpunkt der übrigen Körper 523
§. 213. Schwerpunkt des Körper-Elements 525

Cap. XXVI. Anwendung des Differenzial-Calculs auf Bewegung und bewegende Kräfte.

§. 214. Raum- und Zeitgrössen als Functionen von einander . . 530
§. 215. Das Mass der Bewegungen 531

Seite

§. 216. Differenzialien des zurückgelegten Raumes 533
§. 217. Zusätze 535

Cap. XXVII. Anwendung des Differenzial-Calculs auf Physik.

§. 218. Allgemeine Erörterung der Methode 542
§. 219. Höhen-Messungen durch Beobachtungen des Barometers . 544
§. 220. Zusätze 547
§. 221. Formel für die Schwächung des Lichts beim Durchgang durch die Atmosphäre 549
§. 222. Zusätze 551
§. 223. Der gewöhnliche Gebrauch der Differenzialien bei physikalischen Untersuchungen 555
§. 224. Schluss 556

ERSTE ABTHEILUNG.

EINLEITUNG IN DEN DIFFERENZIAL-CALCUL.

Cap. I.

Ableitung, Begriff und Definition des Differenzial-Calculs.

§. 1.

Der Differenzial-Calcul ist ein Theil der Analysis, und es gelten in ihm keine andern Prinzipien, als die in der Analysis überhaupt gelten.

Der Differenzial-Calcul ist ein Theil der Analysis. Die Gesetze, auf die er sich stützt, und die Operationen, die er ausführen lehrt, gelten schlechthin allgemein, eben sowohl für arithmetische, wie für geometrische und mechanische Grössen. Diess ist eine Erkenntniss, die man wenigstens seit den Zeiten von La Grange haben sollte, der in seiner Functionen-Theorie das rein analytische Wesen der Differenzialien mit aller Bestimmtheit herausgehoben und nachgewiesen hat.

Ist nun zwar der Differenzial-Calcul für sich rein analytisch, so hat er dennoch, wie jeder Theil der Analysis, vielfache Anwendungen auf Arithmetik, Geometrie und Mechanik.

Es ist nicht ungewöhnlich, dass einzelne Theile der Analysis aus dem Zusammenhange des Ganzen herausgehoben und in Verbindung mit allen ihren Anwendungen dargestellt werden. Ist diess der Fall, so erhalten sie in der Regel auch eigene Benennungen. Diess geschieht z. B. mit der Lehre von den Gleichungen, die dann Algebra im strengen Sinne des Wortes genannt wird. Eine solche eigenthümliche Benennung gibt ihnen aber kein Recht auf besondere, von der allgemeinen Analysis verschiedene Prin-

zipien, noch auch auf aussergewöhnliche Voraussetzungen und Operationen.

Dieses Recht kann also auch nicht für den Differenzial-Calcul in Anspruch genommen werden, um so weniger als sonst der Schein entstehen könnte, der auch oft genug entstanden ist — als sei dieser Calcul etwas Anderes und Höheres als die Analysis, wodurch das wahre Verständniss vielfach getrübt wird.

Kommen in irgend einem Theile der Analysis eigenthümliche und fremdartige, etwa aus der Anschauung, oder aus der Geometrie, oder aus der Mechanik, oder anderswoher entlehnte Voraussetzungen und Begriffe vor, so ist es ein Zeichen, dass ein solcher Theil noch mit irgend einer Unvollkommenheit behaftet ist. Denn die vollkommen erkannte Wahrheit ist jederzeit einfach, ihre Lehren sind wie aus Einem Gusse. — Der gewöhnliche Differenzial-Calcul hat aber solche fremdartige Zuthaten in Menge, wie z. B. die Begriffe des Unendlich-Kleinen, der verschwindenden Grössen, der letzten Grenzen, der Geschwindigkeit des Wachsthums einer Function und dergleichen. Schon dieses ist ein Beweis, dass in ihm noch irgendwo etwas fehlen müsse.

Die Begriffe, die in der Analysis vorausgesetzt werden dürfen, sind aber folgende: Endliche Grösse, Gleichheit, Grösseres und Kleineres. Diese sind die wahren und einzigen Hülfsmittel der Beweise, alles Andere ist äussere Zuthat, Erschleichung oder Entschuldigung und Bitte um Nachsicht, und muss im Prozesse der Wissenschaft ausgeschieden werden.

Die wahre Theorie des Differenzial-Calculs wäre diejenige, die alle Differenzialien jeder Ordnung, sowohl in ihren analytischen Ausdrücken, als in ihren Anwendungen auf geometrische und mechanische Grössen als endliche und bestimmte Grössen nachzuweisen im Stande wäre. Man wird sich auch nicht mit blossen Grenzwerthen begnügen können, denn es ist nur zu gewiss, dass die Differenzialien nicht blosse Grenzwerthe, sondern ganz präcise und adäquate endliche Grössen sind. Man muss sie daher auch ihrer Grösse und sonstigen Beziehung nach anzugeben und zu bestimmen im Stande sein.

Dass bis jetzt noch eine diesen Forderungen genügende Theorie vermisst und gesucht wird, setze ich als eine unter allen Kennern ausgemachte Wahrheit voraus. Im Nachfolgenden werde

ich nun versuchen, diese Theorie aufzustellen, und diejenigen, die über derartige Dinge nachgedacht haben, mögen entscheiden, in wie weit dieser Versuch den strengen Anforderungen der Wissenschaft entsprechen wird oder nicht.

Ich werde mich bemühen, die wahre Theorie des Differenzial-Calculs zu geben, die Binde von den Augen wegzunehmen, und die Differenzialien jeder Ordnung in allen ihren Beziehungen als endliche und adäquate Grössen nachzuweisen, und zwar die Differenzialien selbst, nicht etwa bloss die Differenzial-Quotienten. Die wahre Theorie liegt einer jeden andern auch noch so verstümmelten Theorie als Keim der Wahrheit zu Grunde, es wird nicht so schwer sein, sie aus ihrer verborgenen Tiefe zu erheben. Die Theorie des Differenzial-Calculs muss aus dem Gang der Analysis so naturgemäss abgeleitet werden, dass sich am Ende vielleicht Jeder selbst sagen wird, auch er hätte sie in dieser Art ableiten können. Denn die Wahrheit ist einfacher und leichter, als man gewöhnlich denkt.

§. 2.

Bemerkung über die Methode.

Das Erste ist, dass wir die Aufgabe des Differenzial-Calculs aufstellen. Das umgekehrte Verfahren, dass man sich weigert, am Anfange eine Definition aufzustellen, halte ich nicht für eine Vollkommenheit, sondern für eine Unvollkommenheit der Wissenschaft. Es handelt sich ja nicht darum, erst die Theorie zu suchen; denn wenn man sie lehrt, muss man sie bereits haben, und was man hat, das ist wohl auch vollkommen durchdacht, und was durchdacht ist, kann auch in Worten klar und deutlich ausgedrückt werden. Wenn auch die Auflösungen aller Aufgaben, die Lehrsätze selbst der Reihe nach erst in der Theorie gegeben werden können, so muss man doch am Anfange das Ganze der zu lösenden Aufgabe klar und bestimmt ausdrücken können.

Noch besser ist es, wenn man ausserdem die Stelle nachweisen kann, die eine Lehre im Ganzen der Wissenschaft einnimmt, von der sie ein Theil ist. Dann wird die Erkenntniss eine genetische, und das, was vorhergeht und bekannt ist, erleichtert das Verständniss der nachfolgenden, erst zu lösenden, Aufgabe.

Aus diesem Grunde schicke ich eine Eintheilung der Analysis voraus, damit aus der Natur der Sache selbst erhelle, welchen Platz der Differenzial-Calcul im System der Analysis einnimmt.

§. 3.

Eintheilung der Analysis.

Die Analysis theilt sich in die niedere und höhere, und diese Eintheilung ist, wie sich zeigen wird, nicht zufällig, sondern nothwendig und im Wesen der analytischen Operationen selbst begründet.

Die niedere Analysis theilt sich in drei Theile: in die Operationslehre, in die Gleichungen und in die Reihen.

Im Allgemeinen beschäftigt sich dieser niedere und mehr vorbereitende Theil der Analysis mit den Gesetzen und Resultaten, die aus der Verbindung von Grössen mit andern Grössen hervorgehen, diese mögen nun veränderlich oder constant sein. So findet man z. B. die Summe $(a+b)$, das Product (ab), die Potenz (a^n), oder man findet, wenn man diese Operation unter sich zu endlichen Ausdrücken verbindet, in den Gleichungen die Grössen, die man sucht, oder wenn sie in unendlicher Anzahl zu Reihen verbunden werden, so stellt man die Resultate und Gesetze auf, die sich aus solchen Verbindungen ergeben.

Daraus bildet sich die niedere Analysis in drei Abschnitten.

I. Die Operationslehre. Diese behandelt diejenigen Elemente getrennt und einzeln, die in allen spätern und zusammengesetzten Ausdrücken vereinigt vorkommen. Sie lehrt, wie man mit diesen Elementen operiren müsse, um richtige Resultate zu erlangen, z. B. wie man richtig addire, multiplicire, potenzire, logarithmire und dergleichen.

Das gemeinsame Kennzeichen dieser mathematischen Operations-Elemente, die man auch Urfunctionen, einfache Functionen oder Operations-Functionen, öfter auch analytische Gleichungen nennt, besteht darin, dass sie Gleichungen der einfachsten Art sind, solche, in denen die eine Seite eine einfache Grösse (das Resultat), und die andere Seite nur eine einzige Operation enthält.

Diese Urfunctionen sind also:

$y = a + x$ (Addition),
$y = a - x$ (Subtraction),
$y = mx$ (Multiplication),
$y = \frac{m}{x}$ (Division),
$y = x^m$ (Potenz),
$y = \sqrt[n]{x^m}$ (Radizirung),
$y = m^x$ (Exponential-Grössen),
$y = {}^m log\, x$ (Logarithmirung),
$y = sin\, x$, $= cos\, x$ etc. (goniometrische Functionen),
$y = arc.\, sin\, x$, $= arc.\, cos\, x$, etc. (cyklometrische Functionen).

Und so weiter.

Der Idee nach ist die Anzahl der Urfunctionen unbestimmbar gross. Wissenschaftlich können jedoch die ferneren Urfunctionen erst aus dem Integral-Calcul abgeleitet werden, in welchem sie sich, so zu sagen, von selbst darbieten, wie die elliptischen Functionen, der Integral-Logarithmus und dergleichen. Die Eigenschaft übrigens, dass sie Gleichungen der einfachsten Art sind ($y = \varphi x$), haben sie mit den angeführten Urfunctionen gemeinschaftlich. Diese sind die wahren Elemente der Analysis, alle andern Ausdrücke sind nur Zusammensetzungen und Combinationen von ihnen. — Die einfachsten von ihnen, die ersten Operationen bis zu den Potenzen, kann man jederzeit von selbst leicht in Zahlen ausführen; für die höheren hat man Tafeln, z. B. logarithmische, trigonometrische u. s. w., in denen alle Zahlenwerthe bereits berechnet und übersichtlich geordnet sind. Diese Tafeln bilden den Reichthum der mathematischen Wissenschaft, und je mehr Urfunctionen in Zahlen berechnet, je richtiger sie gesondert, und je besser sie geordnet werden, desto reicher und mächtiger wird der Schatz der mathematischen Wissenschaft.

II. Die Lehre von den Gleichungen. In den Gleichungen sind die oben angegebenen Elemente complicirt, aber in einer endlichen Anzahl von Gliedern enthalten. Es können natürlich in den Gleichungen keine andern Ausdrücke vorkommen, als solche, die schon in der Operationslehre einzeln

behandelt wurden. In den Gleichungen kommen eben nur wieder Summen, Producte, Potenzen, Logarithmen etc. vor, aber nicht einzeln, sondern complicirt, und diese sind darum in der vorausgehenden Operationslehre einzeln behandelt worden, damit man ihre Schwierigkeiten einzeln überwinden lernt, und nun in den zusammengesetzteren und schwereren Problemen wenigstens von dieser Seite frei ist, und ihre Resultate ohne Weiteres anwenden kann.

III. Die Lehre von den Reihen im weitesten Sinne. Die Reihen unterscheiden sich von den Gleichungen darin, dass sie die Operations-Elemente in einer möglicherweise unendlichen Anzahl und Reihe von Gliedern enthalten, woher auch ihr Name. Ausserdem haben sie noch ein erkennbares Bildungsgesetz in der Aufeinanderfolge ihrer Glieder.

Es geschieht zwar nicht selten, dass die Reihen mit einem beliebigen Gliede schliessen, also endliche Ausdrücke sind. Allein dieser Abschluss ist ein beliebiger und willkührlicher. Denn da alle Reihen, wenn sie wirklich Reihen sind, ein Bildungsgesetz haben, so kann augenblicklich eine jede einzelne Reihe in's Unendliche fortgesetzt werden. Es geschieht nur zum Behufe besonderer Untersuchungen, dass solche wesentlich aus unendlich vielen Gliedern bestehende Reihen mit einem beliebigen allgemeinen Gliede geschlossen werden.

Alles in der Mathematik ist Gleichung im weitesten Sinne, Gleichheit zweier Ausdrücke, oder, was dasselbe ist, ihre Reduction auf Null.

Fassen wir nun diese Gleichungen in den Urfunctionen, in den Gleichungen im engern Sinne, und in den Reihen in einen allgemeinen Ausdruck zusammen, so werden wir sie Functionen schlechthin nennen. Der erste Theil der Analysis umfasst daher die Lehre von den Functionen in drei Abschnitten, die sich nach Urfunctionen, Gleichungen und Reihen theilen.

§. 4.

Ableitung des Differenzial-Calculs.

Nun hat das Fortschreiten der Analysis nach Aussen hin ein Ende, denn über die unendliche Anzahl von Gliedern hinaus giebt

es nichts mehr. Aber darum hat die Analysis selbst noch nicht ein Ende, sondern jetzt beginnt erst ihr wahrer und höherer Anfang, indem alles Vorhergehende als blosse Vorbereitung betrachtet wird. Es beginnt nämlich jetzt ihr zweiter Theil, oder ihr Fortschritt nach Innen.

Wenn bisher nur immer Grössen mit andern Grössen verbunden, und die Resultate untersucht wurden, die sich aus solchen Verbindungen ergeben, so entsteht die weitere Frage, was sich denn wohl ergeben werde, wenn die Grössen nicht mehr mit andern ihnen fremden Grössen, sondern wenn sie mit sich selbst verbunden werden. — Welche Resultate werden hervorgehen, wenn die Veränderungen untersucht werden, die sich an den Grössen selbst ergeben, wenn ihre eigenen Werthe durch Addition, Multiplication, Potenzirung u. s. w. verändert werden? — Jedenfalls darf man hoffen, dass sich hier ganz anders wichtige Resultate zeigen werden, da ja Grössen zu sich selbst und zu ihren eigenen Veränderungen in einem viel reicheren Verhältnisse stehen, als zu andern ihnen fremden oder gleichgültigen Grössen.

Derjenige Theil der Analysis, der die Frage beantwortet, welche Resultate in analytischen Ausdrücken (seien sie nun Operationen, Gleichungen oder Reihen) hervorgehen, wenn die in ihnen enthaltenen veränderlichen Grössen selbst durch Addition oder Subtraction vermehrt oder vermindert werden, ist der Differenzial-Calcul.

An diese Ableitung schliessen sich folgende Zusätze an:

1. Man kann die Frage aufwerfen, welche Veränderungen mit den Functionen vorgehen, wenn die in ihnen enthaltenen Veränderlichen durch Multiplication oder Division, durch Potenzirung oder Logarithmirung u. s. w. vermehrt oder vermindert werden. Diese Frage kann allerdings aufgeworfen werden, aber ihre Beantwortung berührt den Differenzial-Calcul nicht, da dieser nur diejenigen Veränderungen der Functionen behandelt, welche erfolgen, wenn die in ihnen enthaltenen Veränderlichen durch Addition und Subtraction vermehrt oder vermindert werden. Der Differenzial-Calcul behandelt nichts anders als diess, aber diess in ganzer Ausführlichkeit und Vollständigkeit.

2. Weil die Operationen der Addition und Subtraction den übrigen analytischen Operationen, der Multiplication, Division u. s. w.

vorausgehen, so folgt, dass der Differenzial-Calcul den vordersten Platz im zweiten Theile der Analysis einnimmt. Seine Stelle im Systeme ist vollkommen bestimmt. Die niedere Analysis umfasst: Operationslehre, Gleichungen und Reihen, die zweite oder höhere Analysis umfasst: die Lehre der Veränderungen der Functionen, die erfolgen, wenn die in ihnen enthaltenen Veränderlichen selbst verändert werden, und als ersten Abschnitt den Differenzial-Calcul, der die Veränderungen kennen lehrt, die hervorgehen, wenn die in den Functionen enthaltenen Veränderlichen durch Addition oder Subtraction verändert werden. Ob und welche andern Abschnitte ihm nachfolgen, diess kann hier füglich unerörtert bleiben.

§. 5.

Definition des Differenzial-Calculs.

Wir sind nun im Stande, die Definition des Differenzial-Calculs in Folgendem zu geben:

Wenn in einer oder in mehreren Functionen die in ihnen enthaltenen veränderlichen Grössen um beliebige constante oder veränderliche Grössen durch Addition oder Subtraction vermehrt oder vermindert werden, so geht daraus ein System von Veränderungen dieser Functionen selbst hervor. Das System dieser Veränderungen nach apriorischen Regeln zu bestimmen und die Gesetze aufzustellen, nach welchen diese Veränderungen sowohl im Ganzen als in allen einzelnen Gliedern gefunden werden, ist die Aufgabe des Differenzial-Calculs. Diese Aufgabe als gelöst betrachtet, giebt das Wesen dieses Calculs.

§. 6.

Geschichtlicher Rückblick.

Die Entwicklungsgeschichte des Differenzial-Calculs, um welche sich seit zweihundert Jahren die ganze Mathematik bewegt, ist die allermerkwürdigste, die man finden kann. Schon in den Vorstufen der Entwicklung, bei Cavalieri, Fermat, Roverbal, Pascal und Andern kündigte sich der Gegenstand als eine Sache von grosser Tragweite an, und die Acten sind um so anziehender, als der Gegenstand nicht so fast in stiller Zurückgezogenheit der

Forscher, als im lauten Gewühle des öffentlichen Lebens im rühmlichsten Wettlauf der Kämpfer verhandelt wurde. Doch kam es im Ganzen nur zu Raisonnements und zu einzelnen geometrischen Anwendungen, nicht zu einem Calcul, der doch die Hauptsache ist. Diesen, den Calcul, stellten bald darauf und fast zu gleicher Zeit Newton und Leibnitz auf, und bekannt ist ihr Kampf um die Ehre der ersten Entdeckung. Newton gründete den Calcul auf den Begriff der Geschwindigkeit der Bewegung, Leibnitz seinerseits auf den Begriff der unendlich kleinen Grössen, zwei Hypothesen, von denen die eine so viel werth ist, als die andere. Diesen beiden Heroen der Wissenschaft kann man es nicht zum Vorwurfe machen, dass sie nicht zum wahren Wesen der Sache vorgedrungen sind, es fehlte noch ein nothwendiges Mittelglied in der Reihe der Wahrheiten, nämlich der Taylor'sche Lehrsatz, und ohne diesen ist es jedem menschlichen Verstande schlechterdings unmöglich, die Wahrheit in dieser Sache zu schauen. Indess war doch der Calcul vorhanden, und machte namentlich durch Leibnitz und seine Schüler, die beiden Bernoulli's, in kurzer Zeit die überraschendsten Fortschritte. Nun kam auch der Taylor'sche Lehrsatz; aber Newton und Leibnitz, welche die Theorie an's Ende zu führen im Stande gewesen wären, waren nicht mehr.

Der Calcul wuchs jedoch immer mehr an; Euler sammelte und bereicherte die Resultate und gab ihnen eine wissenschaftliche Ordnung, die man eine glückliche und wohlgelungene nennen darf. Die Theorie blieb aber in der alten Unvollkommenheit. Euler war zu ehrlich, als dass er sich und Andern darüber Täuschungen machen konnte. Im Calcul wurden die Differenzialien nicht anders behandelt, als wären sie wirkliche Nullen. Euler erklärte sie auch als solche. Nun widerspricht aber eine Rechnung mit Nullen dem Wesen der Analysis. Euler nahm daher die Quotienten zweier Differenzialien, oder Null dividirt durch Null, als Rettungsanker für die Theorie. Der Calcul selbst, der rüstig fortschritt, wurde durch diese metaphysischen Subtilitäten nicht berührt.

Nun kamen andere Umschreibungen, die Theorien der Grenzen, welche das Verhältniss der Differenzialien als das Grenzverhältniss endlicher verschwindender Differenzen betrachteten. Aber diese Ansicht verschiebt nur die Schwierigkeit, wie schon La Grange erklärt, denn zuletzt ist doch das Verhältniss ver-

schwindender Differenzen wiederum nur das Verhältniss von Null zu Null.

Alles Bisherige fasste La Grange in seiner berühmten Theorie der Functionen zusammen. Das Verhältniss der Differenzialien giebt jederzeit eine endliche Function, von der man aus dem Calcul auf's Allerbestimmteste weiss, wie man sie findet, wie man sie behandelt, und wie man sie anwendet. Diese Function nennt La Grange die abgeleitete Function, und sie ist es allein, mit der er rechnet. Diese Function ist aber ein Quotient. Was sind Zähler und Nenner dieses Quotienten? Euler sagt: sie sind Nullen; d'Alembert sagt: sie sind die verschwindenden Differenzen; Andere sagen anders; La Grange sagt gar nichts. Dadurch ist nun zwar die Schwierigkeit in den Worten, nicht aber die Schwierigkeit in der Sache überwunden; wenn man nichts sagt, kann man sich zwar nicht versprechen, aber man erklärt auch nichts. Und wenn man hier etwas erklären will, muss man bestimmen können, was die Zähler und die Nenner der Differenzial-Quotienten, also auch was die Differenzialien einzeln sind. Weil La Grange diese umging, musste seine Theorie fallen; sie war schwerfällig in der Anwendung auf Geometrie und Mechanik, und begegnete hier Schwierigkeiten, die diese Anwendung, wenn man nicht zu den Euler'schen Differenzialien und ihren Zeichen flüchten wollte, fast zur Unmöglichkeit machten. Bewunderungswürdig bleibt diese Theorie, weil ihr der Gedanke zu Grunde liegt, im Differenzial-Calcul nur die gewöhnlichen endlichen Grössen der Analysis anzuerkennen.

Seit dieser Zeit hat die Entwicklungsgeschichte keinen Schritt vorwärts gemacht. Es kamen hie und da Ausputzungen und Abrundungen vor, Versuche, die alten Theorien von Leibnitz, von Newton, von d'Alembert auszufüllen und in Worte zuzuspitzen, Versuche, von denen man nicht immer sagen kann, dass sie nicht mehr klug angelegt, als glücklich ausgeführt sind. Bald klammerte man sich an die antike Strenge von La Grange an, bald nahm man es leicht, wie Euler, zuletzt sind auch wieder die verschollenen Begriffe „der letzten Geschwindigkeit des Wachsthums einer Function" an's Tageslicht gekommen.

Diess Alles beweist zweierlei. Erstens, dass man es hier mit einem Problem zu thun hat, dessen theoretische Schwierigkeiten noch nicht gelöst sind, und zweitens, dass die menschliche Ver-

nunft im Ganzen und Grossen noch zu tüchtig und gesund ist, als dass sie sich von falschen Hypothesen lange unterjocht halten liesse. Einzelnen kann diess wohl begegnen, aber im Ganzen schüttelt die Vernunft dieses sonst sanfte Joch ab, auch wenn sie die Wahrheit noch nicht hat, sei es auch nur, um zu beweisen, dass sie die Wahrheit noch nicht hat, dass sie dieselbe erst finden will.

Dieser Zustand der Wissenschaft ist äussert merkwürdig. In der so sichern, so exacten Wissenschaft der Mathematik weiss man auf's Allergewisseste, dass man ganz sichere, ganz unumstössliche Resultate erhält, wenn man nach den Regeln des Differenzial-Calculs verfährt. Warum aber diese Regeln so und nicht anders sind, weiss man nicht zu sagen. Denn wenn man angiebt, dass diese Regeln und Gesetze darum so sind, wie sie sind, weil die Differenzialien unendlich kleine oder verschwindende Grössen, weil sie Null, oder weil sie das Ende der Geschwindigkeit des Wachsthums sind, so sind diess wohl Entschuldigungen oder Bitten, aber nicht Erklärungen. Und diese wollen wir, diese allein nützen der Wahrheit. So ist die Sache beschaffen, so der Kampfplatz, auf den wir nun eintreten werden.

Cap. II.

Zusammenstellung einiger Lehren der niedern Analysis.

§. 7.

Constante und veränderliche Grössen. Bezeichnung der Functionen.

Obgleich der Differenzial-Calcul die ganze niedere Analysis und ihre Lehren als bekannt voraussetzt, so heben wir doch einige dieser Lehren besonders hervor, weil sie im unmittelbaren Zusammenhang mit dem Differenzial-Calcul stehen.

In der Analysis unterscheidet man constante und veränderliche Grössen. Constante Grössen haben einen bestimmten Werth, veränderliche können beliebig viele Werthe annehmen. Es ist bekannt, dass in einem analytischen Ausdruck, in einer Function, nur dann veränderliche Grössen vorkommen können, wenn in ihr wenigstens zwei Grössen enthalten sind, deren Werthe gegenseitig von einander abhängig sind, so dass die eine andere Werthe erhält, wenn man der andern der Reihe nach verschiedene Werthe beilegt. Die letztere nennt man die unabhängig Veränderliche, die erstere die abhängig Veränderliche. Dieser Unterschied ist nicht im Wesen der einen oder andern Grösse begründet, es kann daher beliebig die eine oder andere als unabhängig oder abhängig Veränderliche genommen werden. Beispiele dafür hat man in den sogenannten unbestimmten Gleichungen.

Sind n Gleichungen gegeben, so müssen in ihnen, wie bekannt, wenigstens $(n + 1)$ unbekannte Grössen gegeben sein, damit veränderliche Grössen möglich sind. Denn wären nur n Gleichungen

gegeben, so wären alle n unbekannten Grössen bereits bestimmt; sie hingen nicht mehr einzeln von einander ab, sondern ihre Werthe wären durch die gegebenen n Gleichungen selbst gegeben.

Die veränderlichen Grössen der Functionen bezeichnet man durch die letzten Buchstaben des Alphabets, x, y, z, v, w . ., die constanten durch die Anfangsbuchstaben a, b, c, e . ., wobei man vermeidet, den Buchstaben d zu gebrauchen.

Wird jedoch die Natur eines Problems geändert, oder werden mitten in der Untersuchung andere Gesichtspunkte eingeführt, dann können auch die einmal gebrauchten Grössen a, b, c . . die veränderlichen, und x, y, z . . die constanten Grössen des Problems bezeichnen, es ist nicht nothwendig, dass desswegen die Bezeichnungsart von Grund aus geändert werde. Doch muss diess jedesmal bemerkt werden; ohne solche ausdrückliche Bemerkung bezeichnen x, y, z . . die veränderlichen, und a, b, c . . die constanten Grössen einer Function.

Die veränderlichen Grössen sind entweder continuirlich oder discontinuirlich veränderlich. Continuirlich veränderlich ist eine Grösse (fx) zwischen den Werthen $x = a$ und $x = b$, wenn a und b Werthe von (fx) geben, und wenn zwischen a und b keine Grösse liegt, die nicht zugleich einen Werth von (fx) gäbe. Die Grösse (fx) ist hingegen zwischen $x = a$ und $x = b$ discontinuirlich, wenn zwar a und b Werthe von fx, aber die Werthe zwischen a und b nicht zugleich Werthe von fx geben. So ist z. B. in $fx = y = \sqrt{\alpha x + \beta x^2}$ die Grösse y für alle negativen Werthe von x discontinuirlich veränderlich, für welche $\alpha x > \beta x^2$ $\alpha > \beta x$, $x < \frac{\alpha}{\beta}$ ist.

Die Functionen der Grössen selbst werden durch die vorgesetzten Buchstaben: f, F, φ, ψ . . bezeichnet, so dass fx, φy, $F(x^2, y, z, a)$ . . Functionen bezeichnen, in denen beziehungsweise der Ausdruck durch x, durch y, durch x^2 und y und z und a bestimmt sind. Nur solche Functionen, die in allen Beziehungen gleich sind, dürfen durch das gleiche Zeichen bezeichnet werden, z. B. x^u und y^u, beide durch fx, fy.

§. 8.

Ueber die complexen Grössen.

Die Betrachtung der discontinuirlichen Grössen führt uns auf die imaginären oder complexen Grössen von der Form $\alpha \pm \beta \sqrt{-1}$. Der Differenzial-Calcul, als ein Theil der allgemeinen Analysis, kann natürlich die complexen Grössen nicht ausschliessen. Da jedoch bekannt ist, dass die Operationen der Addition, der Subtraction, der Multiplication und Division, der Potenzirung, der Logarithmen und die Operationen der goniometrischen und cyklometrischen Functionen für complexe Grössen den nämlichen Gesetzen unterworfen sind, wie für reelle Grössen, so ist es nicht nothwendig, diese Lehren hier besonders zu wiederholen. Bemerkt wird nur, dass die complexen Grössen für sich continuirlich sind, gerade wie die reellen Grössen für sich, und dass die Discontinuität nur beim Uebergang von reellen zu complexen Grössen eintritt, und umgekehrt.

Was sind aber die complexen Grössen? Sie sind nichts anders, als was sie durch ihr Zeichen zu erkennen geben, Grössen, in denen eine nicht ausführbare Operation enthalten ist. Sie sind daher in Bezug auf die reellen Grössen wahrhaft unmögliche Grössen, gerade so, wie die reellen Grössen in Bezug auf die complexen Grössen nur specielle Grössen sind.

Da die Sache den Differenzial-Calcul nicht näher berührt, so können wir uns hier kurz fassen.

In neuerer Zeit begegnet man häufig der Ansicht, dass man die imaginären Grössen für reelle Grössen nimmt, und sie darum laterale Grössen nennt. Gauss hat gezeigt, dass, wenn $\pm a$ die Punkte einer geraden Linie ausdrücken, die Grössen $\pm b\sqrt{-1}$, $a+b\sqrt{-1}$, $a-b\sqrt{-1}$, etc. rechts und links von der geraden Linie in der Ebene liegende Punkte bezeichnen. Diese Punkte hat man für reelle Punkte dieser Ebene genommen. Diess ist nicht ganz richtig, und man vergisst dabei eine Hauptsache. Die Wahrheit ist, dass, wenn man die unmögliche Voraussetzung macht, dass alle Punkte einer Ebene zugleich Punkte einer in ihr liegenden geraden Linie sind, diese Punkte der imaginirten allgemeineren

geraden Linie durch $+a$, $-a$, $\pm b\sqrt{-1}$, $a\pm b\sqrt{-1}$ etc. ausgedrückt werden können, worin nur die Punkte $(\pm a)$ reell sind, die in der von aller Imagination befreiten reellen Linie selbst liegen. Weil aber die Voraussetzung Unmögliches in sich schliesst, sind auch die dieser unmöglichen Voraussetzung entsprechenden Grössen vollkommen imaginär. Diess schadet jedoch nichts. Kann man diese Punkte in den viel leichteren Operationen der Linie etwa durch blosse Addition bestimmen, $(a+b\sqrt{-1})+(h-k\sqrt{-1})=(a+h)+(b-k)\sqrt{-1}$, während die Bestimmung durch die Ebene viel schwieriger ist, und etwa der Trigonometrie bedarf, so zieht man die leichtere Rechnung mit imaginären Grössen vor, weil man am Ende immer die Resultate für die imaginär erweiterte Linie in die reellen Werthe der wirklichen Ebene übersetzen kann. Die Regeln dieser Uebersetzung müssen natürlich vorher ermittelt sein. Die gesuchten Punkte coincidiren, und es ist einerlei, wie man sie gefunden hat, ob als Punkte einer imaginären Linie, oder als Punkte einer wirklichen Ebene. Das ist die ganze Sache. Aber zu glauben, dass die reellen Punkte einer reellen Ebene unmittelbar, und ohne Uebersetzung aus der Linie in die Ebene, durch imaginäre Ausdrücke gegeben werden können, das kann Keinem einfallen.

Dieselbe Bewandtniss hat es, wenn man, wie mit Recht geschehen ist, den imaginären Grössen eine allgemeinere als bloss planimetrische Bedeutung beilegt. Sie haben in der That, je nachdem die Probleme beschaffen sind, analytische, arithmetische, geometrische oder mechanische Bedeutung. Aber auch allgemein sind sie nur imaginäre Grössen, d. h. wirkliche Werthe eines Ausdrucks, der durch Imagination zu einer Allgemeinheit erweitert ist, die ihm nicht zukommt. Diess thut man, weil dadurch die Operationen leichter werden. Und da am Ende die Werthe aus den Ausdrücken der imaginären in Ausdrücke der reellen Grössen übersetzt werden können, so gewinnt man sehr viel durch diese Imagination. Billig darf man sich darüber wundern, dass die Sicherheit der mathematischen Operationen so weit reicht. Auch macht die Einführung der imaginären Grössen einen viel allgemeineren Calcul möglich, von dem der Calcul mit den reellen Grössen nur ein besonderer Fall ist.

Die Anwendungen der imaginären Grössen sind vielfach.

Werden z. B. Kräfte durch Linien ausgedrückt, und macht man die Imagination, dass die Linien *am* und *ar* in der Normal-Linie *ab* liegen, so summiren sich, nach einem bekannten Lehrsatz, die Kräfte, die nach derselben Richtung (Linie) wirken.

Nun wird *am* durch $\alpha + \beta\sqrt{-1}$

ar durch $\pm\gamma \pm\delta\sqrt{-1}$ ausgedrückt, und

am + *ar* ist gleich $(\alpha \pm \gamma) + (\beta \pm \gamma)\sqrt{-1}$, was sehr leicht gefunden wird.

Diess, in die Sprache der reellen Grössen übersetzt, heisst: Die Resultante zweier unter einem Winkel gemeinschaftlich wirkender Kräfte ist gleich der Diagonale des Kräftenparallelogramms.

Das Imaginäre besteht darin, dass man die Linien *am* und *ar* als in der Linie *ab* liegend denkt, was eine Unmöglichkeit ist, die sich also durch complexe Grössen ausdrückt. Aber wegen dieser Imagination ist es erlaubt, die Linien *am* und *ar* als complexe Grössen einfach zu addiren, was eine grosse Erleichterung ist.

So viel über die complexen Grössen. Die allgemeine Theorie des Differenzial-Calculs wird durch die Ansichten, die man so oder anders von den imaginären Grössen haben kann, nicht berührt. Nur bei besonderen Untersuchungen über singuläre Werthe einer Function und ihrer Differenzialien werden wir auf sie stossen, und um dann nicht im Einzelnen die nöthigen Bemerkungen wiederholen zu müssen, haben wir sie hier im Allgemeinen vorausgeschickt.

§. 9.

Convergenz und Divergenz der Reihen.

Ferner werden alle Lehrsätze über die Convergenz der Reihen, die einen Gegenstand der niedern Analysis bilden, ebenfalls vorausgesetzt. Dabei wird bemerkt, dass Reihen, welche aus richtigen Operationen hervorgegangen sind, auch wenn sie nicht convergiren, als in allen einzelnen Gliedern richtige Reihen anerkannt werden. Solche Reihen sind nicht unrichtig, wohl aber unbrauchbar. Kennt man den ihnen entsprechenden Ausdruck nicht, so kann man mit ihnen nichts anfangen, da man aus ihnen selbst nicht weiss, ob sie einer reellen oder einer complexen Grösse entsprechen. Kennt man aber den einer Reihe entsprechenden Ausdruck, z. B.

$$1+\mu x+\mu\,.\,\mu-1\frac{x^2}{2}+\mu\,.\,\mu-1\,.\,\mu-2\frac{x^2}{2.3}+\ldots=(1+x)^\mu,$$

eine Reihe, die für $x>1$ divergirt, so weiss man, dass sie zu einer reellen Grösse $(1+x)^\mu$ gehört, dass sie aber zur Berechnung dieser reellen Grösse selber unbrauchbar ist. Wir würden das nicht erinnern, wenn man nicht so häufig fände, dass unbrauchbare Reihen mit unrichtigen verwechselt werden, dass man unbrauchbare Reihen schlechthin unrichtige nennt. Unrichtige Reihen sind solche, deren einzelne Glieder falsch sind, und die entweder aus Operationsfehlern oder aus falschen Voraussetzungen hervorgehen.

Die Lehren der Convergenz entscheiden nur darüber, ob eine Reihe brauchbar oder unbrauchbar sei, aber ob eine Reihe richtig oder unrichtig sei, das muss aus ganz andern Criterien entschieden werden.

Ausser dem Vorhergehenden behandeln wir noch folgende Lehrsätze über die Reihen, die mit dem Differenzial-Calcul in näherer Beziehung stehen.

§. 10.

Lehrsatz I.

Ist in der unendlichen nach aufsteigenden ganzen und positiven Potenzen von x geordneten Reihe

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ a_\nu x^n+a_{\nu+1}x^{n+1}+\ldots$$

keiner der Coefficienten a_0, $a_1\ldots a_\nu$ unendlich gross, und bleibt die Veränderliche y für beliebig kleine Werthe von x continuirlich, so ist für unendlich viele endliche Werthe von x jedes vorhergehende Glied dieser Reihe grösser als die Summe aller nachfolgenden Glieder.

Beweis. Man nehme das allgemeine Glied $a_\nu x^n$, so ist für entsprechende Werthe von x,

$$a_\nu x^n>a_{\nu+1}x^{n+1}+a_{\nu+2}x^{n+2}+\ldots\ a_{\nu+\varrho}x^{n+r}+\ldots$$

Denn dividirt man durch x^n, so erhält man:

$$a_\nu > x\left(a_{\nu+1} + a_{\nu+2}x + \ldots\ a_{\nu+\varrho}x^{n-1+r} + \ldots\right)$$

Die in Klammern eingeschlossene Reihe gebe, da der Voraussetzung nach kein Coefficient unendlich gross ist, und x beliebig klein sein kann, die endliche Summe S, so ist

$$a_\nu > xS$$

was auch wirklich der Fall ist für alle Werthe von x, die xS kleiner als a_ν machen, d. h. für $x < \frac{a_\nu}{S}$.

Solche Werthe von x giebt es immer unendlich viele, von $x = \frac{a_\nu}{S}$ bis $x = 0$.

Zusatz 1. Eine Folge davon ist, dass für beliebig kleine Werthe von x in der Reihe

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ a_\nu x^n + a_{\nu+1}x^{n+1} + \ldots$$

das Zeichen des ersten Gliedes zugleich das Zeichen der ganzen Function y ist. Denn ist z. B. a_0 positiv, so ist die Summe aller nachfolgenden Glieder kleiner als a_0, und die ganze Reihe y muss positiv sein. Entsprechendes gilt, wenn a_0 negativ ist.

Sind die Coefficienten a_0, a_1, $a_2 \ldots a_{\nu-1}$ einzeln gleich Null, so ist unter den ausgesprochenen Voraussetzungen das Zeichen des Gliedes $a_\nu x^n$ das Zeichen der ganzen Reihe von y, denn $a_\nu x^n$ bleibt grösser als die Summe aller nachfolgenden Glieder.

Zusatz 2. Eine weitere Folge ist, dass es immer Werthe von x giebt, für welche auch ein aliquoter endlicher Theil jedes vorhergehenden Gliedes grösser bleibt als die Summe aller nachfolgenden Glieder.

Denn ist für $x = \xi$

$$a_0 > a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots\ a_\nu\xi^x + \ldots$$

so ist, wenn man auf beiden Seiten durch m dividirt:

$$\frac{a_0}{m} > \frac{a_1\xi}{m} + \frac{a_2\xi^2}{m} + \ldots\ \frac{a_\nu\xi^n}{m} + \ldots$$

Nimmt man nun einen Werth $x = \frac{\xi}{m} = x$, und substituirt ihn, so folgt:

$$\frac{a_0}{m} > a_1 x + m a_2 x^2 + m^2 a_3 x^3 + \ldots m^{n-1} a_\nu x^n + \ldots$$

Da m eine ganze Zahl ist, so ist um so mehr

$$\frac{a_0}{m} > a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots a_\nu x^n + \ldots$$

was zu beweisen war.

Ganz auf dieselbe Art wird der Beweis für jedes nachfolgende Glied geführt.

§. 11.

Lehrsatz II. Gleichheit und Identität zweier Reihen.

Zwei Reihen, die für eine und dieselbe Function y nach ganzen positiven und aufsteigenden Potenzen einer Veränderlichen x geordnet sind, die also auch für alle Werthe von x gleich sind, sind vollkommen identisch, d. h. es müssen auch die entsprechenden Coefficienten in beiden Reihen einzeln einander gleich sein, vorausgesetzt, dass keiner der Coefficienten a_0, a_1, a_2 .. unendlich gross ist, und dass die Function y auch für beliebig kleine Werthe von x und innerhalb eines die Null einschliessenden Intervalls continuirlich bleibt.

Erläuterung 1. Solche Functionen, die für alle und unendlich viele Werthe von x einander gleich, wenn auch nicht der Form nach identisch sind, giebt es immer.

So ist z. B.

$$(1+x)^2 = 1+2x+x^2;\ (1 \pm x)^3 = 1 \pm 3x + 3x^2 \pm x^3, \text{ etc.};$$

$$log\,(1+x)^n = n\,log\,(1+x);\ sin\,(a+x) = sin\,a\,cos\,x + cos\,a\,sin\,x, \text{ etc.}$$

Diese Functionen sind für alle Werthe von x einander gleich. Solche der Form, d. h. den Operationen nach verschiedene Ausdrücke für eine und dieselbe Function y lernt man im ersten Theile der Analysis, in der Operationslehre kennen, und es giebt ihrer immer unendlich viele. Diess muss darum bemerkt werden, weil es nicht selten so dargestellt wird, als ob man es dem blossen Zufall oder einem ganz besondern Kunstgriffe zu danken habe, wenn man auf einen solchen Ausdruck kommt.

Erläuterung 2. Functionen, die für beliebig kleine Werthe von x continuirlich bleiben, giebt es immer. So ist: $(a+x)^n$ für $x=0$, gleich a^n; $log\,(a+x)$ für $x=0$, gleich $log\,a$. U. s. w.

Werden Ausdrücke für $x = 0$ discontinuirlich, wie $\frac{1}{x}$, $log\, x$, $cotg\, x$, . . so führt man andere veränderliche Grössen in Verbindung mit Constanten ein, und dann bleiben sie für ein die Null einschliessendes Intervall continuirlich. Setzt man z. B. $a + z$ für x, so gehen $\frac{1}{x}$, $log\, x$, $cotg\, x$ in $\frac{1}{a+z}$, $log\,(a+z)$, $cotg\,(a+z)$ über, und diese werden für $z = 0$ beziehungsweise $\frac{1}{a}$, $log\, a$, $cotg\, a$, und bleiben also continuirlich. Der oben ausgesprochene Satz gilt dann für eine nach der Veränderlichen z entwickelte Reihe.

Nach diesen Erläuterungen gehen wir zum Beweise über.

Beweis. Es sei die Function y in zwei Reihen entwickelt:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots a_\nu x^n + \ldots$$

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots \alpha_\nu x^n + \ldots$$

Werden diese Ausdrücke subtrahirt und nach den aufsteigenden Potenzen von x geordnet, so folgt:

$$0 = (a_0 - \alpha_0) + (a_1 - \alpha_1) x + (a_2 - \alpha_2) x^2 + \ldots (a_\nu - \alpha_\nu) x^n + \ldots$$

Nach Lehrsatz I. ist für beliebig kleine Werthe von x das Zeichen des ersten Glieds $(a_0 - \alpha_0)$ zugleich das Zeichen der ganzen Reihe. Wäre nun $(a_0 - \alpha_0)$ positiv, so müsste die ganze Reihe eine positive Grösse sein; wäre $(a_0 - \alpha_0)$ negativ, so müsste die ganze Reihe eine negative Grösse sein. Nun ist aber die ganze Reihe gleich Null, es kann daher $(a_0 - \alpha_0)$ weder positiv noch negativ, sondern muss selbst gleich Null sein.

Nun bleibt:

$$0 = (a_1 - \alpha_1) x + (a_2 - \alpha_2) x^2 + \ldots (a_\nu - \alpha_\nu) x^n + \ldots$$

Nach Lehrsatz I. ist das Zeichen von $(a_1 - \alpha_1) x$ zugleich das Zeichen der ganzen Reihe. Nun ist die ganze Reihe gleich Null, es kann daher $(a_1 - \alpha_1) x$ weder positiv noch negativ, sondern muss selbst gleich 0 sein, und da x eine positive oder negative endliche Grösse ist, so muss der Coefficient $(a_1 - \alpha_1)$ gleich Null sein.

Ganz auf dieselbe Art wird der Beweis für alle nachfolgenden Glieder ausgeführt.

Wir haben daher die Gleichungen:

$$a_0 - \alpha_0 = 0,\ a_0 = \alpha_0$$
$$a_1 - \alpha_1 = 0,\ a_1 = \alpha_1$$
$$a_2 - \alpha_2 = 0,\ a_2 = \alpha_2$$
$$a_\nu - \alpha_\nu = 0,\ a_\nu = \alpha_\nu$$

u. s. w.

Die entsprechenden Coefficienten der beiden Reihen sind daher einzeln einander gleich.

Zusatz 1. Der bewiesene Satz,

$$(a_0 - \alpha_0) + (a_1 - \alpha_1)x + (a_2 - \alpha_2)x^2 + \ldots (a_\nu - \alpha_\nu)x^n + \ldots$$
$$=$$
$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots A_n x^n + \ldots$$

gilt nur so, wie er bewiesen ist. Er gilt also überhaupt nur für Functionen, in denen die Variable x beliebig viele Werthe hat, oder in so weit sie beliebig viele Werthe haben kann. Hätte man hingegen Reihen, in denen die Variable x nur einen oder nur eine bestimmte Anzahl von Werthen hätte, so würde der Satz für diese Reihe nicht gelten. So gilt er z. B. nicht für die endliche Reihe $A_0 + A_1 x = 0$, denn diese ist eine Gleichung des ersten Grades, und x hat nur einen Werth. Er gilt nicht für die Gleichung des $n$ten Grades:

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots A_\nu x^n = 0,$$

denn in ihr hat x nur n, und nicht beliebig viele Werthe.

Nur dann, wenn man eine Reihe hat, in der die Veränderliche x beliebig viele und auch beliebig kleine und beliebig grosse Werthe haben kann, gilt der Satz, dass, wenn die ganze Reihe gleich Null, auch die Coefficienten einzeln gleich Null sind.

Ein wenig Nachdenken kann uns von der Richtigkeit dieses Satzes überzeugen. Denn wären alle solche Reihen ohne Unterschied gleich Null, so müssten einerseits die Coefficienten aller algebraischen Gleichungen einzeln gleich Null sein, und andrerseits müssten alle algebraischen Gleichungen und Reihen unendlich viele Werthe von x haben, da der Beweis in der That darauf beruht, dass man der Veränderlichen x beliebig viele und beliebig kleine Werthe geben kann. Dadurch würde man aber mit aner-

kannten Lehren der Analysis in Widerspruch kommen. Der Satz gilt also nur unter den Bedingungen, unter denen er ausgesprochen und bewiesen ist, wie sich von selbst versteht.

Ich würde diess nicht erwähnt haben, wenn nicht aus solchem Missverständniss Einwürfe gegen diesen Satz erhoben worden wären.

Zusatz 2. Der Beweis geht darauf zurück, dass x zwar endlich, aber beliebig gross und auch beliebig klein genommen werden könne, d. h. dass die Function innerhalb eines die Null umfassenden Intervalls continuirlich bleibt. Solche Reihen gelten daher nicht für Functionen, welche für ein die Null umfassendes Intervall discontinuirlich werden, also z. B. nicht für $\frac{1}{x}$, $log\, x$, $cotg\, x$ etc. In der Erläuterung 2. haben wir gezeigt, wie dennoch durch leichte Aenderung und Einführung einer Constante solche Functionen auch für ein die Null einschliessendes Intervall continuirlich gemacht werden können. Es ist daher kein Wunder, dass man auf Widersprüche gekommen ist, wenn man dennoch für solche Functionen, wie für $\frac{1}{x}$, $log\, x$, $cotg\, x$ etc. jene Reihen entwickeln wollte.

Zusatz 3. Im Beweise selbst haben wir niemals zum Werthe $x = 0$ unsre Zuflucht genommen, wie Des-Cartes und nach ihm Andere gethan haben. Der Beweis wäre vielleicht kürzer geworden, wenn wir sogleich $x = 0$ hätten nehmen wollen. Allein nach dem Schema dieses Beweises wird durch x dividirt, und dann könnte immer noch der Zweifel erhoben werden, ob für $x = 0$ der Ausdruck $\frac{x}{x} = \frac{0}{0}$ gleich 1 sei, wie im Beweise angenommen werden muss. Wohl aber ist für endliche, wenn auch beliebig kleine Werthe von x jederzeit $\frac{x}{x} = 1$. Dadurch wird der Beweis ungleich fester, ja unerschütterlich.

§. 12.

Lehrsatz III. Entwicklung der analytischen Functionen in Reihen.

Jede analytische Function kann entweder unmittelbar oder mittelbar durch Einführung einer Constante oder durch andere Modi-

fication der Veränderlichen in eine nach ganzen positiven und aufsteigenden Potenzen der Veränderlichen x geordnete endliche oder unendliche Reihe entwickelt werden.

Beweis. 1) Jede Function hat eigenthümliche Operationen, durch welche immer Ausdrücke gegeben sind, die für alle Werthe der Veränderlichen x gleich bleiben. So ist z. B. $\left((a+b)^m\right)^n = \left((a+b)^n\right)^m$; $log\,(a+x)^m = m\,log\,(a+x)$ etc. Dadurch hat man immer je zwei Ausdrücke, die aus verschiedenen Operationen hervorgehen, wodurch sich Gleichungen bilden, die nicht tautologisch sind, so dass aus ihnen die Coefficienten der aufeinanderfolgenden Glieder abgeleitet werden können.

2) Jede Function bleibt entweder unmittelbar, oder mittelbar, durch Einführung einer beliebigen Constante, $x = c + z$, oder durch Abänderung der Variablen, z. B. $y = \left(\frac{1}{\alpha+\eta}\right)$ in einem die Null einschliessenden Intervalle der veränderlichen Grösse continuirlich.

3) Jede Function hat einen bestimmten Ausdruck, also auch für einen bestimmten Werth ihrer Grössen ebenfalls einen bestimmten Werth. Wird x beliebig klein genommen, so convergirt die Reihe nach den Criterien der Convergenz, wenn sie nach aufsteigenden ganzen und positiven Potenzen von x entwickelt werden kann. Und weil sie convergirt, so kann keiner der Coefficienten a_0, a_1, a_2, a_ν .. unendlich gross sein.

4) In der zu entwickelnden Reihe kann aber keine negative Potenz der Veränderlichen vorkommen. Denn käme z. B. $Mx^{-m} = \frac{M}{x^m}$ vor, so würde diess Glied für beliebig kleine Werthe von x beliebig gross, und würde ein Glied der Reihe beliebig gross, so bliebe die Function für beliebig kleine Werthe von x nicht continuirlich, was gegen die Voraussetzung ist.

5) Eben so wenig können gebrochene Exponenten der veränderlichen Grösse x vorkommen. Denn solche gebrochene Exponenten der Veränderlichen würden in die Reihe mehr Wurzeln, d. h. mehr Werthe von x bringen, als in der Function selbst sind, wie La Grange in seinem berühmten Lehrsatz, den er an die Spitze seiner Theorie der Functionen stellt, weiter ausführt. Wir erhielten daher eine Gleichung, in der die eine Seite (die Function)

etwa ν Wurzeln, und die andere Seite, die nach einer Reihe entwickelte Function, $\nu + \varrho$ Wurzeln hätte, was unmöglich ist.

Zusatz 1. Unterlässt man, durch apriorische Erwägungen nachzuweisen, dass die Exponenten der Veränderlichen ganze positive Zahlen sein müssen, und bildet man allgemein die Reihe

$$y = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \ldots$$

so giebt die Entwicklung eines jeden einzelnen Beispiels, dass $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ wirklich ganze positive Zahlen sind. Diess scheint viel allgemeiner zu sein, ist es aber nicht; denn einzelne Beispiele, z. B. die potenzielle, logarithmische Function etc., beweisen noch nicht die Allgemeinheit. Auch fehlt dabei die Einsicht in die allgemeine Nothwendigkeit dieser Formen der Exponenten.

Zusatz 2. Bildet man die apriorische Reihe:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots a_\nu x^n + \ldots$$

so heisst diess noch nicht dem Bildungsgesetze der einzelnen Reihen vorgreifen. Denn fallen z. B. für einzelne Functionen die Glieder weg, deren Exponenten gerade Zahlen sind, so ergiebt sich eben, dass $a_0, a_2, a_4 \ldots$ gleich Null sind.

Dadurch, dass die Glieder mit allen aufeinanderfolgenden Exponenten der Veränderlichen angeschrieben werden, wird dem Bildungsgesetz der einzelnen Reihen in keiner Weise vorgegriffen.

Zusatz 3. Der Beweis des Lehrsatzes III. stützt sich auf Lehrsatz II., der gewöhnlich die Methode des unbestimmten Coefficienten genannt wird. Der Name ist nicht ganz richtig.

Uebrigens stützt sich jede andere Beweisführung auf die nämliche Methode, wenn es auch öfters geschieht, dass die Sache verhüllt wird oder unaufgedeckt bleibt, und dann anders aussieht, als sie wirklich ist. So haben z. B. Euler und La Grange, die sehr strenge beweisen, die nämliche Methode befolgt, wenn auch unter anderm Namen.

Wird z. B. der binomische Lehrsatz daraus abgeleitet, dass die Function: $(p + x + u)^n$ einmal als: $\Big(p + (x + u)\Big)^n$, in welchem $(x + u)$ als Summe zusammengenommen, und das andremal als: $\Big((p + x) + u\Big)^n$, in welchem $(p + x)$ als Summe zusammengenommen wird, entwickelt wird, so heisst diess nichts anders, als für

eine und dieselbe Grösse $(p+x+u)^n$ zwei Reihen ableiten. Euler und La Grange setzen dann die beiderseitigen Coefficienten, die zur ersten Potenz von x gehören, einander gleich, als ob sich diess von selbst verstünde. Diess ist aber nichts anders, als was in unserm Lehrsatze allgemein bewiesen ist, dass alle Coefficienten, die zu gleichen Potenzen von x gehören, in beiden Reihen einander gleich sind, und zwar nicht bloss für potenzielle, sondern für jede beliebige Function.

Umgeht man den allgemeinen Lehrsatz, so kann man sich auf einzelne Glieder einschränken. Doch ist es unstreitig besser, den Beweis allgemein zu führen, schon darum, weil man dann einsieht, unter welchen Bedingungen der Satz überhaupt gilt. — Für die Potenz: $(a+x)^n$ braucht man freilich nicht hinzuzusetzen, dass die Function für beliebig kleine Werthe von x continuirlich bleiben müsse, denn diess versteht sich hier von selbst, da $(a+x)^n$ für $x=0$ in a^n übergeht. Aber indem man diesen allgemein nothwendigen Zusatz nicht macht, vergisst man endlich ganz darauf, geht dann zu andern Functionen über, die nicht unmittelbar die Eigenschaft der Potenzen haben, und kommt endlich glücklich auf Widersprüche, die man für etwas besonders Wichtiges ansieht.

Eben so beweist La Grange seinen berühmten Lehrsatz, den er an die Spitze seiner Theorie der Functionen setzt (den Taylor'schen Satz) dadurch, dass er die Function: $f(x+h+k)$ einmal als $f\big((x+h)+k\big)$, und das andremal als $f\big(x+(h+k)\big)$ ableitet, so dass er einmal $(x+h)$, und das andremal $(h+k)$ als Summe zusammennimmt. Das heisst aber nichts anders, als für dieselbe Function zwei Reihen ableiten, deren entsprechende Coefficienten dann — ohne Beweis — einander gleich gesetzt werden. Da ist es doch besser, diess sogleich in einem allgemeinen Lehrsatze zu beweisen, und die Sache auszusprechen, wie sie ist.

Wer in den Geist der mathematischen Methode eingedrungen ist, wird überhaupt leicht einsehen, dass man keine andern Hilfsmittel haben könne, als dass man zwei verschiedene Werthe für eine und dieselbe Grösse entwickelt. Denn darin besteht ja das Wesen der Mathematik, und dadurch allein werden Gleichungen gebildet, die nicht tautologisch sind, sondern die sich der Form nach unterscheiden, so dass man in den Stand gesetzt wird, aus ihnen

das Gesuchte abzuleiten. Diess Wesen kann man wohl für einzelne Fälle singularisiren, aber man verdeckt dadurch nur, was man in allgemeinen Lehrsätzen so offen als möglich machen sollte, damit es ganz klar erläutert und ganz streng bewiesen werde.

Zusatz 4. Durch den Lehrsatz ist nicht ausgeschlossen, dass es auch Reihen der Functionen geben könne, in welchen die veränderliche Grösse mit negativen Exponenten vorkommt, wie es wirklich solche Reihen giebt, z. B. für *cotg* x, *arc sec.* x, *arc. cosec.* x etc. In diesem Falle sind die Bedingungen anders, als wie sie im Lehrsatze ausgesprochen sind, wie denn der Lehrsatz überhaupt nur gilt, wenn jene Bedingungen festgehalten werden.

§. 13.

Anwendung der obigen Sätze auf die Reihen-Entwicklung der Functionen.

Erläuterungen: 1) Bei dieser Entwicklung beschränken wir uns auf die Urfunctionen; denn sind diese einmal bekannt, so können die aus ihnen zusammengesetzten Functionen ohnehin nach den gewöhnlichen Regeln abgeleitet werden.

2) Bei der wirklichen Ableitung der Reihen giebt es immer unendlich viele Gleichungen, die für alle Werthe der Veränderlichen gleich sind, z. B.

$$(1+x)^2 = 1+2x+x^2,\ \ (1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3,\ \text{etc.}$$

Man hat die Wahl zwischen ihnen, und es ist willkührlich, welche man wählt. Sie geben alle das nämliche Resultat. Wir werden für alle Functionen die einfachsten und leichtesten Gleichungen wählen.

§. 14.

I. Entwicklung der Reihe $(1+x)^n$, welche Grösse auch n sein möge.

Die Gleichung, die wir zu dieser Entwicklung wählen, ist folgende:

$$(1+x)^2 = 1+2x+x^2$$

Es ist daher allgemein: $(1+x)^{2n} = (1+2x+x^2)^n$

oder: $$\left((1+x)^n\right)^2 = (1+2x+x^2)^n$$

welche Grösse auch n sein möge, rational oder irrational, reell oder imaginär.

Entwickelt man daher eine Reihe für $(1+x)^n$, und erhebt diese zur zweiten Potenz, d. h. multiplicirt man diese mit sich selbst, so erhält man das Nämliche, als wenn man eine Reihe für $(1+2x+x^2)^n$ entwickelt.

Ist nun die Reihe für $(1+x)^n$:

$$(1+x)^n = a_0 + a_{'}x + a_{''}x^2 + a_{'''}x^3 + a_{''''}x^4 + \ldots$$

so ist:

$$(1+x)^n \times (1+x)^n = a_0^2 + 2a_0a_{'}x + 2a_0a_{''}\left\{x^2 + 2a_0a_{'''}\right\}x^3 + \ldots$$

(A) $$+\ a_{'}^2 \quad \left\{\ +2a_{'}a_{''}\right\}$$

und:

$$(1+2x+x^2)^n = a_0 + a_{'}(2x+x^2) + a_{''}(2x+x^2)^2 + a_{'''}(2x+x^2)^3 + \ldots$$

oder die Klammern gelöst, und die zu gleichen Potenzen von x gehörigen Glieder zusammengefasst:

$$(1+2x+x^2)^n = a_0 + 2a_{'}x + a_{'}\left\{x^2 + 4a_{''}\right\}x^3 + \ldots$$

(B) $$+4a_{''}\quad \left\{\ +8a_{'''}\right\}$$

Da nun die Reihen (A) und (B) für alle Werthe von x einander gleich sind, so sind auch ihre entsprechenden Coefficienten einzeln einander gleich, und wir haben die Gleichungen:

1) $a_0^2 = a_0$ oder $a_0 \quad 1$

2) $2a_0a_{'} = 2a_{'}$ oder $a_{'} = a_{'}$

3) $2a_0a_{''} + a_{'}^2 = a_{'} + 4a_{''}$ oder $a_{'}^2 - a_{'} = 2a_{''}$

$$a_{''} = \frac{a_{'}(a_{'}-1)}{2}$$

4) $2a_0a_{'''} + 2a_{'}a_{''} = 4a_{''} + 8a_{'''}$ oder

$$6a_{'''} = 2a_{'}a_{''} - 4a_{''} = 2a_{''}(a_{'}-2) = a_{'}(a_{'}-1)\ (a_{'}-2)$$

$$a_{'''} = \frac{a_{'}(a_{'}-1)\ .\ (a_{'}-2)}{2\ .\ 3}$$

U. s. w.

Wir erhalten daher die Reihe:

$$(1+x)^n = 1 + a_{,}\,x + a_{,}\,.\,a_{,}-1\,.\,\frac{x^2}{2} + a_{,}\,.\,a_{,}-1\,.\,a_{,}-2\,.\,\frac{x^3}{2.3} + \ldots$$

Der Coefficient a_1 hängt vom Exponenten n ab. Dieser Coefficient ist allerdings noch zu bestimmen. Eben so ist das Bildungsgesetz der Reihe ganz allgemein zu beweisen. Da wir diesen Satz im nachfolgenden Capitel besonders behandeln werden, so können wir hier das Weitere übergehen.

§. 15.

II. Entwicklung der logarithmischen Reihe: $^a log\,(1+x)$.

Wir wählen die Gleichung:

$$^a log\,(1+x)^2 = {}^a log\,(1+2x+x^2)$$

oder: $$2\,{}^a log\,(1+x) = {}^a log\,(1+2x+x^2)$$

Ist die Reihe $^a log\,(1+x)$

$$= a_0 + a_{,}\,x + a_{,,}\,x^2 + a_{,,,}\,x^3 + a_{,,,,}\,x^4 + \ldots$$

so ist $2\,{}^a log\,(1+x)$

$$\text{(A)} \qquad = 2a_0 + 2a_{,}\,x + 2a_{,,}\,x^2 + 2a_{,,,}\,x^3 + 2a_{,,,,}\,x^4 + \ldots$$

und $^a log\,(1+2x+x^2)$

$$= a_0 + a_{,}\,(2x+x^2) + a_{,,}\,(2x+x^2)^2 + a_{,,,}\,(2x+x^2)^3 + a_{,,,,}\,(2x+x^2)^4 + \ldots$$

oder wenn man die Potenzirung von $(2x+x^2)$ vollzieht, und die zu gleichen Potenzen von x gehörigen Glieder zusammennimmt:

$$^a log\,(1+2x+x^2) = a_0 + 2a_{,}\,x + \left.\begin{matrix} a_{,} \\ +4a_{,,} \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} 4a_{,,} \\ +8a_{,,,} \end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix} a_{,,} \\ +12a_{,,,} \\ +16a_{,,,,} \end{matrix}\right\} x^4 + \ldots$$

$$\text{(B)}$$

Die zu gleichen Potenzen von x gehörigen Coefficienten der beiden Reihen (A) und (B) sind einzeln einander gleich. Es ist daher:

1) $2a_0 = a_0$; $a_0 = 0$;

2) $2a_{,} = 2a_{,}$; $a_{,} = a_{,}$ (noch unbestimmt);

3) $2a_{II} = a_{I} + 4a_{II}$; $a_{II} = -\frac{1}{2}a_{I}$;

4) $2a_{III} = 4a_{II} + 8a_{III}$; $a_{III} = +\frac{1}{3}a_{I}$;

5) $2a_{IIII} = a_{II} + 12a_{III} + 16a_{IIII}$; $a_{IIII} = -\frac{1}{4}a_{I}$;

u. s. w.

Wir erhalten demnach die Reihe:

$$^{a}log\,(1+x) = a_{I}\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + ..\right)$$

Der noch unbestimmte Coefficient a_1 hängt von der Grundzahl des Logarithmen-Systems ab. Nimmt man e als Grundzahl des natürlichen Logarithmen-Systems, so wird $a_1 = 1$, und die Reihe ist:

$$^{e}log\,(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + ..$$

Diese Reihe ist für alle Werthe gültig, für welche ein Logarithmus von $(1+x)$ bestehen kann. Also für alle positiven x und für alle negativen bis zur Grenze $x = -1$, wie bekannt ist. Für positive x wird jedoch diese Reihe nur dann convergent, wenn $x \leqq 1$ ist. Wie man e, und wie man die Constante a_1 für eine beliebige Grundzahl finde, ist hinlänglich bekannt, eben so wie man die Formeln für die Berechnung der Zahlenwerthe bequem einrichten könne. Das gehört zur niedern Analysis.

§. 16.

III. Entwicklung der Exponential-Reihe: a^x.

Hier wählen wir die höchst einfache Gleichung

$$a^x \,.\, a^x = a^{2x}$$

Multipliciren wir die Reihe a^x mit sich selbst, und entwickeln wir dann eine Reihe für den Exponenten $2x$, so sind die entsprechenden Coefficienten der beiden Reihen einzeln einander gleich.

Nun ist:

$$a^x = a_0 + a_I x + a_{II} x^2 + a_{III} x^3 + a_{IIII} x^4 + ..$$

also:

$$a^x \times a^x = a_0^2 + 2a_0 a_{'} x + 2a_0 a_{''} \left.\begin{matrix} x^2 \\ + a_{'}^2 \end{matrix}\right\} + 2a_0 a_{'''} \left.\begin{matrix} x^3 \\ + 2a_{'} a_{''} \end{matrix}\right\} + 2a_0 a_{''''} \left.\begin{matrix} x^4 \\ + 2a_{'} a_{'''} \\ + a_{''}^2 \end{matrix}\right\} + \ldots$$

(A)

und:

$$\text{(B)} \quad a^{2x} = a_0 + 2a_{'} x + 4a_{''} x^2 + 8a_{'''} x^3 + 16a_{''''} x^4 + \ldots$$

Aus den entsprechenden Gleichungen werden folgende Werthe abgeleitet:

1) $a_0^2 = a_0$; $a_0 = 1$;

2) $2a_{'} = 2a_{'}$; $a_{'} = a_{'}$ (noch unbestimmt);

3) $4a_{''} = 2a_{''} + a_{'}^2$; $a_{''} = \frac{a_{'}^2}{2}$;

4) $8a_{'''} = 2a_{'''} + 2a_{'} a_{''}$; $a_{'''} = \frac{a_{'}^3}{2.3}$;

5) $16a_{''''} = 2a_{''''} + 2a_{'} a_{'''} + a_{''}^2$; $a_{''''} = \frac{a_{'}^4}{2.3.4}$;

u. s. w.

Diese Werthe substituirt geben die Reihe:

$$a^x = 1 + a_{'} x + a_{'}^2 \frac{x^2}{2} + a_{'}^3 \frac{x^3}{2.3} + a_{'}^4 \frac{x^4}{2.3.4} + \ldots$$

Es ist bekannt, dass für die Grundzahl e, d. h. für natürliche Logarithmen, der Coefficient $a_1 = 1$ ist.

Es gilt die Reihe:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \ldots$$

eine Reihe, die für alle Werthe von x convergent bleibt.

Zusatz. Diese nämliche Reihe hätte man auch durch Umkehrung der logarithmischen Reihe finden können, was ebenfalls angeht, da die dabei befolgte Methode auf den nämlichen Principien beruht, die der directen Bestimmung der Reihen zu Grunde liegen.

Man hat die logarithmische Reihe:

$$^e log\,(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots = y,$$

es ist daher $1+x = e^y$.

Die Reihe e^y sei:

$$e^y = a_0 + a_I y + a_{II} y^2 + a_{III} y^3 + a_{IIII} y^4 + \ldots$$

so kann a_0 sogleich bestimmt werden; denn für $y=0$ wird die Reihe $e^0 = a_0$, also $a_0 = 1$.

Es ist daher

$$e^y - 1 = a_I y + a_{II} y^2 + a_{III} y^3 + a_{IIII} y^4 + \ldots = x$$

Substituirt man diese Werthe in der Reihe

$$^e log\,(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots$$

so erhält man:

$$y = (a_I y + a_{II} y^2 + a_{III} y^3 + \ldots)^1 - \frac{1}{2}(a_I y + a_{II} y^2 + \ldots)^2 +$$
$$+ \frac{1}{3}(a_I y + a_{II} y^2 + \ldots)^3 - \frac{1}{4}(a_I y + a_{II} y^2 + \ldots)^4 - \ldots$$

Entwickelt man diese Potenzen und ordnet sie nach gleichen Exponenten von y, so geht die Reihe hervor:

$$y = a_I y + \left.\begin{array}{l} a_{II} \\ -\frac{1}{2}a_I^2 \end{array}\right\} y^2 + \left.\begin{array}{l} a_{III} \\ -a_I a_{II} \\ +\frac{1}{3}a_I^3 \end{array}\right\} y^3 + \left.\begin{array}{l} a_{IIII} \\ -a_I a_{III} - \frac{1}{2}a_{II}^2 \\ +a_I^2 a_{II} \\ -\frac{1}{4}a_I^4 \end{array}\right\} y^4 + \ldots$$

Die eine Seite der Gleichung hat eine Reihe y, für welche die Coefficienten aller Potenzen von y, mit Ausnahme der von y^1, gleich Null sind. Es sind daher auch auf der andern Seite der Gleichung die Coefficienten aller Potenzen von y, mit Ausnahme von $a_I y$, gleich Null, und es ergeben sich die Werthe:

1) $y = a_I y$; $a_I = 1$

2) $a_{II} - \frac{1}{2}a_I^2 = 0$; $a_{II} = \frac{1}{2}$

$$3)\ a_{III} - a_I a_{II} + \frac{1}{3} a_I^3 = 0;\ a_{III} = \frac{1}{2.3};$$

$$4)\ a_{IIII} - \frac{1}{24} a_I^4 = 0;\ a_{IIII} = \frac{1}{2.3.4} \text{ u. s. w.}$$

Wir erhalten:

$$e^y - 1 = y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2.3}y^3 + \frac{1}{2.3.4}y^4 + ..$$

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2.3}y^3 + \frac{1}{2.3.4}y^4 + ..$$

Diese Reihe stimmt mit der obigen, direkt entwickelten, Reihe vollkommen überein. Auch ist in ihr der Coefficient a_1 sogleich bestimmt, weil dieser Ableitung die Erwägungen zu gut kommen, durch welche die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bestimmt worden ist.

§. 17.

IV. Entwicklung der Reihen für *sin x* und *cos x*.

Zur Entwicklung dieser Reihen kann man eine beliebige trigonometrische Gleichung wählen. Ich halte folgende für die einfachste:

$$sin\, 2x = 2 sin\, x\ cos\, x.$$

Diese Gleichung gilt allgemein für den Radius $r = 1$, eine Bestimmung, die auch für die Entwicklung der Reihe beibehalten werden muss.

Eliminirt man aus obiger Gleichung den Werth *cos x* durch die Substitution:

$$cos\, x = \sqrt{(1 - sin\, x^2)} = 1 - \frac{1}{2} sin\, x^2 - \frac{1}{8} sin\, x^4 + \ldots$$

so ist:

$$sin\, 2x = 2 sin\, x \left(1 - \frac{1}{2} sin\, x^2 - \frac{1}{8} sin\, x^4 - ..\right)$$

$$= 2 sin\, x - sin\, x^3 - \frac{1}{4} sin\, x^5 - ..$$

Ist die Reihe für *sin x* folgende:

$$sin\, x = a_0 + a_I x + a_{II} x^2 + a_{III} x^3 + ..$$

so kann a_0 zum Behuf leichterer Operationen sogleich bestimmt werden. Denn für den Bogen $x = 0$ geht *sin x* ebenfalls in Null

über, und es ist $0 = a_0 + 0\,..$, also $a_0 = 0$, so dass die Reihe in folgende übergeht:

$$\sin x = a_{'} x + a_{''} x^2 + a_{'''} x^3 + a_{''''} x^4 + \,..$$

Dann ist

$$(\sin x)^3 = a_{'}^3 x^3 + \left.\begin{matrix} 3a_{'}^2 a_{''} \\ +3a_{'}^2 a_{'''} \end{matrix}\right\} x^4 + \left.\begin{matrix} 3a_{'} a_{''}^2 \\ +3a_{'}^2 a_{''''} \end{matrix}\right\} x^5 + \,..$$

$$(\sin x)^5 = a_{'}^5 x^5 + \,...$$

und es ist:

$$2\sin x - \sin x^3 - \frac{1}{4}\sin x^5 - \,.. =$$

$$= 2a_{'} x + 2a_{''} x^2 + \left.\begin{matrix} 2a_{'''} \\ -a_{'}^3 \end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix} 2a_{''''} \\ -3a_{'}^2 a_{''} \end{matrix}\right\} x^4 + \left.\begin{matrix} 2a_{'''''} \\ -3a_{'}^2 a_{'''} \\ -3a_{'} a_{''}^2 \\ -\frac{1}{4} a_{'}^5 \end{matrix}\right\} x^5 + \,..$$

(A)

Die gleiche Reihe für *sin 2x* ist:

(B) $$\sin 2x = 2a_{'} x + 4a_{''} x^2 + 8a_{'''} x^3 + 16a_{''''} x^4 + 32a_{'''''} x^5 + \,..$$

Da die Reihen (A) und (B) für alle Werthe von x einander gleich sind, so sind die Coefficienten der entsprechenden Glieder einzeln einander gleich, und es folgt:

1) $2a_{'} = 2a_{'}$; $a_{'} = a_{'}$ (noch unbestimmt);

2) $4a_{''} = 2a_{''}$; $a_{''} = 0$;

3) $8a_{'''} = 2a_{'''} - a_{'}^3$; $a_{'''} = -\frac{a_{'}^3}{2.3}$;

4) $16a_{''''} = 2a_{''''} - 3a_{'}^2 a_{''}$; oder da $a_{''} = 0$;

$16a_{''''} = 2a_{''''}$; $a_{''''} = 0$;

5) $32a_{'''''} = 2a_{'''''} - 3a_{'}^2 a_{'''} - \frac{1}{4} a_{'}^5$; $a_{'''''} = \frac{a_{'}^5}{1.2.3.4.5}$.

Die Sinus-Reihe ist demnach folgende:

$$\sin x = a_{'} x - a_{'}^3 \frac{x^3}{2.3} + a_{'}^5 \frac{x^5}{2.3.4.5} - \,....$$

Reihe für *cos x*.

Diese Reihe könnte man ebenfalls aus einer der vielen für den Cosinus geltenden Gleichungen ableiten, z. B. aus $cos\,2x = 2\,cos\,x^2 - 1$. Diese Ableitung wäre sogar einfacher auszuführen, als für die Sinus-Reihe geschehen konnte.

Der Abwechslung willen ziehe ich es vor, die Cosinus-Reihe aus der bereits bekannten Sinus-Reihe mittelst der Gleichung $cos\,x = \sqrt{1 - sin\,x^2}$ abzuleiten.

Es ist also, wenn $\sqrt{(1 - sin\,x^2)}$ entwickelt wird:

$$cos\,x = 1 - \frac{1}{2} sin\,x^2 - \frac{1}{8} sin\,x^4 - \frac{1}{16} sin\,x^6 - \ldots$$

Da $$sin\,x = a' x' - a^3 \frac{x^3}{2.3} + a^5 \frac{x^5}{2.3.4.5} - \ldots$$

so ist:
$$(sin\,x)^2 = a'^2 x^2 - \frac{1}{3} a'^4 x^4 + \frac{2}{45} a'^6 x^6 + \ldots$$
$$(sin\,x)^4 = a'^4 x^4 - \frac{2}{3} a'^6 x^6 - \ldots$$
$$(sin\,x)^6 = a'^6 x^6 + \ldots$$

Es ist daher, wenn die gefundenen Werthe in

$$cos\,x = 1 - \frac{1}{2} sin\,x^2 - \frac{1}{8} sin\,x^4 - \frac{1}{16} sin\,x^6 - \ldots$$

substituirt werden:

$$cos\,x = 1 - \frac{1}{2} a'^2 x^2 + \frac{1}{6} a'^4 x^4 - \frac{1}{45} a'^6 x^6 - \ldots$$
$$- \frac{1}{8} a'^4 x^4 + \frac{1}{12} a'^6 x^6 \ldots$$
$$- \frac{1}{16} a'^6 x^6 + \ldots$$

$$cos\,x = 1 - a'^2 \frac{x^2}{2} + a'^4 \frac{x^4}{2.3.4} - a'^6 \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \ldots$$

§. 18.

V. Reihe für die Tangenten und Cotangenten.

Auch die Reihe für die Tangenten könnte man aus irgend einer für die Tangenten gültigen Gleichung, etwa: $tg\,2x = \frac{2\,tg\,x}{1 - tg\,x^2}$ unmittelbar ableiten.

Da jedoch $tg\,x = \frac{sin\,x}{cos\,x}$, so ist es leichter und einfacher, die Tangenten-Reihe aus der Division der Sinus-Reihe durch die Cosinus-Reihe abzuleiten.

Es ist:

$$tg\,x = \frac{a_{,}x - a_{,}^3\frac{x^3}{2.3} + a_{,}^5\frac{x^5}{2.3.4.5} + \ldots}{1 - a_{,}^2\frac{x^2}{2} + a_{,}^4\frac{x^4}{2.3.4} - \ldots} =$$

$$= a_{,}x' + 2a_{,}^3\frac{x^3}{2.3} + 16a_{,}^5\frac{x^5}{2.3.4.5} + \ldots$$

Reihe für die Cotangenten.

Da $cotg\,x = \frac{cos\,x}{sin\,x}$ ist, so ist:

$$cotg\,x = \frac{1 - a_{,}^2\frac{x^2}{2} + a_{,}^4\frac{x^4}{2.3.4} - \ldots}{a_{,}x - a_{,}^3\frac{x^3}{2.3} + a_{,}^5\frac{x^5}{2.3.4.5} - \ldots} =$$

$$= \frac{1}{a_{,}x} - \frac{a_{,}x}{1.3} - \frac{a_{,}^3x^3}{1.3.5.3} - \frac{2a_{,}^5x^5}{1.3..7.3.3} - \ldots$$

Zusatz. Da $cotg\,x$ für $x = 0$ unendlich gross wird, so kann sie nicht in einer bloss nach positiven Potenzen von x geordneten Reihe entwickelt werden. In der That zeigt auch die Reihe, dass das erste Glied gleich $\frac{1}{a_{,}x}$ ist, also x^{-1} zum Factor hat. — Will man eine bloss nach positiven Potenzen der Veränderlichen entwickelte Reihe, so setze man $x = \alpha + z$ und entwickle $cotg\,(\alpha + z)$.

§. 19.

VI. Entwicklung der Reihen für Secante und Cosecante.

Da $sec\, x = \frac{1}{cos\, x}$ und $cosec\, x = \frac{1}{sin\, x}$ ist, so folgt durch Division:

$$sec\, x = \frac{1}{1 - a_1^2\frac{x^2}{2} + a_1^4\frac{x^4}{2.3.4} - \ldots} =$$

$$= 1 + a_1^2\frac{x^2}{2} + 5a_1^4\frac{x^4}{2.3.4} + 16a_1^6\frac{x^6}{2.3..6} + \ldots$$

und $$cosec\, x = \frac{1}{sin\, x} = \frac{1}{a_1 x^1 - a_1^3\frac{x^3}{2.3} + a_1^5\frac{x^5}{2.3.4.5} - \ldots} =$$

$$= \frac{1}{a_1 x} + \frac{1}{3}a_1\frac{x}{2} + \frac{7}{15}a_1^3\frac{x^3}{2.3.4} + \ldots$$

Da $cosec\, x$ für $x = 0$ unendlich wird, so kann sie gleichfalls nicht in einer bloss nach positiven Potenzen von x geordneten Reihe entwickelt werden. In der That ist auch das erste Glied der Reihe gleich $\frac{1}{a_1 x}$. Will man eine bloss nach positiven Potenzen von x geordnete Reihe, so entwickelt man entweder, indem man mit x multiplicirt, den Werth $x\, cosec\, x$, oder man entwickelt durch Einführung einer beliebigen Constante: $cosec\,(a+z)$.

§. 20.

Allgemeine Bemerkung zu den goniometrischen Reihen. Bestimmung des Coefficienten a_1.

Die bisher betrachteten Reihen, welche den Werth des Sinus, Cosinus etc. durch den bekannten Werth des Bogens x geben, heissen goniometrische Reihen. Umgekehrt heissen die Reihen, welche den unbekannten Werth des Bogens x durch die bekannten Functionen: $sin\, x$, $cos\, x$, $tg\, x$ etc. geben, cyclometrische Functionen.

In allen goniometrischen Reihen ist noch ein Coefficient a_1, der unbestimmt geblieben ist. Obwohl alle Reihen zu dieser Bestimmung von a_1 dienlich sind, so wählen wir doch als die leichtesten und einfachsten die Reihen für $\sin x$ und für $tg\, x$, und stellen folgenden Lehrsatz auf:

Lehrsatz. Der Coefficient a_1 kann nicht grösser und nicht kleiner als 1 sein; es ist daher: $a_1 = 1$.

Beweis. 1) Wäre $a_1 > 1$, also $a_1 = 1 + \alpha$, wo α eine positive Grösse wäre, so hätten wir die Reihe:

$$\sin x = a_1 x - a_1^3 \frac{x^3}{2.3} + a_1^5 \frac{x^5}{2.3.4.5} - \ldots$$

$$\sin x = (1+\alpha)x - a_1^3 \frac{x^3}{2.3} + a_1^5 \frac{x^5}{2.3.4.5} - \ldots$$

$$\sin x - x = \alpha x - a_1^3 \frac{x^3}{2.3} + a_1^5 \frac{x^5}{2.3.4.5} - \ldots$$

Da nun nach Lehrsatz I. für beliebig kleine Werthe von x das Zeichen des ersten Gliedes (αx) das Zeichen der ganzen Reihe bleibt, so wäre $\sin x - x$ eine positive Grösse. Daraus folgte, dass der Sinus grösser sein müsste, als der ihm entsprechende Bogen, was unmöglich ist. Es ist daher unmöglich, dass $a_1 > 1$ sei.

2) Wäre $a_1 < 1$, also $a_1 = 1 - \beta$, so wäre in der Tangenten-Reihe:

$$tg\, x = (1-\beta)x + 2a_1^3 \frac{x^3}{2.3} + 16a_1^5 \frac{x^5}{2.3.4.5} + \ldots$$

$$tg\, x - x = -\beta x + 2a_1^3 \frac{x^3}{2.3} + 16a_1^5 \frac{x^5}{2.3.4.5} + \ldots$$

Da wieder für beliebig kleine Werthe von x das Zeichen des ersten Gliedes das Zeichen der ganzen Reihe bleibt, so wäre: $tg\, x - x$ eine negative Grösse, d. h. der Bogen wäre grösser als die zu ihm gehörige Tangente. Da jedoch im ersten Quadranten, also um so mehr für die Werthe von x, welche Null als Intervall haben, die Tangente grösser ist als der ihr entsprechende Bogen, so ist es unmöglich, dass $tg\, x - x$ negativ sei, es ist daher auch unmöglich, dass $a_1 < 1$ sei.

Daraus folgt, dass $a_1 = 1$ ist.

Die goniometrischen Reihen für den Radius $=1$ sind demnach:

$$1)\ \sin x = x - \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1}{2.3.4.5}x^5 - \cdots$$

$$2)\ \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2.3.4}x^4 - \cdots$$

$$3)\ tg\, x = x + \frac{2x^3}{2.3} + \frac{16x^5}{2.3.4.5} + \cdots$$

$$4)\ cotg\, x = \frac{1}{x} - \frac{2x}{2.3} - \frac{x^3}{3.5.3} - \cdots$$

$$5)\ \sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{2.3.4} + \cdots$$

$$6)\ cosec\, x = \frac{1}{x} + \frac{x}{2.3} + \frac{7}{15}\frac{x^3}{2.3.4} + \cdots$$

§. 21.

VII. Ableitung der cyclometrischen Reihen.

1) Ist $\sin x = y$, so ist $x = arc.\sin y$.

Es sei:

$$x = a_{'}y + a_{''}y^2 + a_{'''}y^3 + a_{''''}y^4 + a_{'''''}y^5 + \cdots$$

so ist:

$$x^2 = a_{'}^2y^2 + 2a_{'}a_{''}y^3 + \left.\begin{matrix} 2a_{'}a_{'''} \\ + a_{''}^2 \end{matrix}\right\} y^4 + \left.\begin{matrix} 2a_{'}a_{''''} \\ + 2a_{''}a_{'''} \end{matrix}\right\} y^5 + \cdots$$

$$x^3 = a_{'}^3y^3 + 3a_{'}^2a_{''}y^4 + \left.\begin{matrix} 3a_{'}^2a_{'''} \\ + 3a_{'}a_{''}^2 \end{matrix}\right\} y^5 + \cdots$$

$$x^4 = a_{'}^4y^4 + 4a_{'}^3a_{''}y^5 + \cdots$$

$$x^5 = a_{'}^5y^5 + \cdots$$

Substituirt man diese Werthe in die Reihe:

$$\sin x = x - \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1}{2.3.4.5}x^5 - \cdots$$

so erhält man:

$$y = a_{,}y + a_{,,}y^2 + a_{,,,}\left.\begin{matrix} y^3 \\ -\frac{1}{2.3}a_{,}^3 \end{matrix}\right\} + a_{,,,,}\left.\begin{matrix} y^4 \\ -\frac{1}{2}a_{,}^2 a_{,,} \end{matrix}\right\} + a_{,,,,,}\left.\begin{matrix} y^5 \\ -\frac{1}{2}a_{,}^2 a_{,,,} \\ -\frac{1}{2}a_{,}a_{,,}^3 \\ +\frac{1}{2.3.4.5}a_{,}^5 \end{matrix}\right\} + \ldots$$

Nach der bereits erläuterten Methode findet man die Coefficienten:

$$a_1 = 1;$$
$$a_2 = 0;$$
$$a_3 = \frac{1}{2.3};$$
$$a_4 = 0;$$
$$a_5 = \frac{3}{2.4.5} \text{ etc.};$$

also:

$$x = y + \frac{1}{2}\frac{y^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{y^5}{5} + \ldots$$

oder: $$arc.\,sin\, y = y + \frac{1}{2}\frac{y^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{y^5}{5} + \ldots$$

oder: $$x = sin\, x + \frac{1}{2}\frac{sin\, x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{sin\, x^5}{5} + \ldots =$$

2) Um die Reihe für $arc.\,cos\, y$ zu entwickeln, hat man die Formel:

$$arc.\,cos\, y = \frac{1}{2}\pi - arc.\,sin\, y.$$

Es ist daher:

$$arc.\,cos\, y = \frac{1}{2}\pi - y - \frac{1}{2}\frac{y^3}{3} - \frac{1.3}{2.4}\frac{y^5}{5} - \ldots$$

3) Um $arc.\,tg\, y$ zu entwickeln, hat man die Reihe:

$$tg\, x = x + \frac{2x^3}{2.3} + \frac{16x^5}{2.3.4.5} + \ldots$$

Ist wieder $tg\, x = y$, also $x = arc.\,tg\, y$, und:

$$x = a_{,}y + a_{,,}y^2 + a_{,,,}y^3 + a_{,,,,}y^4 + a_{,,,,,}y^5 + \ldots$$

und substituirt man in:

$$tg\,x = x + \frac{2x^3}{2.3} + \frac{16x^5}{2.3.4.5} + \cdot\cdot$$

die oben gefundenen Werthe von:

$$x = a_{,}y + a_{,,}y^2 + \cdot\cdot$$

$$x^2 = a_{,}^2 y^2 + \cdot\cdot$$

x^3, x^4 etc.,

so erhält man:

$$y = a_{,}y + a_{,,}y^2 + \left.\begin{matrix} a_{,,,} \\ +\frac{1}{3}a_{,}^3 \end{matrix}\right\} y^3 + \left.\begin{matrix} a_{,,,,} \\ +a_{,}^2 a_{,,} \end{matrix}\right\} y^4 + \left.\begin{matrix} a_{,,,,,} \\ +a_{,}^2 a_{,,,} \\ +a_{,} a_{,,}^2 \\ +\frac{16}{2..5}a_{,}^5 \end{matrix}\right\} y^5 + \cdot\cdot$$

und daraus:

$$a_{,} = 1,$$

$$a_{,,} = 0,$$

$$a_{,,,} = -\frac{1}{3},$$

$$a_{,,,,} = 0,$$

$$a_{,,,,,} = \frac{1}{5},$$

so dass $$x = y - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 - \cdots$$

$$x = arc.\,tg\,y = y - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 - \cdot\cdot$$

oder: $$x = tg\,x - \frac{1}{3}tg\,x^3 + \frac{1}{5}tg\,x^5 - \cdots$$

4) Die Formel für *arc. cotg y* findet man aus der bekannten Gleichung:

$$arc.\,cotg\,y = \frac{1}{2}\pi - arc.\,tg\,y.$$

$$arc.\,cotg\,y = \frac{1}{2}\pi - y + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{5}y^5 + \cdot\cdot$$

etc..

5) Will man die Reihe für *arc. sec y* ableiten, so findet man durch Umkehrung der Secanten-Reihe kein Resultat. Die Secante hat auch die Eigenschaft, dass sie für $x = 0$ selbst nur $= 1$ wird, und niemals kleiner als 1 werden kann. Substituirt man eine beliebige Constante, etwa $y = 1 + \eta$, so wird man in weitläuftige Bestimmungen der Coefficienten verwickelt. Diess mag wohl der Grund sein, warum man die Entwicklung von Reihen für *arc. sec y* sowie auch für *arc. cosec y* nicht antrifft.

Indessen hat die Analysis Hilfsmittel genug, um sie auf's Leichteste herzustellen.

So ist z. B. $sec\, x = \frac{1}{cos\, x}$.

Setzt man $sec\, x = y$, so ist $x = arc.\, sec\, y$.

Nun ist $y = \frac{1}{cos\, x}$, $cos\, x = \frac{1}{y}$ und $x = arc.\, cos\, \frac{1}{y}$.

Die Reihe $x = arc.\, cos\, \frac{1}{y}$ kennt man; es ist:

$$arc.\, cos\, \frac{1}{y} = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{y} - \frac{1}{2.3y^3} - \frac{1.3}{2.4.5y^5} - \ldots$$

also auch:

$$x = arc.\, sec\, y = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{y} - \frac{1}{2.3y^3} - \frac{1.3}{2.4.5y^5} - \ldots$$

oder $y = \frac{1}{\eta}$ gesetzt:

$$arc.\, sec\, \frac{1}{\eta} = \frac{1}{2}\pi - \eta - \frac{1}{2}\frac{y^3}{3} - \frac{1.3\eta^5}{2.4.5} - \ldots$$

Man kann also zwar nicht die Function *arc. sec y*, wohl aber nach leichter Modification die Function $arc.\, sec\, \frac{1}{y}$ in einer nach positiven Potenzen geordneten Reihe von y entwickeln.

6) Da $cosec\, x = \frac{1}{sin\, x}$ ist, so findet man die Reihe für *arc. cosec y* auf dieselbe Art, wie für *arc. sec y*. — Noch kürzer findet man sie aus der Gleichung:

$$arc.\, cosec\, y = \frac{1}{2}\pi - arc.\, sec\, y \ldots$$

also:

$$arc.\ cosec\ y = \frac{1}{y} + \frac{1}{2.3y^3} + \frac{1.3}{2.45y^5} + \ldots$$

oder:

$$arc.\ cosec\ \frac{1}{\eta} = \eta + \frac{1}{2.3}\eta^3 + \frac{1.3}{2.3}\frac{\eta^5}{5} + \ldots$$

Für diese Functionen gelten auch Reihen für negative Exponenten von y, aber nur aus dem Grunde, weil Secante und Cosecante von x niemals kleiner als der Radius $=1$ werden, also niemals beliebig kleine Werthe von x haben können. Die Glieder $M\frac{1}{y^m}$ bleiben daher immer endliche Functionen, obwohl im Nenner y^m ist, da diese Grösse niemals beliebig klein werden kann.

§. 22.

Allgemeine Bemerkung über diese Reihen.

Bei allen diesen Reihen kennt man wohl das Bildungsgesetz der aufeinanderfolgenden Glieder, allein es fehlt die Einsicht in die Allgemeinheit und Nothwendigkeit desselben für alle Glieder. Für die Berechnung der numerischen Werthe der Functionen ist diess von keinem Nachtheil, da man weiss, dass kein Coefficient eines Gliedes dieser Reihen unendlich gross ist, und da man andererseits die Variable x so klein nehmen kann, dass nur die Zahlen weniger Glieder auf den zu berechnenden Werth der Functionen Einfluss haben. Für die Theorie bleibt aber immer die Forderung übrig, dass das Bildungsgesetz allgemein bewiesen werde; denn so, wie die Reihen durch die Methode der unbestimmten Coefficienten entwickelt sind, haben sie nur einen empirischen Werth, sie gelten nur für so viele Glieder, als man eben gefunden hat.

Die entwickelten Reihen gelten allgemein für alle Werthe der Variablen x, so lange die Function selbst eine reelle und endliche Grösse bleibt, und man hat in ihnen vielfach Gelegenheit, die Lehren der Convergenz in Anwendung zu bringen. So gilt z. B. die Reihe $log(1+x)$ allgemein für alle Werthe, von $x=-1$ an bis $x=\infty$, wenn sie auch für Werthe $x>1$ zur Berechnung

unbrauchbar ist. So gelten auch die Reihen: $\sin x$, $\cos x$, $tg\, x$, $cotg\, x$, $sec\, x$, $cosec\, x$ allgemein für alle Werthe von x. Hingegen gelten die Reihen $arc.\, sin\, x$, $arc.\, cos\, x$ nur für Werthe von x, die innerhalb $+1$ und -1 liegen, weil Sinus und Cosinus niemals grösser als ± 1 werden können, und die Reihen $arc.\, sec\, x$, $arc.\, cosec\, x$ gelten nur für Werthe von x, die grösser sind als $+(x \geqq 1)$, weil Secante und Cosecante niemals kleiner als der Radius werden können. In allen Fällen, in denen die Function selbst imaginär wird, z. B. $arc.\, sec\, x$ für $x < 1$, werden die Reihen divergent.

Solche divergente Reihen sind für die Berechnung unbrauchbar, aber falsch sind sie nicht, wie man sich seit einiger Zeit angewöhnt hat, sie zu nennen. Denn sie gehen aus richtigen Operationen hervor, und werden sogleich, wenn man eine geschickte Substitution anwendet, ohne weitere Veränderung wieder brauchbar. Wer die Reihe falsch nennt, der soll einmal sagen, welches Glied, oder welche Glieder in ihr falsch sind, und wir werden ihm zeigen, dass er die nämlichen Glieder als richtige Summanden unbedenklich anwendet, sobald die nämliche von ihm falsch genannte Reihe convergent wird. Ist aber jedes einzelne Glied richtig, d. h. kann es nicht grösser und nicht kleiner sein, als es ist, so ist auch die ganze Reihe richtig, wenn sie auch zum Behufe der Auflösung besonderer Probleme unbrauchbar wird. Das schadet nichts; dafür dient sie zur Auflösung anderer Probleme und zur Aufhellung anderer Schwierigkeiten.

Cap. III.

Der binomische Lehrsatz.

§. 23.

Bestimmung der Coefficienten der binomischen Reihe.

Da wir den binomischen Lehrsatz als die Grundlage des Differenzial-Calculs betrachten, was er auch in der That ist, so haben wir zunächst die Aufgabe, denselben in seiner ganzen Strenge und Allgemeinheit zu beweisen.

1) Wir haben Oben gefunden, dass ganz allgemein für jedes beliebige μ sei:

$$(1+x)^{\mu} = 1 + ax + \frac{a.a-1}{2}x^2 + \frac{a.a-1.a-2}{1.2.3}x^3 + \ldots$$

Wir haben nun a zu bestimmen.

Zuerst ist einleuchtend, dass a vom Exponenten μ abhängt; denn $(1+x)^{\mu}$ erhält für verschiedene Werthe von μ auch selber verschiedene Werthe, und die ganze Verschiedenheit der ihr entsprechenden Reihe hängt von dem Werthe ab, den man der Grösse a giebt.

Bezeichnen wir diese Abhängigkeit durch Functionen, also $a = f\mu$, so dass a entweder $= \mu$, oder $= \mu^2$, oder $log\,\mu$ etc., oder irgend eine Zusammensetzung dieser Operationen ist, so ist einleuchtend, dass für

$$(1+x)^{\nu} = 1 + bx + \frac{b.b-1}{1.2}x^2 + \ldots$$

der Coefficient b auf dieselbe Art von ν abhängt, wie a von μ, also $b = f\nu$.

Eben so hängt in der Reihe

$$(1+x)^{\mu+\nu} = 1 + Ax + \frac{A.A-1}{1.2}x^2 + \ldots$$

der Coefficient A auf dieselbe Art von $(\mu+\nu)$ ab, wie a von μ oder b von ν, so dass: $A = f(\mu+\nu)$.

Nun erhält man auch anderseits $(1+x)^{\mu+\nu}$, indem man $(1+x)^{\mu}$ mit $(1+x)^{\nu}$ multiplicirt, und führen wir diese Multiplication aus, so wird:

$$(1+x)^{\mu} + (1+x)^{\nu} = 1 + (a+b)x + \frac{(a.a-1+b.b-1+2ab)}{1.2}x^2 + \ldots$$

Es ist daher $a+b = A$, oder:

$$f(\mu) + f(\nu) = f(\mu+\nu).$$

Daraus geht hervor, dass in $f(\mu)$, $f(\nu)$ die Grössen μ, ν nur in der ersten Potenz enthalten sein können. Denn wäre z. B. in $f(\mu)$ die Grösse μ auch nur in der zweiten Potenz enthalten, wie etwa $f\mu = \mu^2$, dann fände $f\mu + f\nu = f(\mu+\nu)$ nicht mehr statt, indem $\mu^2+\nu^2$ nicht $(\mu+\nu)^2$ sein könnte, da $\mu^2+\nu^2 = \mu^2+2\mu\nu+\nu^2$ ist. Dasselbe gilt von jeder andern Potenz und von jeder andern einfachen oder zusammengesetzten Function überhaupt.

Es hat daher a nothwendig die Form: $\alpha\mu+\beta$, worin α und β Grössen sind, die von μ völlig unabhängig sind.

Nun zeigt sich sogleich, dass $\beta = 0$ ist. Denn da $f\mu + f\nu = f(\mu+\nu)$, so wäre durch Substitution:

$$\alpha\mu+\beta+\alpha\nu+\beta = \alpha(\mu+\nu)+\beta,$$

also $\alpha(\mu+\nu)+2\beta = \alpha(\mu+\nu)+\beta$,

also $2\beta = \beta$, daher $\beta = 0$.

Es bleibt daher nur noch übrig, dass $a = \alpha\mu$ ist, wobei α von μ unabhängig, d. h. für jeden Werth von μ, wenn man $\mu = \nu$, $= \mu+\nu$ etc. setzt, dieselbe Grösse ist.

2) Um α zu bestimmen, schlagen wir folgenden Weg ein.

Es ist:

$$(1+y)^{\frac{1}{\mu}} = 1 + \frac{\alpha}{\mu}y + By^2 + Cy^3 + \ldots$$

und:

$$\left((1+x)^{\mu}\right)^{\frac{1}{\mu}} = (1 + \alpha\mu x + Ax^2 + Bx^3 + ..)^{\frac{1}{\mu}}$$

Fasst man:

$$\alpha\mu x + Ax^2 + Bx^3 + ..$$

als y zusammen, so ist:

$$\Big((1+x)^\mu\Big)^{\frac{1}{\mu}} = 1 + \frac{\alpha}{\mu}(\alpha\mu x + Ax^2 + ..) + By^2 + \ldots$$

$$= 1 + \frac{\alpha}{\mu}\alpha\mu x + \frac{\alpha}{\mu}Ax^2 + ..$$

$$+ B\alpha^2\mu^2x^2 + \ldots$$

Nun ist allgemein:

$$\Big((1+x)^\mu\Big)^{\frac{1}{\mu}} = 1 + x,$$

und man erhält die identische Reihe:

$$1 + x = 1 + \alpha^2 x + \left(\frac{\alpha}{\mu}A + B\alpha^2\mu^2\right)x^2 + \Gamma x^2 + \ldots$$

Daraus folgt, dass:

$$1 = 1,$$
$$x = \alpha^2 x,$$
$$\frac{\alpha}{\mu}A + B\alpha^2\mu^2 = 0,$$
$$\Gamma = 0,$$
etc.

Aus $x = \alpha^2 x$ folgt, dass $\alpha^2 = 1$, $\alpha = \pm 1$.

3) Als letzte Bestimmung zeigt sich, dass $\alpha = +1$. Denn wäre $\alpha = -1$, so hätte man:

$$(1+x)^\mu = 1 - \mu x + Bx^2 + Cx^3 + \ldots$$

Nun ist, wenn μ positiv ist, für kleine Werthe von x die Potenz $(1+x)^\mu$ grösser als 1, während die ihr entsprechende Reihe:

$$1 - \mu x + Bx^2 + Cx^3 + \ldots$$

für beliebig kleine Grössen von x einen Werth gäbe, der kleiner als 1 wäre, was unmöglich ist.

Eben so ist für negative μ die Grösse $(1+x)^\mu$ kleiner als 1, während, wenn $\alpha = -1$ wäre, die entsprechende Reihe:

$$(1+x)^{-\mu} = 1 + \mu x + B_{,}x^2 + C_{,}x^3 + ..$$

einen Werth gäbe, der grösser als 1 sein würde, was unmöglich ist. Es ist daher schlechthin allgemein: $\alpha = 1$, und die Reihe wird:

$$(1+x)^{\mu} = 1+\mu x+\frac{\mu.\mu-1}{1.2}x^2+\frac{\mu.\mu-1.\mu-2}{1.2.3}x^3+\ldots$$

welche ganze oder gebrochene, positive oder negative, reelle oder imaginäre Zahl auch μ sein möge. Denn es ist keinerlei Voraussetzung gemacht worden, sondern das Bildungsgesetz der Coefficienten wurde einzig und allein aus den Potenzial-Operationen abgeleitet, die bekanntlich für jede Art von Grössen ganz und gar die nämlichen sind.

§. 24.

Ableitung des Coefficienten des m^{ten} Gliedes der Potenz $(\mu+1)$ aus den Coefficienten des m^{ten} und $(m-1)^{ten}$ Gliedes der Potenz μ.

Der Coefficient des m^{ten} Gliedes der Potenz μ ist:

$$M=\frac{\mu.\mu-1.\mu-2\ldots\mu-(m-1)}{1.2.3\ \ldots.\ \ m}$$

Der Coefficient des $(m-1)^{ten}$ Gliedes ist:

$$L=\frac{\mu.\mu-1.\mu-2\ldots\mu-(m-2)}{1.2.3\ \ \ldots\ \ \mu-1}$$

Bringt man beide Glieder unter gleichen Nenner, so ist:

$$M+L=\frac{\mu+1.\mu.\mu-1\ldots(\mu+1)-(m-1)}{1.2.3\ \ \ldots\ \ m}$$

was auch nach dem Bildungsgesetze der Coefficient des m^{ten} Gliedes der Potenz $(\mu+1)$ ist. —

Dass diess überhaupt statt finden müsse, leuchtet daraus ein, dass die Potenz $\mu+1$ aus der Multiplication von $(1+x)^{\mu}$ mit $(1+x)$ entsteht.

Multiplicirt man nun:

$$\begin{array}{lll}(1+x)^{\mu} & =1+ & \mu x \quad +\frac{\mu.\mu-1}{2}x^2+\frac{\mu.\mu-1.\mu-2}{1.2.3}x^3+..\\ 1+x & =1+x & \end{array}$$

$$\overline{(1+x)^{\mu+1}=1+\quad \mu x \quad +\frac{\mu.\mu-1}{2}x^2+\frac{\mu.\mu-1.\mu-2}{1.2.3}x^3+..}$$

$$+\quad x\quad +\quad \mu x^2\quad +\quad \frac{\mu.\mu-1}{2}\quad x^3+..$$

$$(1+x)^{\mu+1}=1+(\mu+1)x^2+\left(\frac{\mu.\mu-1}{2}+\mu\right)x^2+..$$

so ist einleuchtend, dass zur Bildung des Coefficienten eines jeden Gliedes der Potenz $(1+x)^{\mu+1}$ zwei Glieder der Potenz $(1+x)^{\mu}$ concurriren, eines, das durch die Multiplication mit 1, das andere, das durch die Multiplication mit x gesetzt wird. Diese zwei zusammengehörigen Glieder sind aber jederzeit der m^{te} und der $(m-1)^{te}$ Coefficient der Potenz $(1+x)^{\mu}$.

§. 25.

Allgemeine Gültigkeit des Bildungsgesetzes der Binomial-Coefficienten.

Das Bildungsgesetz der Reihe:

$$(1+x)^{\mu} = 1 + \mu x + \frac{\mu.\mu-1}{2} + \frac{\mu.\mu-1.\mu-2}{2.3}x^3 + \ldots$$

ist allgemein gültig. Denn gesetzt, es gelte diess Bildungsgesetz nur bis zum n^{ten} Coefficienten, so dass in

$$(1+x)^{\mu} = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ a_\lambda x^l + a_\mu x^m + a_\nu x^n + \ldots$$

die Coefficienten a_1, a_2 .. bis a_μ nach dem gefundenen Gesetze, hingegen a_ν nicht mehr nach ihm gebildet wäre, so ist aus §. 24 einleuchtend, dass auch für die Potenz $\mu+1$ das Bildungsgesetz bis zum Coefficienten A_μ gelten müsse, wenn man

$$(1+x)^{\mu+1} = 1 + A_{'} x + A_{''} x^2 + \ldots\ A_\mu x^m + A_\nu x^n + \ldots$$

nimmt.

Nun ist aber auch aus der Multiplication von $(1+x)^{\mu}$ mit $(1+x)$ klar, dass $a_\nu + a_\mu = A_\nu$, also $A_\nu - a_\nu = a_\mu$, und für a_μ gilt noch das gefundene Bildungsgesetz.

Bezeichnen nun ${}'A_\nu$, ${}'a_\nu$ solche Coefficienten, die nach dem Bildungsgesetze hergestellt werden, also:

$${}'A_\nu = \frac{\mu+1.\mu.\mu-1\ldots\mu+1-(n-1)}{1.2.3\quad\ldots\quad n}$$

und $${}'a_\nu = \frac{\mu.\mu-1.\mu-1\ldots\mu-(n-1)}{1.2.3\quad\ldots\quad n},$$

so gilt auch für sie die Gleichung: ${}'A_\nu - {}'a_\nu = a_\mu$.

Es ist daher ${}'A_\nu - {}'a_\nu = A_\nu - a_\nu$, und daraus folgt, dass $A_\nu = {}'A_\nu + k$; $a_\nu = {}'a_\nu + k$, d. h. die Coefficienten A_ν und a_ν können

sich höchstens um eine und dieselbe Constante k von den Coefficienten des Bildungsgesetzes unterscheiden, so dass wir hätten:

$$(1+x)^{\mu} = 1 + \mu x + \frac{\mu.\mu-1}{2}x^2 + .. Mx^m + (N+k)x^n + ..$$

$$(1+x)^{\mu+1} = 1 + (\mu+1)x + \frac{\mu+1.\mu}{2}x^2 + .. {}'Mx^m + ({}'N+k)x^n + ..$$

und allgemein:

$$(1+x)^{\mu+\rho} = 1 + (\mu+\varrho)x + \frac{\mu+\varrho.\mu+\varrho-1}{1.2.}x^2 + .. {}''Mx^m + ({}''N+k)x^n + ..$$

Nun geht aber aus der Multiplication von $(1+x)^{\mu}$ und $(1+x)^{\rho}$ hervor:

$$(1+x)^{\mu} = 1 + \mu x + \frac{\mu.\mu-1}{2}x^2 + .. Mx^m + (N+k)\,x^n + ..$$

$$(1+x)^{\rho} = 1 + \varrho x + \frac{\varrho.\varrho-1}{2}x^2 + .. {}_{'}Mx^m + ({}_{'}N+k)\,x^n + ..$$

$$(1+x)^{\mu+\rho} = 1 + (\mu+\varrho)x + .. + {}''Mx^m + \left.\begin{array}{l}(N+k)\\ +\varrho M\\ +..\\ +\mu\,{}_{'}M\\ +({}_{'}N+k)\end{array}\right\} x^n + ..$$

das heisst:

$$(1+x)^{\mu+\rho} = 1 + (\mu+\varrho)x + \ldots + \Big((N+\varrho M+..\mu\,{}_{'}M+{}_{'}N)+2k\Big)x^n + ..$$

Es ist aber die eingeklammerte Grösse:

$$(N+\varrho M+..\mu\,{}_{'}M+{}_{'}N) = {}''N,$$

und sohin wäre der Coefficient des n^{ten} Gliedes gleich ${}''N+2k$.

Oben haben wir denselben Coefficienten gefunden gleich ${}''N+k$. Es ist daher ${}''N+2k = {}''N+k$, oder $k=0$, d. h. auch für jeden Coefficienten, für welchen was immer für ein Bildungsgesetz imaginirt wird, gilt kein anderes, als das angegebene, welches daher für alle Glieder der binomischen Reihe, d. h. schlechthin allgemein ist.

Zusatz. Die wissenschaftliche Abrundung und Festigkeit der ganzen höhern Analysis hängt davon ab, dass das Bildungsgesetz der Binomial-Coefficienten, als schlechthin, d. h. für jedes

Glied gültig bewiesen wird. Beschränkt man sich auch in den meisten Untersuchungen auf die ersten Glieder, so liegt doch sehr viel daran, dass man weiss, ob das Gesetz für alle Glieder gelte oder nicht, und alle Schlüsse, die man aus dieser Reihe allgemein zieht, beruhen zuletzt auf dieser Einsicht.

§. 26.

Allgemeine Gültigkeit der Binomial-Reihe.

Nach dem bekannten Gesetze der Convergenz der Reihen bleibt die Binomial-Reihe:

$$(1+x)^{\mu} = 1 + \mu x + \frac{\mu \cdot \mu - 1}{1 \cdot 2} x^2 + \dots$$

für alle Werthe von x convergent, die kleiner oder gleich 1 sind. Denn die nachfolgenden Glieder werden zwar immer durch grössere Zahlen $(n+1)$ dividirt, aber dafür tritt auch im Zähler ein neuer Factor $(\mu - n)$ ein, der für beliebig grosse Werthe von n beliebig gross wird, da μ gegen n in den aufeinanderfolgenden Gliedern sehr bald beliebig klein wird. Dividirt man den Coefficienten des n^{ten} Gliedes durch den des $(n+1)^{\text{ten}}$ Gliedes, so erhält man: $\frac{n+1}{\mu - n}$, der sich für beliebig grosse Werthe von n der Einheit nähert. Die Coefficienten nehmen daher für unendlich grosse n nicht mehr ab. Wäre nun x grösser als 1, so würden für unendlich grosse Werthe von n die aufeinanderfolgenden Glieder zwar im Zeichen wechseln, aber doch nicht abnehmen, und also für eine Berechnung unbrauchbar sein.

Uebrigens ist die Grenze $x = 1$ nicht so klein, wie es den Anschein hat. Denn erhebt man $(a+b)^{\mu}$, so ist $(a+b)^{\mu} = a^{\mu}\left(1 + \frac{b}{a}\right)^{\mu}$, und $x = \frac{b}{a}$, also für die Grenze $1 = \frac{b}{a}$ oder: $a = b$. Dieses heisst: Erhebt man eine zweitheilige Grösse $(a+b)$ zu irgend einer Potenz, oder zieht man irgend eine Wurzel aus, so erhält man nur dann eine brauchbare Reihe, wenn der zweite Theil b nicht grösser als a ist. Wäre $b > a$, so müsste man durch Versetzung von a und b aus $(a+b)$ das Binomium $(b+a)$ bilden, und $(b+a)^{\mu} = b^{\mu}\left(1 + \frac{a}{b}\right)^{\mu}$ setzen, wodurch nun $\frac{a}{b} < 1$ wird.

Diess ist der Sinn der Convergenz. Ist a z. B. $=1000$, so bleibt auch für b bis zur Grenze $b=1000$ die Reihe convergent.

Falsche Resultate würde man dann nur unter der Bedingung erhalten, wenn man einerseits $(a+b)^\mu$ und andrerseits $(b+a)^\mu$ erheben und eine endliche Anzahl von Gliedern dieser Reihe einander gleich setzen wollte. Solche Resultate werden gegen die allgemeine Gültigkeit der binomischen Reihe nicht wohl aufgeführt werden können. Allein nicht das ist der Grund des Irrthums, dass man die Reihe $(a+b)^\mu$ und $(b+a)^\mu$ nach der binomischen Reihe entwickelt, sondern dass man eine endliche Anzahl von Gliedern der einen unendlichen Reihe der nämlichen endlichen Anzahl von Gliedern der andern unendlichen Reihe gleich setzt, was niemals geschehen darf, weder in der niedern noch in der höhern Analysis, da nur die Summen aller Glieder von beiden Reihen einander gleich sind.

Kann man nun diese Summen aller Glieder nicht berechnen, was für $(a+b)^\mu$ (wenn μ nicht eine ganze positive Zahl ist) statt findet, wenn $b>a$, so wird die Reihe zu diesem Zwecke unbrauchbar; aber sie ist nicht falsch, denn ihr Bildungsgesetz ist richtig, und wird ohne Bedenken augenblicklich angewendet, wenn man für $b>a$ statt $(a+b)^\mu$ nun $(b+a)^\mu$ entwickelt.

Die für $(1+x)^\mu$ gefundene Reihe ist daher für alle Werthe von x richtig, aber nicht für alle brauchbar, sondern nur für solche, die gleich oder kleiner als 1 sind.

§. 27.

Andere Schreibart für die Reihe $(a+b)^\mu$.

Es ist:

$$(a+b)^\mu = a^\mu\left(1+\frac{b}{a}\right)^\mu = a^\mu\left(1+\mu\frac{b}{a}+\frac{\mu.\mu-1}{2}\frac{b^2}{a^2}+..\right)$$

$$(a+b)^\mu = 1a^\mu+\mu a^{\mu-1}b+\mu.\mu-1\,a^{\mu-2}\frac{b^2}{2}+$$

$$+\mu.\mu-1.\mu-2a^{\mu-3}\frac{b^3}{2.3}+\ldots$$

Bezeichnet man die Coefficienten 1, μ, $\mu.\mu-1$ etc. mit A_0, A_1, A_2 .. A_ν, so ist:

$$(a+b)^\mu = a^\mu + \mu A_0 a^{\mu-1} b + (\mu-1) A_1 a^{\mu-2} \frac{b^2}{2} +$$
$$+ (\mu-2) A_2 a^{\mu-3} \frac{b^3}{2.3} + \ldots$$
$$+ \mu-(n-1) A_{\nu-1} a^{\mu-n} \frac{b^n}{2.3.4..n} + \ldots.$$

Dieses Ableitungsgesetz der Coefficienten ist eben so schön als einfach. Man erhält die Coefficienten eines jeden nachfolgenden Gliedes, wenn man den Coefficienten des vorhergehenden Gliedes mit dem ihm entsprechenden Exponenten von a multiplicirt.

Dieses Gesetz lässt sich auch anders aussprechen:

1) Entwickelt man $(a+b)^\mu$, so erhält man den ersten Coefficienten der Reihe $=\mu$, und als zweites Glied: $\mu A_0 a^{\mu-1} b = \mu a^{\mu-1} b$.

2) Würde man nun in $\mu a^{\mu-1} b$ statt a setzen: $(a+b)$, und nun $\mu(a+b)^{\mu-1} b$ entwickeln, so erhielte man als ersten Coefficienten dieser Reihe: $\mu . \mu - 1$, und als zweites Glied: $\mu . \mu - 1 . a^{\mu-2} b^2$, welches mit dem dritten Gliede der Reihe $(a+b)^\mu$ bis auf den Nenner 2 übereinstimmt.

3) Würde man in $\mu . \mu - 1\, a^{\mu-2} b^2$ statt a setzen: $(a+b)$, und $\mu . \mu - 1\, (a+b)^{\mu-2} b^2$ entwickeln, so erhielte man als ersten Coefficienten $\mu . \mu - 1 . \mu - 2$, und als zweites Glied: $\mu . \mu - 1 . \mu - 2\, a^{\mu-3} b^3$, welches mit dem vierten Gliede der Reihe $(a+b)^\mu$ und mit dem dritten Gliede der Reihe $\mu(a+b)^{\mu-1} b$ bis auf die Nenner, die unter b^3 zu stehen kommen, übereinstimmte.

4) Würde man nun wieder $\mu . \mu - 1 . \mu - 2 a^{\mu-3} b^3$ auf die angegebene Weise entwickeln, so erhielte man als ersten Coefficienten einen Werth, der mit dem vierten Coefficienten der Reihe $(a+b)^\mu$, mit dem dritten Coefficienten der Reihe $\mu(a+b)^{\mu-1} b$, und mit dem zweiten Coefficienten der Reihe $\mu . \mu - 1 (a+b)^{\mu-2} b^2$ übereinstimmte, und dieses Gesetz gilt für alle nachfolgenden Glieder, da das Bildungsgesetz der Binomial-Coefficienten allgemein bewiesen ist, und das dargestellte Gesetz nur als eine andere Ausdrucksweise desselben gelten kann.

Daraus folgt, dass man im Stande wäre, die ganze Reihe $(a+b)^\mu$ zu entwickeln, auch wenn man jedesmal nur den ersten Coefficienten der binomischen Reihe anzugeben vermöchte. Denn

aus dem ersten Coefficienten der Reihe $(a+b)^\mu$ folgt: $\mu a^{\mu-1}b$, aus dem ersten Coefficienten der Reihe $\mu.(a+b)^{\mu-1}b$ folgt: $\mu.\mu-1\,a^{\mu-2}b^2$, aus dem ersten Coefficienten der Reihe $\mu.\mu-1(a+b)^{\mu-2}b^2$ folgt: $\mu.\mu-1.\mu-2\,a^{\mu-3}b^3$ u. s. w. Dividirte man diese Glieder der Reihe nach durch 1, durch 2, durch 3, .. durch n, so erhielte man: a^μ, $\mu a^{\mu-1}b$, $\mu.\mu-1.a^{\mu-2}\frac{b^2}{2}$; $\mu.\mu-1.\mu-2a^{\mu-3}\frac{b^3}{2.3}$, .. $\mu.\mu-1\ldots\mu-(n-1)a^{\mu-n}\frac{b^n}{2.3..n}$; welches genau die aufeinanderfolgenden Glieder der Reihe sind:

$$(a+b)^\mu = a^\mu + \mu a^{\mu-1}b + \mu.\mu-1\,a^{\mu-2}\frac{b^2}{2} + \\ + \mu.\mu-1.\mu-2\,a^{\mu-3}\frac{b^3}{2.3} + \ldots.$$

Für die Berechnung der Binomial-Coefficienten, die ohnehin keine Schwierigkeit hat, wäre es nicht der Mühe werth, dieses Gesetz in dieser Form in Anwendung zu bringen. Sollte es sich aber zeigen, dass diess Gesetz in dieser Form der allgemeine Ausdruck der Differenzial-Reihe ist, dann ist es allerdings der Mühe werth, dieses Gesetz aufzustellen, um so mehr als die Entwicklung aller Glieder auf der Durchführung einer einzigen und nämlichen Operation beruht, nämlich auf der Auffindung des ersten Coefficienten, d. h. des Coefficienten des zweiten Gliedes der Binomial-Reihe, so dass man für unendlich viele Glieder nicht unendlich viele Regeln, sondern für unendlich viele Glieder nur eine einzige aus dem Operationsgesetz abzuleitende Regel zu befolgen hat, was unter allen Umständen ein unermesslicher Gewinn ist.

Zusatz. Der binomische Lehrsatz, welcher die Reihen-Entwicklung der Potenzen nach ganzen positiven Exponenten giebt, wurde von Newton aufgestellt, und vertrat anfangs, ehe man noch die transcendenten Functionen differenziren konnte, ganz die Stelle des Differenzial-Calculs. Er ist auch jetzt noch die Grundlage dieser Wissenschaft, und als solche muss er mit aller Strenge und Allgemeinheit behandelt werden.

Die binomische Reihe $(a+b)^\mu$ wird nach ganzen positiven Exponenten von b entwickelt. Dasselbe gilt auch von der Differen-

zial-Reihe, denn man kennt wohl ein erstes, zweites, ... n^{tes} Differenzial, nicht aber ein $\left(\frac{m}{n}\right)^{\text{tes}}$, auch nicht ein $(-n)^{\text{tes}}$ Differenzial. — Es giebt eine unbestimmt allgemeine, aber mehr empirische als apriorische Reihen-Bildung, in der auch gebrochene und negative Exponenten möglich sind, wie wir z. B. bei der Function *arc sec x* gesehen haben. In der Differenzial-Reihe sind solche Exponenten ein für allemal ausgeschlossen. Da nun die Potenzial-Reihe die Entwicklung der einfachsten Function nach ganzen positiven Potenzen giebt, so erscheint sie als das wahre Element der Differenzial-Reihe, und es ist der Mühe werth, sie vollständig zu erforschen, da von ihrer Festigkeit und Sicherheit das ganze nachfolgende Gebäude der Wissenschaft abhängig sein wird.

Ueberdiess kann jede Function, sie mag algebraisch oder transcendent sein, in einer endlichen oder unendlichen Reihe von monomischen Potenzen gegeben werden, so dass die Potenzen auch in dieser Hinsicht als die einfachsten Elemente aller Functionen erscheinen. So weit daher ihre Allgemeinheit reicht, wird auch die Allgemeinheit der übrigen Functionen reichen.

ZWEITE ABTHEILUNG.

DIE TECHNIK DER DIFFERENZIAL-OPERATIONEN.

Cap. IV.

Der Differenzial-Lehrsatz für Functionen von nur einer veränderlichen Grösse.

§. 28.

Zunahme und Abnahme der veränderlichen Grössen.

Der Differenzial-Calcul hat das System der Veränderungen zu untersuchen, die eine Function erleidet, wenn ihre veränderlichen Grössen um beliebige Grössen durch Addition oder Subtraction vermehrt oder vermindert werden.

Wir betrachten zuerst solche Ausdrücke, die Functionen von nur einer veränderlichen Grösse sind.

Ist y eine Function von x, $y = fx$, so nennt man die Grösse x die unabhängig Veränderliche, während y die abhängig Veränderliche genannt wird. Wird z. B. in der Function $y = x^{\mu}$ die Grösse x um eine beliebige Grösse α vermehrt oder vermindert, so geht y in $y + \omega$ über, worin ω positiv oder negativ sein kann, aber immer abhängig ist von den Werthen x und α.

Der Natur der Sache nach hindert aber nichts, dass nicht auch durch Umkehrung oder Auflösung der Function die Grösse x als Function von y erscheint, $x = \varphi y$, wo dann y die unabhängig und x die abhängig Veränderliche genannt wird.

In jeder Function $y = fx$ geht y, wenn x um α vermehrt wird, in die Form $y + \omega$ über, so dass ω, die abhängige Zunahme von y, jederzeit als durch $+$ (oder $-$) mit y verbunden erscheint.

Denn ist $y=fx$, und wird x um α vermehrt, so geht y in y_1 über, so dass: $y_1=f(x+\alpha)$. Wird $\alpha=0$, so bleibt wieder $y=fx$, d. h. y_1 geht in y über. Es muss daher $f(x+\alpha)$ aus zwei Gliedern bestehen, deren eines fx und deren anderes eine Function oder eine Reihe von Functionen ist, die sämmtlich α oder Functionen von α zu Factoren haben. Wäre in $f(x+\alpha)$ kein von α unabhängiges Glied, so ginge $f(x+\alpha)$ für $\alpha=0$ nicht in fx, sondern in Null über, was unmöglich ist, da fx nicht $=0$, sondern $=y$ ist.

Es ist daher immer, wenn $y=fx$ gegeben ist, $y+\omega=f(x+\alpha)$, und ω ist das ganze System der Zunahme der Function $y=fx$.

Diese Grösse ω werde ich schlechthin die ganze Zunahme der Function y nennen.

§. 29.

Der Differenzial-Lehrsatz für Potenzen.

Da die Gesetze des binomischen Lehrsatzes allgemein bewiesen sind, so können wir das System der Veränderungen der Function: $y=x^\mu$ auf's Vollständigste bestimmen.

Ist $y=x^\mu$ und wird x um α vermehrt, so ist:

$$y+\omega=x^\mu+\mu x^{\mu-1}\alpha+\mu.\mu-1\,x^{\mu-2}\frac{\alpha^2}{2}+$$

$$+\mu.\mu-1.\mu-2x^{\mu-3}\frac{\alpha^3}{2.3}+\ldots$$

und auf beiden Seiten $y=x^\mu$ subtrahirt:

$$\omega=\mu x^{\mu-1}\alpha+\mu.\mu-1\,x^{\mu-2}\frac{\alpha^2}{2}+\mu.\mu-1.\mu-2x^{\mu-3}\frac{\alpha^3}{2.3}+..$$

Die Zunahme ω ist eine (endliche oder unendliche) Summe wohlgeordnet aufeinanderfolgender Glieder, die sämmtlich nach apriorischen Regeln von einander unterschieden werden können. Und zwar ist das erste Glied dieser Zunahme dasjenige, das α in der ersten Potenz zum Factor, das zweite, das α in der zweiten und allgemein das n^{te}, das α in der n^{ten} Potenz zum Factor hat.

§. 30.

Bezeichnungen von α und ω und Definitionen dieser Zeichen.

In der Analysis ist die Bezeichnung der Grössen fast so wichtig, wie ihre Bestimmung selbst, denn eine gute Bezeichnung fördert den Calcul, eine schlechte hemmt ihn. Man darf dabei nur an die La Grange'schen Bezeichnungen der abgeleiteten Functionen denken, die ihrem berühmten Urheber und Anderen Hindernisse genug bereitet haben.

Würde man nun willkührlich die Vermehrung der Grösse x mit α, oder der Grösse z mit β, oder der Grösse v mit γ u. s. w. bezeichnen, so könnte man es den Zeichen α, β, γ... selbst nicht ansehen, dass sie Vermehrungen von x, z, v.. seien, sondern diess müsste erst jedesmal bemerkt werden. Bezeichnet man sie aber mit dx_x, dz_z, dv_v.., so sieht man es ihnen an, dass sie sich als Zunahmen beziehungsweise auf x, z, v.. beziehen, und zwar als willkührliche, also nicht abhängige Zunahmen der unabhängig Veränderlichen x, z, v.., was durch den jedesmaligen Index dx_x, dz_z, dv_v.. ausgedrückt wird. Darauf lässt sich ein schlechthin allgemeiner Calcul gründen. — Freilich hat man dafür die Unbequemlichkeit hinzunehmen, dass die Zeichen dx_x, dz_z, dv_v.. als Producte zweier Grössen, d und x_x etc., erscheinen, während sie diess nicht sind, da sie nur eine einzige Grösse, die willkührliche Zunahme von x, d. h. α, oder von z, d. h. β etc. sind, und darum auch streng genommen als ein einfacher Buchstabe geschrieben werden sollten. Da man aber durch einen einzigen Buchstaben die andern oben angeführten Vortheile nicht erzielen kann, so wählt man diese Bezeichnungsart, die nach der vorausgehenden Erklärung keinem Missverständnisse unterworfen sein kann und die ausserdem viele analytische Vortheile darbietet. — Ein anderer ganz entscheidender Vorzug dieser Bezeichnungsart wird später an seinerStelle besprochen werden.

Zusatz 1. Es ist als ein grosses Glück zu betrachten, dass diese Bezeichnungsart sogleich beim Ursprunge des Differenzial-Calculs, wiewohl aus andern Gründen, und auch in minder strenger

Form, einfach als dx, dz, dv.. eingeführt worden ist. Dadurch bleiben Zeichen und Calcul ganz dieselben, wie sie seit fast 200 Jahren gewesen sind, und nur die Erkenntniss dessen, was durch die gewöhnlichen Zeichen bezeichnet wird, wird eine andere werden. Denn wir betrachten und beweisen die Grössen dx_x, dy_y, dz_z.. als durchaus endliche und messbare Grössen.

Zusatz 2. Es wird sich später zeigen, dass die strenge Bezeichnung dx_x, dy_y, dz_z.. überflüssig ist, indem dx_x auch dx_y, dx_z u. s. w. im Calcul vertreten kann, so dass der Gebrauch des einfachen Zeichens dx (ohne Index) gerechtfertigt ist. Bis wir jedoch diesen spätern Satz beweisen können, müssen wir vorerst auf unsrer strengen Bezeichnungsart beharren.

Zusatz 3. Die abhängige ganze Zunahme von y, d. h. die Grösse ω, bezeichnen wir durch Δy_x, wo der Index x anzeigt, dass y als Function von x genommen wird, so dass Δy_x von x und dx abhängig ist. Diese Grösse ω darf nicht durch dy_x, nicht durch dy_y, nicht durch Δy_y bezeichnet werden. Denn dy_x drückte nach der Analogie von dx_x nur ein einziges Glied aus, während die ganze Zunahme von y selbst unendlich viele Glieder haben kann; dy_y drückte die constante Zunahme der unabhängig Veränderlichen y aus, während ω die im Allgemeinen veränderliche Zunahme der abhängig Veränderlichen y ausdrückt, und Δy_y drückte die ganze Zunahme von y aus, wo y nur als ihre eigene Function $y=y$ genommen würde. — Ein anderes Zeichen als d, nämlich das Zeichen Δ (d. h. Δy_x) ist nothwendig, da ω die ganze veränderliche Zunahme der abhängigen Function y bezeichnet, und diess etwas ganz Anderes ist, als die willkührliche Zunahme der unabhängig Veränderlichen, die nur aus einem einzigen Gliede (und aus einer einzigen Operation) besteht.

Zusatz 4. Die Grössen dx_x, dy_y, dz_z,.. sind als willkührliche Vermehrungen der unabhängig Veränderlichen x, y, z.. constante Grössen, während Δx_y, Δx_z.. Δy_x, Δy_z.. Δz_x, Δz_y... im Allgemeinen veränderliche Grössen sind, da sie die ganze Zunahme der Functionen x, y, z.. bezeichnen, wenn x als Function von y, z.., y als Function von x, z.. und z als Function von x, y.. betrachtet werden.

Die Grössen dx_x, dy_y etc. könnten nur dann als veränderliche Grössen gelten, wenn man den Index x in y, z.. verwandelte, aber dann nähme man x schon als Function einer andern Veränderlichen, etwa $x = qy$, $x = \psi z$.., und dann müsste dx_x nicht in dx_y, sondern in Δx_y, dx_z in Δx_z etc. unmittelbar verändert werden; denn was in diesem Falle dx_y, dx_z .. ausdrücken, das muss erst noch ermittelt werden.

Ist x als unabhängig Veränderliche gegeben, so ist dx_x unmittelbar willkührlich, d. h. unabhängig, also constant. Es wäre überflüssig, hier schon den Fall mit einschliessen zu wollen, dass bei Veränderungen des Problems die Grösse x auch als abhängig Veränderliche erscheine, also dass dx_x in Δx_y (nicht in dx_y) übergehen könne. Diese Transformationen werden schon an ihrer Stelle zum Vorschein kommen. Dort müssen sie bestimmt werden. So lange aber x als unabhängig Veränderliche genommen wird, ist auch dx_x constant, und die Veränderungen von y, die aus solchen constanten Zunahmen von x hervorgehen, sind zuerst zu bestimmen. Dasselbe gilt von dy_y, dz_z u. s. w.

Zusatz 5. In den Zeichen des Differenzial-Calculs angeschrieben, geht also die Reihe, die aus $y = x^\mu$ abgeleitet wird, in folgende über:

$$y + \Delta y_x = x^\mu + \mu x^{\mu-1} dx_x + \mu.\mu-1\, x^{\mu-2} \frac{dx_x^2}{2} + \\ + \mu.\mu-1.\mu-2.x^{\mu-3} \frac{dx_x^3}{2.3} + \ldots$$

oder:

$$\Delta y_x = \mu x^{\mu-1} dx_x + \mu.\mu-1\, x^{\mu-2} \frac{dx_x^2}{2} + \\ + \mu.\mu-1.\mu-2\, x^{\mu-3} \frac{dx_x^3}{2.3} + ..$$

Hier wird es nun wohl keinem Menschen einfallen, die Grösse dx_x oder Δy_x als unendlich kleine Grössen, oder als Grenzwerthe und dergleichen anzusehen. Im Gegentheile wissen wir, dass die Reihe für alle Werthe von dx_x gelte, und dass sie für die Berechnung brauchbar bleibe für alle Werthe von dx_x, die zwischen der Grenze $\pm x$ liegen. Da x beliebig gross sein kann, so kann auch dx_x und also auch Δy_x beliebig gross sein.

§. 31.

Definition des Differenzirens.

Differenziren heisst das *erste* Glied der Zunahme einer Function y finden, wenn ihre veränderliche Grösse x um eine beliebige Grösse dx_x vermehrt wird. Das erste Glied der Zunahme ist aber derjenige Ausdruck, der dx_x in der ersten Potenz zum Factor hat. Dieser Ausdruck heisst auch das erste Differenzial der Function y, und öfter auch schlechthin das Differenzial von y.

Ist $y = x^\mu$ gegeben, so ist:

$$\Delta y_x = \mu x^{\mu-1} dx_x + \mu . \mu - 1 x^{\mu-2} \frac{dx_x^2}{2} + ..;$$

es ist daher in diesem Falle das erste Glied der Reihe Δy_x offenbar: $\mu x^{\mu-1} dx_x$, und dieser Ausdruck wird das erste Differenzial von x^μ genannt. Aus x^μ die Grösse $\mu x^{\mu-1} dx_x$ finden, heist x^μ differenziren.

Der Kürze halber bezeichnet man den Ausdruck $\mu x^{\mu-1} dx_x$ mit $d(y)$ oder kurz mit dy_x, wenn die Function von x, hier x^μ, durch y bezeichnet wird.

Zusatz. 1. Man kann hier vielleicht, noch befangen durch alte Vorurtheile, einwenden, dass auch hier, wie beim gewöhnlichen Differenzial-Calcul, wenn differenzirt wird, alle Glieder weggeworfen werden, die dx_x in höheren Potenzen enthalten. Dem ist nicht so. Denn dy_x bezeichnet nur das erste Glied in der Reihe der Zunahme; die andern Glieder werden nicht weggeworfen, sondern beibehalten, zwar nicht als erstes Glied, sondern als die Glieder, die sie sind. Zum ersten Gliede braucht man eben nicht mehr und nicht weniger, als nur das erste Glied, gerade so wie man zum zweiten oder n^{ten} Gliede nur das zweite oder n^{te} Glied braucht.

Ganz anders wäre es, wenn wir sagten: Δy_x geht einfach in dy_x über. Das ist aber nicht der Fall. Denn Δy_x bleibt, was es ist (wie es auch nicht anders sein kann), und eben so bleibt dy_x, was es ist, nämlich das erste Glied in der Reihe Δy_x, und auch die übrigen Glieder bleiben, was sie sind.

In den Zeichen des Differenzirens angeschrieben, ist, wenn $y=x^{\mu}$,

$$\Delta y_x = dy_x + \mu.\mu-1\frac{dx_x^2}{2} + \mu.\mu-1.\mu-2\frac{dx_x^3}{2.3} + \ldots$$

Zusatz 2. Potenzen kann man also sehr leicht differenziren. Man macht den Exponenten zum Coefficienten des Differenzials, vermindert den Exponenten der Potenz um 1 und multiplicirt diess Product mit dx_x. So ist $d(x^3)=3x^2dx_x$, $d\left(x^{\frac{1}{3}}\right)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx_x$, etc. Dabei vernachlässigt man nichts, sondern indem man differenzirt, will man nach dem Begriffe des Differenzirens nur das erste Glied der Zunahme; will man aber nach dem Begriffe der Reihe Δy_x die ganze Reihe, so muss man sie ganz suchen, indem das erste Glied dy_x nur ihr erstes Glied, nicht die ganze Reihe ist. Die Operation $dy_x = d(x^{\mu}) = \mu x^{\mu-1}dx_x$ gilt ganz allgemein, so gross oder so klein dx_x sein möge.

§. 32.

Differenzial der Function $y=ax^{\mu}+b$.

Lehrsatz I. Ist die Function x^{μ} mit einer constanten Grösse durch Addition oder Subtraction verbunden, also $y=x^{\mu}\pm C$, so ist ihr Differenzial ganz und gar dasselbe wie das Differenzial von x^{μ}.

Beweis. Wird x um dx_x vermehrt, so entsteht:

$$y+\Delta y_x = (x+dx_x)^{\mu}+C$$

$$= C + x^{\mu} + \mu x^{\mu-1}dx_x + \mu.\mu-1\,x^{\mu-2}\frac{dx_x^2}{2} + \ldots$$

oder $y=C+x^{\mu}$ subtrahirt:

$$\Delta y_x = \mu x^{\mu-1}\,dx_x + \mu.\mu-1\,x^{\mu-2}\frac{dx_x^2}{2} + \ldots$$

Der Ausdruck $\mu x^{\mu-1}dx_x$ ist das erste Differenzial, weil er dx_x in der ersten Potenz zum Factor hat, und dieser Ausdruck stimmt ganz mit dem ersten Differenzial von x^{μ} überein.

Zusatz. Diesen Lehrsatz kann man auch so ausdrücken, dass das Differenzial einer constanten Grösse gleich Null ist. In

der That ist auch für eine constante Grösse nicht bloss das Differenzial, sondern die ganze Reihe Δy_x gleich Null. Denn ist $y = C$, so wird, da C als constante Grösse nicht vermehrt werden kann, $y + \Delta y = C$, oder $y = C$ subtrahirt: $\Delta y = 0$, und also auch jedes einzelne Glied der allgemeinen Reihe Δy gleich Null.

Lehrsatz II. Hat die Function x^μ eine constante Grösse zum Factor, ist also $y = ax^\mu$, so unterscheidet sich ihr Differenzial vom Differenzial x^μ nur durch den constanten Factor a, d. h. ist $d(x^\mu) = \mu x^{\mu-1} dx_x$, so ist $d(ax^\mu) = a\mu . x^{\mu-1} dx_x$.

Beweis. Ist $y = ax^\mu$, so wird:

$$y + \Delta y_x = a(x + dx_x)^\mu =$$

$$= a\left(x^\mu + \mu x^{\mu-1} dx_x + \mu . \mu - 1\, x^{\mu-2} \frac{dx_x^2}{2} + \ldots\right)$$

$$= ax^\mu + a\mu x^{\mu-1} dx_x + a\mu . \mu - 1 . x^{\mu-2} \frac{dx_x^2}{2} + \ldots$$

oder $y = ax^\mu$ subtrahirt:

$$\Delta y_x = a\mu x^{\mu-1} dx_x + a\mu . \mu - 1 . x^{\mu-2} \frac{dx_x^2}{2} + \ldots$$

und das erste Differenzial ist: $a\mu x^{\mu-1} dx_x$, weil diess Glied allein den Factor dx_x in der ersten Potenz enthält. Diess war auch zu beweisen.

Zusatz. Daraus merkt man sich die Abkürzungsregel für das Differenziren, dass, wenn eine Potenz einen constanten Factor hat, ihr Differenzial gerade so gefunden wird, wie das der einfachen Potenz, nur wird dieses noch mit dem constanten Factor multiplicirt. Aus diesem Grunde wird es auch durch dasselbe Zeichen dy_x ausgedrückt.

Diese Lehrsätze geben uns die Mittel an die Hand, die Hauptreihe Δy_x in einfachen und allgemeinen Operations-Ausdrücken zu geben.

§. 33.

Allgemeiner Ausdruck der Reihe Δy_x.

1) Wir haben für $y = x^\mu$:

$$\Delta y_x = dy_x + \mu.\mu-1\frac{dx_x^2}{2} + \mu.\mu-1.\mu-2\frac{dx_x^3}{2.3} + \ldots$$

Betrachten wir $\mu.\mu-1\,x^{\mu-2}dx_x^2$ genauer, so finden wir, dass es nichts anderes ist, als das Differenzial des ersten Gliedes $\mu x^{\mu-1}dx_x$. Denn sondern wir die Constanten μdx_x ab, so ist nach Lehrsatz II:

$$d(\mu dx_x x^{\mu-1}) = \mu.dx_x.\mu-1\,x^{\mu-2}dx_x = \mu.\mu-1\,x^{\mu-2}dx_x^2,$$

d. h. wenn wir in $\mu dx_x\,x^{\mu-1}$ die Variable x um dx_x vermehren, und das erste Glied dieser Zunahme suchen, so finden wir $\mu.\mu-1\,x^{\mu-2}dx_x^2$.

Haben wir nun das erste Glied der Reihe Δy_x mit dy_x bezeichnet, so ist das zweite Glied der Reihe, abgesehen vom Nenner (2), durch $d(dy_x)$ zu bezeichnen, wofür man kurz d^2y_x schreibt. Aber d^2y_x ist nichts anderes, als das Differenzial des Differenzials von y. Man nennt auch d^2y_x das zweite Differenzial von y. Aber auch unter diesem Ausdrucke ist nichts anderes zu verstehen, als die gegebene Definition.

2) Die Hauptreihe wird demnach:

$$\Delta y_x = dy_x + \frac{1}{2}d^2y_x + \mu.\mu-1.\mu-2\,x^{\mu-3}\frac{dx_x^3}{2.3} + \ldots$$

Betrachten wir $\mu.\mu-1.\mu-2\,x^{\mu-3}dx_x^3$ genauer, so finden wir, dass dieser Ausdruck nichts anderes ist, als das Differenzial von d^2y_x. Denn sondern wir in d^2y_x die Constanten ab, und differenziren wir, d. h. suchen wir das erste Glied der Zunahme von der Function $\mu.\mu-1\,dx_x^2(x^{\mu-2})$, so finden wir:

$$\mu.\mu-1.dx_x^2.\mu-2\,x^{\mu-3}dx_x = \mu.\mu-1.\mu-2\,x^{\mu-3}dx_x^3,$$

was mit dem dritten Gliede der Hauptreihe bis auf den Nenner übereinstimmt. Da nun $\mu.\mu-1.\mu-2\,x^{\mu-3}dx_x^3$ das Differenzial von $\mu.\mu-1\,x^{\mu-2}dx_x^2$ ist, und dieses durch d^2y_x bezeichnet wird, so ist $\mu.\mu-1.\mu-2\,x^{\mu-3}dx^3$ durch $d(d^2y_x)$ zu bezeichnen, wo-

für man kurz d^3y_x schreibt, und kurz das dritte Differenzial der Function y spricht.

3) Die Hauptreihe wird nun:

$$\Delta y_x = dy_x + \frac{1}{2}d^2y + \frac{1}{2.3}d^3y + \\ + \mu.\mu-1.\mu-2.\mu-3\,x^{\mu-4}\frac{dx_x^4}{2.3.4} + \ldots$$

Es ist nicht schwer einzusehen, dass (abgesehen von dem Nenner) das vierte Glied nichts anderes als das Differenzial des dritten Gliedes ist. Das heisst: man findet das vierte Glied, wenn man das dritte Glied als neue Function nimmt, und diese differenzirt, d. h. *ihr* erstes Glied in der Reihe ihrer Zunahme sucht.

Es ist daher nach den Prinzipien der Bezeichnung:

$$\Delta y_x = dy_x + \frac{1}{2}d^2y_x + \frac{1}{2.3}d^3y_x + \frac{1}{2.3.4}d^4y_x + \ldots$$

4) Dieses Gesetz gilt für alle Glieder.

Denn es ist Oben im Cap. III. am Schlusse der binomischen Reihe nachgewiesen worden, dass (abgesehen von dem Nenner) jedes nachfolgende Glied aus dem ihm zunächst vorhergehenden auf dieselbe Art abgeleitet wird, wie dieses aus dem ihm zunächst vorhergehenden, und dass diess allgemein für alle Glieder gelte, weil das Gesetz der binomischen Reihe für alle Glieder bewiesen wurde. Anstatt des dort unbestimmten Ausdrucks: Ableiten, wird hier der bestimmte Ausdruck: Differenziren gesetzt, eine exacte und expedite Operation statt eines allgemeinen Ausdrucks, und ein bestimmtes und expedites Zeichen statt eines aus Mangel an bestimmter Bezeichnung allgemein gewählten Wortes.

In der That ist auch, abgesehen vom Nenner, das $n+1^{te}$ Glied:

$$\mu.\mu-1.\mu-2\ldots\mu-(n-1).\mu-n\,x^{\mu-(n+1)}dx_x^{n+1}$$

nichts anderes als das erste Differenzial des n^{ten} Gliedes:

$$\mu.\mu-1\ldots\mu-n-1\,x^{\mu-n}dx_x^n,$$

wie es sich augenblicklich durch wirkliche Differenzirung ergiebt.

Es gilt daher allgemein:

$$\Delta y_x = dy_x + \frac{1}{2}d^2y_x + \frac{1}{2.3}d^3y_x + \ldots \\ + \frac{1}{1.2..n}d^ny_n + \frac{1}{1.2..n.n+1}d^{n+1}y + \ldots$$

Der Vortheil besteht darin, dass man statt unendlich vieler Glieder von verschiedenen Ausdrücken nur eben so viele Glieder einer und derselben exacten Operation, nämlich der Operation des Differenzirens hat, so dass man eine einzige Operation an die Stelle von unendlich vielen verschiedenen Operationen gebracht hat, was die wahre mathematische Allgemeinheit ist. Die allgemeine Regel ist eine und dieselbe; die Beispiele und Anwendungen, die unter sie subsumirt werden können, sind unendlich viele, und man kann sie alle miteinander sehr einfach und ohne sonderliche Mühe behandeln, wenn man die eine allgemeine Regel kennt, die, weil sie eine ist, auch ohne Schwierigkeit gehandhabt werden kann.

Zusatz. Es muss ausdrücklich bemerkt werden, dass dieser Satz, wie er bewiesen ist, nur für constante dx_x gilt. Wie sich der Satz für veränderliche Δx_z gestalten wird, das wird an seinem Orte gezeigt werden.

Die obige Reihe Δy_x ist jedoch vorerst nur für die Function $y = x^\mu$ oder vermöge §. 32. für die Function $y = ax^\mu + C$ bewiesen. Es gilt nun, das Gesetz dieser schönen Reihe als ein für alle Functionen allgemein gültiges darzustellen.

§. 34.

Das Gesetz der Reihe Δy_x gilt allgemein für alle Functionen einer Veränderlichen x.

Dieses werden wir in folgenden Lehrsätzen beweisen.

Lehrsatz I. Das Differenzial der Summe von beliebig vielen potenziellen Functionen ist gleich der Summe der Differenzialien jeder einzelnen dieser Functionen.

Beweis. Ist $y = ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + .. nx^\nu + \ldots$, so geht, wenn x um dx_x vermehrt wird, die Function y in $y + \Delta y_x$ über, und es ist:

$$y + \Delta y_x = a(x + dx_x)^\alpha + b(x + dx_x)^\beta + c(x + dx_x)^\gamma + ..$$
$$+ n(x + dx_x)^\nu + ..$$

Entwickelt man diese Functionen, und schreibt sie so an, dass die Glieder, die zu gleichen Potenzen von dx_x gehören, unter

einander zu stehen kommen, fasst man dann alle zusammengehörigen Glieder wirklich zusammen, so erhält man:

$$y + \Delta y_x = ax^\alpha + a\alpha x^{\alpha-1} dx_x + a\alpha.\alpha-1\, x^{\alpha-2} \frac{dx_x^2}{2} + ..$$

$$bx^\beta + b\beta x^{\beta-1} dx_x + b\beta.\beta-1\, x^{\beta-2} \frac{dx_x^2}{2} + ..$$

$$cx^\gamma + c\gamma x^{\gamma-1} dx_x + c\gamma.\gamma-1\, x^{\gamma-2} \frac{dx_x^2}{2} + ..$$

. . . . . .

$$nx^\nu + n\nu x^{\nu-1} dx_x + n\nu.\nu-1\, x^{\nu-2} \frac{dx_x^2}{2} + ..$$

. . . . . .

$$y + \Delta y_x = (ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + .. nx^\nu + ..) +$$
$$+ (a\alpha x^{\alpha-1} + b\beta x^{\beta-1} + c\gamma x^{\gamma-1} + .. n\nu x^{\nu-1} + ..) dx_x +$$
$$+ (a\alpha.\alpha-1\, x^{\alpha-2} + b\beta.\beta-1\, x^{\beta-2} + ..$$
$$+ n\nu.\nu-1\, x^{\nu-2} + ..) \frac{dx_x^2}{2} + ..$$
$$+ . . . .$$

$$\Delta y_x = (a\alpha x^{\alpha-1} + b\beta x^{\beta-1} + c\gamma x^{\gamma-1} + .. n\nu x^{\nu-1} + ..) dx_x +$$
$$+ (a\alpha.\alpha-1\, x^{\alpha-2} + b\beta.\beta-1\, x^{\beta-2} + ..$$
$$+ n\nu.\nu-1\, x^{\nu-2} + ..) \frac{dx_x^2}{2} + ..$$

Nun ist dy_x das erste Glied in der Reihe der Zunahme Δy_x, d. h. das Glied, das dx_x in der ersten Potenz zum Factor hat, also:

$$dy_x = (a\alpha x^{\alpha-1} + b\beta x^{\beta-1} + c\gamma x^{\gamma-1} + .. n\nu x^{\nu-1} + ..) dx_x,$$

da alle übrigen Glieder dx_x in höheren Potenzen zu Factoren haben. Die Gleichung von dy_x ist also eine vollständige und adäquate. Die Grössen $a\alpha x^{\alpha-1} dx_x$, $b\beta x^{\beta-1} dx_x$, $c\gamma x^{\gamma-1} dx_x$ .. $n\nu x^{\nu-1} dx_x$.. sind aber einzeln die Differenzialien der Functionen ax^α, bx^β, cx^γ .. nx^ν ..., so dass durch:

$$dy_x = a\alpha x^{\alpha-1} dx_x + b\beta x^{\beta-1} dx_x + c\gamma x^{\gamma-1} dx_x + ..$$
$$+ n\nu x^{\nu-1} dx_x + ...$$

der ausgesprochene Lehrsatz bewiesen ist.

Lehrsatz II. Das zweite Glied in der Reihe Δy_x ist, abgesehen vom Zahlen-Nenner 2, das Differenzial des ersten Gliedes:

$$dy_x = a\alpha x^{\alpha-1} dx_x + b\beta x^{\beta-1} dx_x + \ldots$$

Beweis. Nach Lehrsatz I. findet man das Differenzial einer Summe von Potenzen, wenn man sie einzeln differenzirt. Differenzirt man nun:

$$dy_x = a\alpha dx_x x^{\alpha-1} + b\beta dx_x x^{\beta-1} + \ldots\ n\nu dx_x x^{\nu-1} + \ldots$$

so erhält man:

$$d^2y_x = a\alpha.\alpha-1\, x^{\alpha-1} dx_x^2 + b\beta.\beta-1\, x^{\beta-2} dx_x^2 + \ldots$$
$$+ n\nu.\nu-1\, x^{\nu-2} dx_x^2 + \ldots$$

und diess ist, abgesehen vom Nenner, genau das zweite Glied in der Reihe von Δy_x, was zu beweisen war.

Es ist daher, wenn $y = ax^\alpha + bx^\beta + \ldots nx^\nu + \ldots$

$$\Delta y_x = dy_x + \frac{1}{2} d^2y_x + \left.\begin{array}{l} a\alpha.\alpha-1.\alpha-2\, x^{\alpha-3} \\ b\beta.\beta-1.\beta-2\, x^{\beta-3} \\ c\gamma.\gamma-1.\gamma-2\, x^{\gamma-3} \\ \ldots\ldots \\ n\nu.\nu-1.\nu-2\, x^{\nu-3} \\ \ldots\ldots \end{array}\right\} \frac{dx_x^3}{2.3} + \ldots$$

Lehrsatz III. Dasselbe Gesetz gilt von allen aufeinanderfolgenden Gliedern, oder es ist allgemein, wenn $y = ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + \ldots nx^\nu + \ldots$

$$\Delta y_x = dy_x + \frac{1}{2} d^2y_x + \frac{1}{2.3} d^3y_x + \ldots \frac{1}{1.2\ldots n} d^n y_x + \ldots$$

Beweis. Da, abgesehen von den Zahlen-Nennern, jedes nachfolgende Glied aus einer Summe von Grössen besteht, die einzeln die Differenzialien der potenziellen Functionen sind, die im zunächst vorhergehenden Gliede enthalten sind, und da diess für einzelne potenzielle Functionen allgemein gilt, da ferner die Summe der einzelnen Differenzialien gleich dem Differenzial der ganzen Function ist, so folgt, da jedes nachfolgende Glied die Summe der Differenzialien der Summanden jedes vorhergehenden

Gliedes ist, dass es auch das Differenzial aller Summanden des vorhergehenden Gliedes, d. h. dass es das Differenzial des ganzen vorhergehenden Gliedes ist.

Da ferner der Satz §. 33 allgemein für alle Glieder der Reihe Δy_x gilt, so gilt auch Satz III. allgemein für alle Glieder, oder es ist, wenn $y = ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + .. nx^\nu + ..$

$$\Delta y_x = dy_x + \frac{1}{2}d^2y_x + \frac{1}{2.3}d^3y_x + .. \frac{1}{1.2...n}d^ny_x + ...$$

was zu beweisen war.

Zusatz 1. Dieser Lehrsatz gilt, gleich Lehrsatz §. 33, wie bemerkt wurde, nur für die Zunahme dx_x, d. h. für constante dx.

Zusatz 2. Die Reihe $\Delta y_x = dy_x + \frac{1}{2}d^2y_x + ..$ giebt jedoch nur in dem Falle ein brauchbares Resultat, wenn $ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + ..$ wirklich einem Ausdruck y, einer Summe, oder einer Function etc. gleich ist. Denn wäre diess nicht der Fall, so wüsste man von der Reihe $ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + ..$ nicht, ob sie eine Summe, eine Function gebe oder nicht, und dann könnte man nichts mit ihr anfangen. Ueberdiess muss man für einzelne Werthe von dx_x noch wissen, dass für sie der Ausdruck $(y + \Delta y_x)$ continuirlich bleibt. Denn würde $(y + \Delta y_x)$ discontinuirlich, so würde die Reihe zwar nicht unrichtig, aber unbrauchbar werden.

Lehrsatz IV. Dasselbe Gesetz gilt für jede Function einer veränderlichen Grösse $y = fx$, d. h. es ist allgemein:

$$\Delta y_x + dy_x + \frac{1}{2}d^2y_x + \frac{1}{2.3}d^3y_x + .. \frac{1}{1.2..n}d^ny_x + ...$$

Beweis. Eine jede Function, sie sei endlich oder unendlich, algebraisch oder transcendent, ist eine Summe von potenziellen Functionen, wie in Cap. II. gezeigt wurde, und es ist für sie ein Ausdruck y vorhanden, welcher der Summe der ganzen Reihe gleich ist, z. B. $log\, x$, $sin\, x$, $cos\, x$ etc. In der Regel enthalten sie sogar nur ganze positive Potenzen, und nur ausnahmsweise negative Exponenten, wie $cotg\, x$, $arc.sec\, x$ etc. Aber sie dürften selbst gebrochene und imaginäre Exponenten haben, der binomische

Satz und der auf diesen gegründete Differenzial-Lehrsatz würde doch für sie gelten.

Da nun im Lehrsatz III. bewiesen ist, dass die Reihe für Δy_x auch für die Summe von unendlich vielen potenziellen Functionen gilt, so folgt, dass die Reihe:

$$\Delta y_x = dy_x + \frac{1}{2}d^2y_x + \frac{1}{2.3}d^3y_x + .. \frac{1}{1.2..n}d^ny_x + \ldots$$

allgemein, für jede Function von x gelte.

Es ist daher für jede Function das erste Glied in der Reihe der Zunahme Δy_x gleich dy_x, das zweite Glied gleich $\frac{1}{2}d^2y_x$, d. h. gleich dem Differenzial des ersten Gliedes dividirt durch 2; das dritte Glied gleich $\frac{1}{2.3}d^3y_x$, d. h. gleich dem Differenzial des zweiten Gliedes dividirt durch 3, und allgemein das n^{te} Glied gleich dem Differenzial des $(n-1)^{ten}$ Gliedes dividirt durch n.

Zusatz. Es giebt zwar, wie wir in Cap. II. gesehen haben, Functionen, die nicht unmittelbar in Reihen von Potenzen entwickelt werden können, wie z. B. $\log x$, d. h. solche Functionen, in denen einer, mehrere oder alle constanten Coefficienten unendlich gross würden. Allein man führt eine willkührliche Constante ein, wie gezeigt wurde, und setzt $x = a + z$, und nun kann die Function für z in Potenzen entwickelt werden.

Substituirt man dann nach ausgeführter Reihe:

$$\Delta y_z = dy_z + \frac{1}{2}d^2y_z + .. \frac{1}{1.2..n}d^ny_z + ..$$

die Werthe $x - a = z$ und $dx = dz$ (indem sich x und z nur durch die Constante x unterscheiden), so hat man den allgemeinen Differenzial-Lehrsatz auch für die Variable x, d. h.

$$\Delta y_x = dy_x + \frac{1}{2}d^2y_x + \frac{1}{2.3}d^3y_x + .. \frac{1}{1.2..n}d^ny_x + \ldots$$

so dass dieser Satz ganz allgemein für alle Functionen und für alle Glieder der Reihe gilt, was zu beweisen war.

Zusatz. In der Reihe:

$$\Delta y_x = dy_x + \frac{1}{2}d^2y_x + \frac{1}{2.3}d^3y_x + .. \frac{1}{1.2..n}d^ny_x + \ldots$$

sind die Grössen dy_x, d^2y_x, .. d^ny_x ... nur erst die Symbole der noch auszuführenden Differenzial-Operationen. Wie diese bei den transcendenten Functionen wirklich ausgeführt werden, diess zu zeigen, ist die nächste Aufgabe der Wissenschaft. Denn bis jetzt weiss man nur, durch Hülfe des binomischen Lehrsatzes, wie Potenzen $y = ax^\mu + b$ differenzirt werden können.

§. 35.

Die Taylor'sche Reihe.

In der Reihe:

$$\Delta y_x = dy_x + \frac{1}{2}d^2y_x + \frac{1}{2.3}d^3y_x + .. \frac{1}{1.2..n}d^ny_x + ...$$

besteht bei der wirklichen Differenzirung jedes Glied dy, d^2y, d^3y, .. d^ny .. aus zwei Factoren. In dy_x ist der eine Factor dx_x, und der andere eine von dx_x unabhängige, nur von x bestimmte Function. Z. B. $d(x^m) = (mx^{m-1}) \times (dx_x)$.

Bezeichnen wir diese Function mit $f'x$, und nennen sie die erste abgeleitete Function, so wird: $dy_x = f'x\,dx_x$. Man findet daher die erste abgeleitete Function $f'x = \frac{dy_x}{dx_x}$, also aus einer Differenzial-Operation, in welcher die Zunahme dx_x als constant genommen wird.

Gleicherweise sind in analoger Bezeichnung:

$$d^2y_x = f''x\,dx^2;\quad d^3y_x = f'''x\,dx^3;\ ..\quad d^ny_x = f^\nu x\,dx^n;$$

so dass die zweiten, dritten, .. n^{ten} abgeleiteten Functionen sämmtlich aus Differenzial-Operationen gefunden werden;

$$f''x = \frac{d^2y_x}{dx_x^2};\ f'''x = \frac{d^3y_x}{dx_x^3};\ ..\ f^\nu x = \frac{d^ny_x}{dx_x^n}.$$

Man kann daher die Reihe auch folgendermassen anschreiben:

$$\Delta y_x = f'x\,dx_x + \frac{1}{2}f''x\,dx_x^2 + \frac{1}{2.3}f'''x dx_x^3 + .. \frac{1}{1.2..n}f^\nu x\,dx_x^n + ..$$

$$\Delta y_x = \frac{dy_x}{dx_x}dx_x + \frac{1}{2}\frac{d^2y_x}{dx_x^2}dx_x^2 + \frac{1}{2.3}\frac{d^3y_x}{dx_x^3}dx_x^3 + ..$$

$$+ \frac{1}{1.2..n}\frac{d^ny_x}{dx_x^n}dx_x^n + ..$$

Für constante dx_x dividiren sich die Factoren im Zähler und Nenner heraus, und die Reihe kehrt in die ursprüngliche Form zurück:

$$\Delta y_x = dy_x + \frac{1}{2}d^2y_x + \frac{1}{2.3}d^3y_x + \ldots \frac{1}{1.2..n}d^ny_x + \ldots$$

Allein für beliebig andere Zunahmen von x, wenn z. B. x um ω vermehrt wird, ω mag was immer für eine Grösse oder Function sein, ist allgemein:

$$\Delta y_\omega = \frac{dy_x}{dx_x}\omega + \frac{1}{2}\frac{d^2y_x}{dx_x^2}\omega^2 + \frac{1}{2.3}\frac{d^3y_x}{dx_x^3}\omega^3 + \ldots + \frac{1}{1.2..n}\frac{d^ny_x}{dx_x^n}\omega^n + \ldots$$

Beweis. Die Reihe für Δy_ω ist eine unendliche Reihen-Entwicklung, wie wir dergleichen viele in Cap. II. betrachtet haben. Die Function $\Delta y_\omega = f(x+\omega) - fx$ kann also unter den dort aufgestellten Bedingungen nach aufsteigenden Potenzen von ω entwickelt werden, und die Coefficienten der aufsteigenden Potenzen: ω, ω^2, ω^3, .. ω^n .. sind ganz und gar die nämlichen, welche Grösse auch ω sein möge. Hat man daher diese Coefficienten für eine Art der Grösse ω gefunden, wie wir sie bereits für $\omega = dx_x$ gefunden haben, so hat man sie allgemein. Diese Coefficienten: $f'x$, $f''x$, ... $f^\nu x$ ... findet man aber aus den leichten Differenzial-Operationen, $f'x = \frac{dy_x}{dx_x}$; $f''x = \frac{d^2y_x}{dx_x^2}$; $f'''x = \frac{d^3y_x}{dx_x^3}$; .. $f^\nu x = \frac{d^ny_x}{dx_x^n}$.

Es ist daher allgemein:

$$f(x+\omega) - fx = \frac{dy_x}{dx_x}\omega + \frac{1}{2}\frac{d^2y_x}{dx_x^2}\omega^2 + \ldots \frac{1}{1.2..n}\frac{d^ny_x}{dx_x^n}\omega^n + \ldots$$

Die Reihe in dieser wohl ziemlich unentwickelten Gestalt heisst die Taylor'sche Reihe, und hat ihren Namen von ihrem Erfinder Taylor. — Sie gilt allgemein, so lange die in Cap. II. für unendliche Reihen-Entwicklungen gegebenen Regeln eingehalten werden. Weil nämlich diese Reihe nach ganzen, aufsteigenden und positiven Potenzen von ω entwickelt wird, so muss die Function $f(x+\omega) - fx$ in einem die Null einschliessenden Intervalle continuirlich sein, und darf in diesem Intervall keine

gebrochene oder negative Potenz enthalten. Soll noch überdiess die Reihe für die wirkliche Berechnung brauchbar werden, so muss sie convergiren.

§. 36.

Allgemeine Bemerkung.

Ueberhaupt darf bemerkt werden, dass zwischen der Differenzial-(Taylor'schen) Reihe, und zwischen der allgemeinen Reihe, wie wir sie Cap. II. gefunden haben, kein anderer Unterschied besteht, als dass die Auffindung der allgemeinen Reihe nach Cap. II. zwar einer allgemeinen Regel, aber keiner allgemeinen Operation unterworfen ist, so dass bei der wirklichen Aufstellung jeder Reihe für jede einzelne die Operation erst einzeln und gleichsam empirisch gemacht werden muss — es ist ein Verfahren nach einer allgemeinen Norm, für die in jeder Function erst besonders ermittelt werden muss, wie sie angewendet werden soll — während in der Taylor'schen Reihe die Entwicklung der nämlichen Reihen zwar auch einer allgemeinen Norm, aber noch überdiess einer allgemeinen Operation (Differenzirung) unterworfen ist. Die Taylor'sche Reihe hat also das voraus, dass sie neben der Norm, $f'x$, $f''x$.., auch die Operation $\frac{dy_x}{dx_x}$, $\frac{d^2y_x}{dx_x^2}$.. giebt, vorausgesetzt, dass man allgemein differenziren kann, was man in der That auch immer kann.

Was in der Kürze der energischen Differenzial-Operationen unmittelbar gegeben ist, das muss man nach dem allgemeinen Verfahren des Cap. II. erst mühsam zusammensuchen. Diess ist zwar ein grosser, aber auch der ganze Unterschied. Ein anderer Unterschied besteht nicht, und so wie in den Reihen des Cap. II. alle Grössen endlich und messbar sind, so sind auch in der Taylor'schen und in der Differenzial-Reihe alle Grössen, dy_x, d^2y_x,.. dx_x, ω, ω_2,.. endlich und messbar, und zwar die Grössen selbst, nicht etwa bloss ihre Quotienten: $\frac{dy_x}{dx_x}$, $\frac{d^2y_x}{dx_x^2}$.., denn es wäre doch sonderbar, wenn ein Quotient, z. B. $\frac{dy}{dx}$, einen endlichen Werth hätte, nicht aber sein Zähler einzeln und sein

Nenner einzeln. In unserer Ableitung sind diese einzelnen Werthe von dx und dy gegeben.

Da nun aber kein anderer Unterschied besteht, so gelten auch keine anderen Regeln für sie in Beziehung auf Gültigkeit und Anwendbarkeit als die allgemeinen Regeln der Analysis.

§. 37.

Ableitung dieses Satzes nach La Grange.

Um diesen Satz (den Taylor'schen) war es uns zu thun, und seinetwillen haben wir die ganze vorhergehende Entwicklung durchgeführt.

Diesen Satz stellt auch La Grange an die Spitze seiner Theorie der Functionen in einer leichten und von früheren Betrachtungen unabhängigen Deduction. Ist es nun erlaubt, dass wir uns den Beweis nicht auch so leicht gemacht haben? Wir hätten ja einfach alles Frühere übergehen und die Beweisführung von La Grange annehmen können.

Diese ist aber folgende:

1) Ist fx irgend eine Function einer veränderlichen Grösse x, und setzt man $(x+k)$ statt x, wo k irgend eine unbestimmte Grösse bezeichnet, so erhält man die Function: $f(x+k)$, welche nach der Theorie der Reihen in einer Reihe von der Form: $fx+pk+qk^2+rk^3+\ldots$ entwickelt werden kann, in welcher die Coefficienten p, q, $r\ldots$ neue Functionen von x sind, die von der Stammgrösse fx abgeleitet werden können, von der Grösse k aber unabhängig sind.

2) Obgleich die Form der Ableitungen insbesondere von der Form ihrer Stammgrösse abhängt, so findet doch eine allgemeine Abhängigkeit zwischen den Ableitungen statt, welche wir untersuchen wollen.

Man setze, die unbestimmte Grösse x gehe in $(x+e)$ über, wo e eine beliebige unbestimmte Grösse bedeutet, die von k unabhängig ist, so wird offenbar $f(x+k+e)$ aus Function $(x+e)$, auf dieselbe Art abgeleitet, wie $f(x+k)$ aus $f(x)$. Aber das Nämliche erhält man auch, wenn man in $f(x+k)$ statt k die Grösse $(k+e)$ setzt. Dadurch erhält man also zwei Reihen, A und B, für eine und dieselbe Grösse: $f\Big((x+e)+k\Big)=A$; $f\Big(x+(k+e)\Big)=B$.

Die Reihe A findet man aus folgenden Erwägungen:

Es ist: $f(x+e) = fx + pe + qe^2 + re^3 + ..$

Wird nun noch $(x+e)$ um k vermehrt, so geht jedes Glied der obigen Reihe in eine neue Reihe über, und zwar:

fx in $fx + pk + qk^2 + rk^3 + \ldots$

pe in $pe + p'ek + \ldots$

qe^2 in $qe^2 + q'e^2k + \ldots$

re^3 in $re^3 + r'e^3k + \ldots$

worin $p'k$ das erste Glied der Zunahme in der Reihe für p, $q'k$ das erste Glied der Zunahme in der Reihe für q u. s. w. ausdrückt.

Die Reihe A wird also:

$$fx + pk + qk^2 + rk^3 + sk^4 + ..$$
$$+ pe + p'ek + q'e^2k + r'e^3k + ..$$

wofür La Grange schreibt:

$$fx + pk + qk^2 + rk^3 + sk^4 + .. \; pe + p'ek + q'ek^2 + r'ek^3$$

indem er die Grössen k und e in $(k+e)^2$, $(k+e)^3$ .. vertauscht, was auch angeht. Aber man sieht doch sogleich ein, dass, wenn die Sache richtig wäre, dasselbe hervorgehen müsste, ob man $(k+e)^2$ oder $(e+k)^2$, $(k+e)^3$ oder $(e+k)^3$ u. s. w. nähme.

Hingegen die Reihe $B = f\left(x + (k+e)\right)$ wird:

$$fx + p(k+e) + q(k+e)^2 + r(k+e)^3 + s(k+e)^4 + .. =$$
$$fx + pk + qk^2 + rk^3 + sk^4$$
$$+ pe + 2qke + 3rk^2e + 4sk^3e + ..$$

wo man der *Kürze wegen* nur die beiden ersten Glieder jeder Potenz schreibt, weil die Vergleichung dieser Glieder hinreichend ist.

3) Die beiden Reihen A und B sind einander gleich. Die Glieder mit gleichen Potenzen von k und e müssen also einzeln gleich sein. Daraus folgt:

1) $pk + pe = pk + pe$;

2) $qk^2 + p'ek = qk^2 + 2qke$, $p' = 2q$, $q = \frac{p'}{2}$;

3) $rk^3 + q'ek^2 = rk^3 + 3rk^2e$, $q' = 3r$, $r = \frac{q'}{3}$.

Eben so $4s = r'$, $s = \frac{r'}{4}$.

4) Man bezeichne allgemein die erste Ableitung von fx, also den Coefficienten zur ersten Potenz von k durch $\frac{dfx}{dx}$, die erste Ableitung von $\frac{dfx}{dx}$ durch $\frac{d^2fx}{dx^2}$, die erste Ableitung von $\frac{d^2fx}{dx^2}$ durch $\frac{d^3fx}{dx^3}$ etc., so erhält man:

$$p = \frac{dfx}{dx};\quad q = \frac{1}{2}\frac{d^2fx}{dx^2};\quad r = \frac{1}{2.3}\frac{d^3fx}{dx^3}\text{ u. s. w.}$$

Diese Ausdrücke substituirt, geben:

$$f(x+k) = fx + \frac{dfx}{dx}k + \frac{d^2fx}{dx^2}\frac{k^2}{2} + \frac{d^3fx}{dx^3}\frac{k^3}{2.3} + \ldots$$

oder $fx = y$ gesetzt:

$$y + \Delta y_k = y + \frac{dy}{dx}k + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{k^2}{2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{k^3}{2.3} + \ldots$$

was nichts anders als der Taylor'sche Lehrsatz ist.

Dieser Beweis wäre ganz schön und elegant, wenn er nur richtig wäre. Wir haben in (2) gesehen, dass La Grange eine andere Reihe anschreibt, als diejenige ist, die erfolgt. Diess kann man gut machen, wenn man die Worte nicht annimmt: „Man schreibt *der Kürze wegen* nur die beiden ersten Glieder jeder Potenz, weil die Vergleichung dieser Glieder hinreichend ist." Die Vergleichung dieser Glieder ist nicht hinreichend, denn e und k sind von demselben Werthe, und darum wird man schon alle Glieder schreiben müssen. Auch ohne diess nimmt sich die Zumuthung von La Grange sonderbar aus. Das ist ja die Rechnung mit unendlich-kleinen Grössen, wenn man nur die zwei ersten Glieder nimmt und die übrigen vernachlässigt, und gerade das Unendlich-Kleine wollte La Grange wegbringen.

Schreibt man nun alle Glieder an, so fragt sich, was p wird, wenn x um k vermehrt wird? La Grange schreibt: $p + p'k + \ldots$

Was ist das nächste Glied? denn das braucht man auch. Wird etwa p folgender Ausdruck: $p + p'k + q'k^2 + r'k^3 + \ldots$? Oder was sonst?

Schreibt man: $p + p'k + q'k^2 + r'k^3 + \ldots$ statt p,
und eben so $q + q'k + r'k^2 +$ statt q u. s. w.,

dann wird Formel A:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} fx & + & pk & + & qk^2 & + & rk^3 & + & sk^4 + .. \\ & + & pe & + & p'ek & + & q'ek^2 & + & r'ek^3 \\ & & & + & qe^2 & + & q'e^2k & + & r'e^2k^2 \\ & & & & & + & r'e^3 & + & r'e^3k \\ & & & & & & & + & se^4 \end{array}$$

und Formel B wird:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} fx & + & pk & + & qk^2 & + & rk^3 & + & sk^4 + .. \\ & + & pe & + & 2qek & + & 3rek^2 & + & 4sek^3 \\ & & & + & qe^2 & + & 3re^2k & + & 6se^2k^2 \\ & & & & & + & re^3 & + & 4se^3k \\ & & & & & & & + & se^4 \end{array}$$

also die Glieder einzeln gleichgesetzt:

$$p' = 2q;\ q'(ek^2 + e^2k) = 3r(ek^2 + e^2k);\ q' = 3r;$$
$$r'(ek^3 + e^2k^2 + e^3k) = 4s\left(ek^3 + \frac{6}{4}e^2k^2 + e^3k\right).$$

Hier fehlt es schon; es wird nicht mehr $r' = 4s$, weil die Factoren von r' und von $4s$ nicht gleich sind.

Und nun darf man unbedenklich aussprechen, dass es doch besser gewesen wäre, wenn La Grange alle Glieder angeschrieben haben würde.

Der Irrthum, der durch die Voraussetzung entsteht, dass p in $p + p'k + q'k^2 + ..$ übergehe, ist derselbe, den Newton anfänglich hatte, nämlich die Verwechslung des Differenzials mit dem Gliede der Reihe. Das dritte Differenzial z. B. ist d^3y, aber das dritte Glied der Reihe ist $\frac{1}{2.3}d^3y$.

Will man daher den Beweis im Sinne von La Grange durchführen, so muss man, was man unbedenklich kann, dem Ausdrucke $f(x+k)$ folgende Gestalt geben:

$$f(x+k) = fx + pk + q\frac{k^2}{2} + r\frac{k^3}{2.3} + s\frac{k^4}{2.3.4} + ..$$

Dann geht für $(x+k)$ statt x die Ableitung p über in:

$$p + p'k + \frac{1}{2}q'k^2 + \frac{1}{2.3}r'k^3 + ..$$

die Ableitung q in: $q + q'k + r'\frac{k^2}{2} + ..$

und Formel A wird:

$$fx + pk + \frac{1}{2}qk^2 + \frac{1}{2.3}rk^3 + \frac{1}{2.3.4}sk^4 + ..$$
$$+ pe + p'ek + \frac{1}{2}q'ek^2 + \frac{1}{2.3}r'ek^3 + ..$$
$$+ \frac{1}{2}qe^2 + \frac{1}{2}q'e^2k + \frac{1}{2.2}r'e^2k^2 + ..$$
$$+ \frac{1}{2.3}re^3 + \frac{1}{2.3}r'e^3k + ..$$
$$+ \frac{1}{2.3.4}se^4 + ..$$

Formel B wird:

$$fx + pk + \frac{1}{2}qk^2 + \frac{1}{2.3}rk^3 + \frac{1}{2.3.4}sk^4 + ..$$
$$+ pe + \frac{1}{2}.2qke + \frac{1}{2.3}.3rek^2 + \frac{1}{2.3.4}.4sek^3 + ..$$
$$+ \frac{1}{2}qe^2 + \frac{1}{2.3}.3re^2k + \frac{1}{2.3.4}6se^2k^2 + ..$$
$$+ \frac{1}{2.3}re^3 + \frac{1}{2.3.4}4se^3k + ..$$
$$+ \frac{1}{2.3.4}e^4s + ..$$

Aus der Vergleichung dieser Formeln ergiebt sich $q = p'$, $q' = r$, $r' = s$, also:

$$f(x+k) = fx + pk + p'\frac{k^2}{2} + q'\frac{k^3}{2.3} + r'\frac{k^4}{2.3.4} + \cdots$$

So kann der Beweis im Sinne von La Grange durchgeführt werden.

Wenn man die Sache schon weiss, so giebt dieser Beweis eine prächtige Uebersicht; wenn man sie aber nicht schon anderswoher kennt, so lernt man nichts aus dem Beweise. Denn darin, dass man sagt: für $f(x+k) = fx + pk + \frac{1}{2}qk^2 + \ldots$ geht auch die Function p in $p + p'k + q'\frac{k^2}{2} + ..$ über, setzt man gerade das voraus, was man am Ende beweisen will, und diess nennt man einen Fehler im Beweise; schreibt man aber wie La Grange, dass

p übergehe in $p + p'k \ldots$, so kann nur ein höchst glückliches Auslassen der Glieder, die sich nicht fügen wollen, den Beweis durchführbar machen.

Die Wahrheit ist, dass im Beweise von La Grange das vorausgesetzt wird, was man eben beweisen will. Der ganze Beweis muss daher bei Seite gelegt werden.

Cap. V.

Ausführung der in den Symbolen dy_x, d^2y_x etc. angedeuteten Operationen.

§. 38.

Differenzirung der Summen, Differenzen, Producte und Quotienten.

1) Ist $y = fx + \varphi x + ..$, d. h. eine Summe verschiedener Functionen, so ist:

$$y + \Delta y_x = f(x + dx_x) + \varphi(x + dx_x) + \ldots$$
$$= fx + dfx + \frac{1}{2}d^2fx + .. +$$
$$+ \varphi x + d\varphi x + \frac{1}{2}d^2\varphi x + ..$$
$$+ \ . \ .$$

Subtrahirt man $y = fx + \varphi x + ..$, so bleibt:

$$\Delta y_x = (dfx + d\varphi x + ..) + \frac{1}{2}(d^2fx + d^2\varphi x + ..) + ..$$

und das ganze erste Glied dy_x ist gleich $dfx + d\varphi x + ..$, d. h. gleich der Summe der Differenzialien der einzelnen Functionen; das ganze zweite Glied $\frac{1}{2}d^2y_x$ ist gleich $\frac{1}{2}(d^2fx + d^2\varphi x + ..)$; $d^2y_x = d^2fx + d^2\varphi x + ..$ u. s. w., wie die Entwicklung von selbst an die Hand giebt. Daraus leiten sich die ganz leichten und einfachen Regeln der Differenzirung von Summen ab.

Bezeichnet man, wie gewöhnlich geschieht, fx durch z, φx durch v etc. also $y_x = z_x + v_x + ..$, so ist $dy_x = dz_x + dv_x + ..$,

Symbole, aus denen das Gesetz der Operationen leicht abgelesen und von selbst in Worte übersetzt werden kann.

2) Ist y die Differenz von Functionen von x, also $y = fx - \varphi x$, so ist ganz aus derselben Entwicklung, indem man statt $+\varphi x$ nur $-\varphi x$ substituirt:

$$dy_x = dfx - d\varphi x = dz_x - dv_x,$$

d. h. man findet das Differenzial einer Differenz, indem man vom Differenzial des Minuends das Differenzial des Subtrahends wirklich subtrahirt.

Beispiele. Es sei $y = x^m + Ax^{-n}$, so ist:

$$d(x^m) = mx^{m-1}dx_x, \quad d(Ax^{-n}) = -nAx^{-n-1}dx,$$

also: $$dy_x = (mx^{m-1} - nAx^{-(n+1)})dx_x.$$

Ist $y = x^m - Ax^{-n}$, so ist:

$$dy_x = (mx^{m-1} + nAx^{-(n+1)})dx_x.$$

3) Ist y ein Product von Functionen von x, $y = fx \,.\, \varphi x$, so wird:

$$y + \Delta y_x = f(x + dx_x) \,.\, \varphi\,(x + dx_x),$$

oder, da man $f(x + dx_x)$, $\varphi(x + dx_x)$ kennt,

$$y + \Delta y_x = \left(fx + dfx + \frac{1}{2}d^2fx + ..\right) . \left(\varphi x + d\varphi x + \frac{1}{2}d^2\varphi x + ..\right)$$

$$= fx\varphi x + (fxd\varphi x + \varphi x dfx) + \frac{1}{2}(fxd^2\varphi x + 2dfxd\varphi x + \varphi x d^2fx)$$

$$+ \frac{1}{2.3}(. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .)dx_x^3 + \ldots$$

Subtrahirt man $y = fx\varphi x$, so bleibt:

$$\Delta y_x = (fx\,d\varphi x + \varphi x\,dfx) + \frac{1}{2}(fx\,d^2\varphi x + 2dfx\,d\varphi x + \varphi x\,d^2fx)$$

$$+ ..$$

Der Ausdruck: $fx\,d\varphi x + \varphi x\,dfx$ ist die Summe der Glieder, die bei wirklicher Ausführung dx_x in der ersten Potenz allein zum Factor haben, indem die nachfolgenden Glieder bei wirklicher Ausführung die Factoren dx_x^2, dx_x^3 u. s. w. haben; es ist daher das erste Differenzial oder $dy_x = fx\,d\varphi x + \varphi x dfx$.

Bezeichnet man wieder fx mit z und φx mit v, so giebt $y = zv$, $dy_x = zdv_x + vdz_x$, ein Ausdruck, der, in allgemeine

Worte übersetzt, die Regel giebt, wie man das Differenzial eines Products findet.

Das zweite Differenzial ist dann die Summe der Glieder, die dx_x^2 zum Factor haben, also aus obiger Reihe:

$$d^2y_x = fxd^2\varphi x + 2dfx\,d\varphi x + \varphi x\,d^2fx$$

$$d^2y_x = zd^2v_x + 2dz_x dv_x + vd^2x_z.$$

Diess hätte man viel einfacher finden können, wenn man nach einem früheren Satz das erste Differenzial $dy_x = zdv_x + vdz_x$ sogleich differenzirt hätte, was man kann, da bereits bekannt ist, wie Summen und Producte differenzirt werden. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned} d^2y_x &= d(zdv_x) + d(vdz_x) \\ &= zd^2v_x + dz_x dv_x + dv_x dz_x + vd^2z_x \\ &= zd^2v_x + 2dz_x dv_x + vd^2z_x, \text{ wie Oben.} \end{aligned}$$

Zusatz. Es bietet keine weitere Schwierigkeit, diese Regel auf Producte beliebig vieler Functionen von x auszudehnen. Ist $y = zv\omega..\psi$, so ist:

$$dy_x = (zv\omega..d\psi_x) + ..+ (zv..\psi)d\omega_x + (z\omega..\psi)dv_x + (v\omega..\psi)dz_x,$$

was eben so leicht bewiesen, als in einer allgemeinen Regel ausgesprochen werden kann.

Beispiel. Ist $y = x^m \times x^n$, so ist:

$$\begin{aligned} dy_x &= x^m d(x^n) + x^n d(x^m) \\ &= \left((nx^m x^{n-1} + mx^n x^{m-1})dx\right) \\ &= (m+n)x^{m+n-1}dx, \end{aligned}$$

was man auch gefunden haben würde, wenn man das Product $x^m \,.\, x^n$ in x^{m+n} vereinigt und x^{m+n} unmittelbar differenzirt hätte.

4) Ist y ein Quotient von Functionen von x, $y = \frac{z}{v}$, so behandelt man diess als Product $y = zv^{-1}$, und nach 3. ist:

$$dy_x = zd(v^{-1}) + v^{-1}dz_x,$$

oder, da $d(v^{-1}) = -1v^{-2}dv_x$ ist:

$$dy_x = v^{-1}dz_x - zv^{-2}dv_x = \frac{dz_x}{v} - \frac{zdv_x}{v^2} = \frac{vdz_x - zdv_x}{v^2},$$

woraus die Gedächtniss-Regel des Differenzirens für Quotienten unmittelbar abgelesen werden kann.

Will man die zweiten, dritten und nachfolgenden Differenzialien finden, so differenzirt man ganz einfach die unmittelbar vorausgehenden, was keine Schwierigkeit hat, da nur wieder Summen, Differenzen, Producte oder Quotienten in ihnen enthalten sind.

§. 39.

Differenzirung der Urfunctionen erster Reihe.

1) Potenzen: $y = x^{\mu}$. Diess Differenzial ist bekannt, und es ist $dy_x = \mu x^{\mu-1} dx_x$.

2) Exponential-Grössen: $y = e^x$.

In Cap. II. haben wir gefunden:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^5}{2\ldots5} + \ldots$$

Diess substituirt, giebt:

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^5}{1.2\ldots5} + \ldots$$

und:

$$dy_x = d(x) + d\left(\frac{x^2}{2}\right) + d\left(\frac{x^3}{2.3}\right) + d\left(\frac{x^4}{2.3.4}\right) + d\left(\frac{x^5}{1.2\ldots5}\right) + \ldots$$

$$= dx_x + x dx_x + \frac{1}{2} x^2 dx_x + \frac{x^3 dx_x}{2.3} + \frac{x^4 dx_x}{2.3.4} + \ldots$$

$$= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \ldots\right) dx_x = e^x dx_x,$$

eine Function, die in ihrem Differenzial wieder auf sich selbst zurückkommt.

Es ist daher $d^2 y_x = e^x dx_x^2$; $d^3 y_x = e^x dx_x^3 \ldots$, so dass man nach der Reihe:

$$\Delta y_x = dy_x + \frac{1}{2} d^2 y_x + \frac{1}{2.3} d^3 y_x + \ldots$$

auf's Leichteste den Ausdruck herstellen kann:

$$\Delta y_x = e^x dx_x + \frac{1}{2} e^x dx_x^2 + \frac{1}{2.3} e^x dx_x^3 + \ldots$$

$$= e^x \left(dx_x + \frac{1}{2} dx_x^2 + \frac{1}{2.3} dx_x^3 + \ldots\right)$$

was man auch unmittelbar finden kann, wenn man

$$y=e^x;\ y=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^4}{2.3.4}+..$$

$$y+\Delta y_x=1+(x+dx_x)+\frac{1}{2}(x+dx_x)^2+\frac{1}{2.3}(x+dx_x)^3+$$
$$+\frac{1}{2.3.4}(x+dx_x)^4+..$$

ohne alle Zwischen-Regel des Differenzirens einfach nach den aufsteigenden Potenzen entwickelt. Doch wird Jeder einsehen, dass schon hier die Zwischen-Regel des Differenzirens bedeutende Abkürzung und Einfachheit hervorbringt.

Damit man sehe, wie sich denn ohne die Zwischen-Regel des Differenzirens die angedeuteten Operationen ausführen, damit namentlich ganz in die Augen springe, dass gar keine Grösse irgendwie vernachlässigt werde, will ich die Operation $(y+\Delta y_x)=e^{x+dx}$ in ihrer Vollständigkeit für die aufeinanderfolgenden Glieder darstellen. Diese Eine Darstellung wird aber genügen, so dass wir uns bei den nachfolgenden Functionen auf die expediten Regeln des Differenzirens einschränken können.

Ist:

$$y=e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+..\ \frac{x^n}{1.2...n}+...$$

so wird:

$$y+\Delta y_x=1+(x+dx)+\frac{(x+dx)^2}{1.2}+\frac{(x+dx)^3}{1.2.3}+\frac{(x+dx)^4}{1.2..4}+..$$
$$+\frac{(x+dx)^n}{1.2..n}+..$$
$$=1+x+dx+\frac{1}{2}(x^2+2xdx+dx^2)+$$
$$+\frac{1}{2.3}(x^3+3x^2dx+3xdx^2+dx^3)+$$
$$+\frac{1}{1.2..4}(x^4+4x^3dx+6x^2dx^2+4xdx^3+dx^4)+...$$
$$+\frac{1}{1.2..n}\Big(x^n+nx^{n-1}dx+\frac{n.n-1}{1.2}x^{n-2}dx^2+$$
$$+\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}x^{n-3}dx^3+....\Big)$$
$$+...$$

Sammelt man alle Glieder ohne dx, alle Glieder mit dx, mit dx^2, mit dx^3 u. s. w., so wird:

$$y + \Delta y_x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{1.2.3}x^3 + \frac{1}{1.2..4}x^4 + .. \frac{1}{1.2..n}x^n + ..$$
$$dx\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2.3}x^3 + .. \frac{1}{1.2.n-1}x^{n-1} + ..\right) +$$
$$\frac{1}{2}dx^2\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + .. \frac{1}{1.2..n-2}x^{n-2} + \ldots\right) +$$
$$\frac{1}{2.3}dx^3\left(1 + x + \cdots \frac{1}{1.2..n-3}x^{n-3} + \ldots\right) +$$
$$+ \ldots.$$

Diess giebt aber, wenn

$$y = e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2.3}x^3 + .. \frac{1}{1.2..n}x^n + ..$$

substituirt wird:

$$\Delta y_x = e^x dx + \frac{1}{2}e^x dx^2 + \frac{1}{2.3}e^x dx^3 + \ldots$$
$$= dy + \frac{1}{2}d^2y + \frac{1}{2.3}d^3y + \ldots$$

Dasselbe findet man aber auch, und leichter, wenn man die Zwischen-Regel des Differenzirens anwendet, wie Oben geschehen ist. Die Regel des Differenzirens giebt sogleich und mit Einem Schlag die gesuchte Reihe nach aufsteigenden Potenzen von dx, die man nach der allgemeinen und mühsamen Entwicklung erst aus allen Gliedern zusammensuchen, und auf den einfachsten Ausdruck reduciren muss. Diess ist der ganze Unterschied zwischen der mühsamen allgemeinen und der expediten Differenzial-Entwicklung. Die Operationen sind ganz die nämlichen, nur die Anordnung und Reduction ist eine verschiedene.

3) Sinusse: $y = \sin x$.

Wir haben Cap. II. gefunden:

$$\sin x = x - \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1}{2.3..5}x^5 - \ldots$$

Diess substituirt giebt:

$$y = x - \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1}{2.3..5}x^5 - \ldots$$

$$dy_x = d(x) - \frac{1}{2.3}d(x^3) + \frac{1}{2.3..5}d(x^5) - \ldots$$
$$= dx_x - \frac{1}{2}x^2dx_x + \frac{1}{2.3.4}x^4dx_x - ..$$
$$= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{1.2.3.4}x^4 - ..\right) dx_x,$$
$$= \cos x\, dx_x,$$

da $\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2.3.4}x^4 - ..\right) = \cos x$ ist (Cap. II.).

Es ist daher, wenn $y = \sin x$, $dy_x = \cos x\, dx_x$, was man kurz so ausdrückt: $d(\sin x) = \cos x\, dx_x$.

Wie das zweite Differenzial beschaffen sei, kann man aus der gegebenen Reihe entwickeln. Kürzer findet man $d^2y_x = d^2 \sin x$, wenn man $dy_x = \cos x\, dx_x$ wieder differenzirt. Um diess ausführen zu können, muss man erst wissen, wie man das Differenzial von $\cos x$ findet.

4) Cosinusse: $y = \cos x$, oder die Reihe substituirt:

$$y = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2.3.4}x^4 - \frac{1}{1.2..6}x^6 + ..$$
$$dy_x = -\frac{1}{2}d(x^2) + \frac{1}{2.3.4}d(x^4) - \frac{1}{2..6}d(x^6) + ..$$
$$= -x\,dx_x + \frac{1}{2.3}x^3dx_x - \frac{1}{2..5}x^5dx_x + ..$$
$$= -\left(x - \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1}{2..5}x^5 - ..\right)dx_x$$
$$= -\sin x\, dx_x.$$

Sinusse und Cosinusse kommen also in ihren Differenzialien gegenseitig auf sich selbst zurück.

Zusatz. Will man die ganze Reihe Δy (indem ja durch das Differenziren nichts vernachlässigt, sondern das, was zum zweiten Gliede gehört, für das zweite Glied, was zum dritten Gliede gehört, für das dritte Glied etc. aufbewahrt wird), so hat man:

$$\Delta \sin x = \cos x\, dx_x + \frac{1}{2}d(\cos x\, dx_x) + ..$$
$$= \cos x\, dx_x - \frac{1}{2}\sin x\, dx_x^2 - \frac{1}{2.3}d(\sin x\, dx^2) + ..$$
$$= \cos x\, dx_x - \frac{1}{2}\sin x\, dx_x^2 - \frac{1}{2.3}\cos x\, dx_x^3 + ...$$

Eben so ist

$$\Delta \cos x = -\sin x\, dx_x - \frac{1}{2}\cos x\, dx_x^2 + \frac{1}{2.3}\sin x \frac{dx^3}{2.3} + \ldots,$$

Reihen, die durch die Regeln des Differenzial-Lehrsatzes auf's Leichteste hergestellt werden können.

Zusatz. Wenn man überhaupt das Differenzial einer goniometrischen Function kennt, so ist es sehr leicht, die Differenzialien aller übrigen zu finden, da sie sämmtlich durch Gleichungen miteinander verbunden sind. Und welche dieser Gleichungen man nimmt, man findet immer dieselben Resultate. So ist z. B. $\cos x = (1 - \sin^2 x)^{\frac{1}{2}}$, also:

$$d\cos x = \frac{1}{2}(1 - \sin^2 x)^{-\frac{1}{2}} \times -2\sin x\, d\sin x$$

$$= -\frac{\sin x \cos x\, dx_x}{(1 - \sin^2 x)^{\frac{1}{2}}};$$

und da $(1 - \sin^2 x)^{\frac{1}{2}} = \cos x$ ist, so wird $d\cos x = -\sin x\, dx_x$, wie Oben. U. s. w.

5) Tangenten. Das Differenzial der Tangenten kann eben so auf verschiedene Art gefunden werden, entweder direct aus der Tangenten-Reihe, oder aus einer der verschiedenen für die Tangenten bestehenden goniometrischen Gleichungen. Man erhält immer dasselbe Resultat.

Wir wählen die Gleichung: $tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Nach $d\left(\frac{z}{v}\right) = \frac{v dz_x - z dv_x}{v^2}$ ist:

$$d\, tg\, x = \frac{\cos x\, d(\sin x) - \sin x\, d(\cos x)}{\cos x^2},$$

oder, da man $d(\sin x)$ und $d(\cos x)$ bereits kennt:

$$d(tg\, x) = \frac{(\cos x^2 + \sin x^2)\, dx}{\cos x^2} = \frac{dx}{\cos x^2}.$$

Will man die nachfolgenden Differenzialien, so hat man eben $\frac{dx}{\cos x^2}$ der Reihe nach zu differenziren.

6) Cotangenten. Für diese wählen wir die Gleichung: $cotg\,x = \frac{cos\,x}{sin\,x}$; also:

$$d(cotg\,x) = \frac{sin\,x\,d(cos\,x) - cos\,x\,d(sin\,x)}{(sin\,x)^2},$$

$$d\,cotg\,x = -\frac{(sin\,x^2 + cos\,x^2)\,dx}{sin\,x^2} = -\frac{dx}{sin\,x^2}.$$

7) Für die Secante wählen wir beliebig den Ausdruck: $sec\,x = \frac{1}{cos\,x} = cos\,x^{-1}$, also:

$$\begin{aligned} d(sec\,x) &= -1\,cos\,x^{-2}\,d(cos\,x) \\ &= -1\,cos\,x^{-2} \times -sin\,x\,dx_x \\ &= \frac{sin\,x}{cos\,x^2}\,dx_x. \end{aligned}$$

8) Für die Cosecante wählen wir den Ausdruck: $cosec\,x = \frac{1}{sin\,x}$;

$$\begin{aligned} d(cosec\,x) &= -1\,sin\,x^{-2}\,d(sin\,x) \\ &= -\frac{cos\,x}{sin\,x^2}\,dx_x. \end{aligned}$$

§. 40.

Differenzirung der Urfunctionen zweiter Reihe.

1) Wurzeln. Diese setzen wir nur der Analogie willen an, da schon bei den Potenzen der Exponent μ ganz allgemein genommen wurde.

Es ist daher, wenn in $y = x^\mu$ μ eine Wurzel ausdrückt: $dy = \mu x^{\mu-1}\,dx_x$.

2) Logarithmen. Es sei $y = {}^e log\,x$.

Da für $log\,x$ nur Reihen mit unendlich grossen Coefficienten bestehen können, so substituiren wir $x = 1 + z$, also:

$$y = {}^e log\,(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \ldots$$

$$\begin{aligned} dy = d\,{}^e log\,(1+z) &= dz - z dz + z^2 dz - z^3 dz + \ldots \\ &= (1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \ldots)\,dz_x \end{aligned}$$

Aus der Lehre der geometrischen Progressionen weiss man, dass die Reihe: $1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - .. = \frac{1}{1+z}$, wie sich auch durch die Division ergiebt; es ist daher $d\,log(1+z) = \frac{dz}{1+z}$.

Wird $1+z = x$, also auch $dz_x = dx_x$ substituirt, so folgt: $d\,log\,x = \frac{dx_x}{x}$, wo unter $log\,x$ ohne Angabe der Basis die natürlichen Logarithmen verstanden werden.

3) Für Bogen, deren Sinusse gegeben sind.

Es ist Cap. II.:

$$arc.\,sin\,x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + ..$$

also: $$d(arc.\,sin\,x) = dx + \frac{1}{2}x^2dx + \frac{1.3}{2.4}x^4dx_x + ..$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + ..\right)dx_x$$

$$= \frac{dx_x}{\sqrt{1-x^2}},$$

denn die Reihe $1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.3}x^4 + ..$ ist gleich $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

4) *Arc. cos x.*

Da die Gleichung besteht: $arc.\,cos\,x = \frac{\pi}{2} - arc.\,sin\,x$, so ist daraus:

$$d(arc.\,cos\,x) = -\,d(arc.\,sin\,x) = -\,\frac{dx_x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

5) *Arc. tg x.*

Es gilt die Reihe:

$$arc.\,tg\,x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + ..$$

also: $$d\,arc.\,tg\,x = dx - x^2dx + x^4dx - x^6dx + ..$$

$$= (1 - x^2 + x^4 - x^6 + ..)\,dx$$

$$= \frac{1}{1+x^2}dx_x.$$

6) *Arc. cotg x.*

Aus der Gleichung: $arc.\,cotg\,x = \frac{\pi}{2} - arc.\,tg\,x$ folgt:

$$d(arc.\,cotg\,x) = -\,d(arc.\,tg\,x) = -\frac{dx_x}{1+x^2}.$$

7) *Arcus secante x.*

Aus Cap. I. §. 6. folgt:

$$arc.\,sec\,x = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{x} - \frac{1}{2.3x^3} - \frac{1.3}{2.4.5x^5} - ..$$

$$= \frac{1}{2}\pi - x^{-1} - \frac{1}{2}\frac{x^{-3}}{3} - \frac{1.3}{2.4}\frac{x^{-5}}{5} - ..$$

also: $$d\,arc.\,sec\,x = +\,x^{-2}\,dx + \frac{1}{2}x^{-4}\,dx + \frac{1.3}{2.4}x^{-6}\,dx_x$$

$$= \left(x^{-2} + \frac{1}{2}x^{-4} + \frac{1.3}{2.4}x^{-6} + ..\right)dx_x$$

$$= \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{1}{x^5} + ..\right)dx_x$$

$$= \frac{dx_x}{x\sqrt{x^2-1}},$$

da bekanntlich $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^3} + \frac{1.3}{2.4x^5} + .. = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ ist.

Für reelle Werthe muss $x > 1$ sein, wie denn auch die Secante niemals kleiner als 1 sein kann.

8) *Arc. cosec x.*

Es gilt die Gleichung: $arc.\,cosec\,x = \frac{1}{2}\pi - arc.\,sec\,x$, also ist:

$$d(arc.\,cosec\,x) = -\,d(arc.\,sec\,x)$$

$$= -\frac{dx_x}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

§. 41.

Allgemeine Zusätze.

Zusatz 1. Die Urfunctionen gelten sämmtlich für monomische Grössen, so dass wir im Vorhergehenden die Regeln der Differenzirung aller monomischen Grössen gefunden haben.

Zusatz 2. Das Bemerkenswertheste ist, dass schon die ersten Differenzialien der Logarithmen und der cyclometrischen Functionen algebraische (potenzielle) Ausdrücke sind, so dass verwickelte transcendente Functionen in ihren Differenzialien einfach und algebraisch werden.

Zusatz 3. Die obigen Differenzialien sind die Rechnungs-Elemente des Differenzial-Calculs, und als Elemente müssen sie einem Jeden so bekannt und gegenwärtig sein, wie die Regeln der Arithmetik und Algebra. — Sie sind allerdings nur die ersten Differenzialien einer jeden Function; aber wenn man die höhern will und braucht, so kann man sie aus ihnen finden. Die höhern Differenzialien im Geiste immer gegenwärtig zu haben, kann nicht gefordert werden. Dafür ist der Calcul da, der sie giebt.

Doch wird vielleicht noch der Eine oder Andere fragen, ob denn das nicht eine indirecte Vernachlässigung der höhern Potenzen von dx_x ist, dass man nur immer auf das erste Differenzial den Nachdruck legt, und ob das nicht auch indirect auf das Unendlichkleine zurückkomme? Die Antwort darauf ist: Man braucht nur die ersten Differenzialien zu suchen, weil das Differenziren eine allgemeine, für alle Glieder der Reihe Δy_x gültige Operation ist. So wie man also weiss, wie man eine Function differenzirt, so hat man Alles, weil man im Differenzial nur wieder auf Functionen kommt, die man bereits differenziren kann. Ganz anders würde sich die Sache gestalten, wenn man im ersten Differenzial auf unbekannte Functionen käme, die man nicht schon differenziren könnte. Dann entstünde augenblicklich die Aufgabe, wie man nun das Differenzial des Differenzials finden könne, und dann würden mit eben solcher Anstrengung und Beharrlichkeit die zweiten, dritten und folgenden Differenzialien ermittelt und consequent in die Reihe der Fundamental-Regeln aufgenommen werden. Aber so zeigt sich ja, dass man bei allen gegebenen Functionen schon im ersten Differenzial auf solche Functionen kommt, die man bereits mit Leichtigkeit differenziren kann, ja dass man bei den scheinbar schwierigsten, wie $arc.\,sin\,x$, $arc.\,tg\,x$ etc., $log\,x$ etc., auf ganz einfache algebraische Functionen stosst, für deren weitere Differenzialien es wahrlich nicht der Mühe werth ist, besondere

Regeln aufzustellen, so wenig als man für einzelne Beispiele einzelne Regeln bildet, sobald einmal die allgemeine Regel bekannt ist.

§. 42.

Allgemeine Bemerkung.

Die obigen Anwendungen des Differenzirens auf die Urfunctionen sind aus keinem andern Grunde gegeben worden, als dass der Anfänger Gelegenheit habe, sich zu üben, und dass er namentlich wisse, was er bei gegebenen Functionen unter den ihm sonst unfassbaren Symbolen dy_x, d^2y_x, d^3y_x etc. zu denken habe. Diess lernt er, wenn er wirklich ausgeführte Differenzirungen an die Stelle der blossen Symbole setzen kann.

Einen andern Werth haben diese Uebungen nicht. Denn da man aus der allgemeinen Ableitung die Reihen für e^x, $\sin x$, $\cos x$, .. $\log(1+x)$, $arc.\sin x$, etc. nur empirisch hat, so kann man auf sie keinen allgemeinen Schluss gründen. Man kennt ja das Fortschreitungsgesetz der einzelnen Glieder nur so weit, als man sie wirklich berechnet hat, und diess geht niemals bis zum n^{ten} Gliede. Auf so etwas kann man die allgemeinen Formeln des Differenzirens nicht gründen, und darum sind obige Beispiele nur zur Uebung und empirischen Erläuterung gegeben.

Es bleibt die Forderung übrig, diese Differenzialien, unabhängig von den nur für eine beschränkte Anzahl von Gliedern gefundenen Reihen, schlechthin allgemein zu beweisen.

Cap. VI.

Entwicklung der Function einer Veränderlichen, die ihrerseits wieder eine Function einer andern Veränderlichen ist. Vertauschung der unabhängig Veränderlichen.

§. 43.

Entwicklung von Δy_z, wenn $y = fx$, und $x = \varphi z$ ist.

Ist y eine Function von x, $y = fx$, und x selbst eine Function von z, $x = \varphi z$, die ihrerseits um eine constante Grösse dz_z vermehrt wird, so entsteht die Aufgabe, Δy_z in Differenzial-Ausdrücken: dy_x, $d^2y_x \ldots$, dx_z, $d^2x_z \ldots$ zu geben.

Wird z um dz_z vermehrt, so wird x in der Function $x = \varphi z$ nicht um dx_x, auch nicht um dx_z, sondern um Δx_z vermehrt, und es wäre ein Irrthum, wenn man x statt um Δx_z etwa um dx_x oder dx_z zunehmen liesse.

Die Taylor'sche Reihe giebt nun:

$$y + \Delta y_\omega = f(x+\omega) - fx =$$

$$= \frac{dy_x}{dx_x}\omega + \frac{1}{2}\frac{d^2y_x}{dx_x^2}\omega^2 + \frac{1}{2.3}\frac{d^3y_x}{dx_x^3}\omega^3 + \ldots$$

Setzt man $\omega = \Delta x_z$, so wird:

$$\Delta y_{\Delta x_z} = \frac{dy_x}{dx_x}\Delta x_z + \frac{1}{2}\frac{d^2y_x}{dx_x^2}(\Delta x_z)^2 + \frac{1}{2.3}\frac{d^3y_x}{dx_x^3}(\Delta x_z)^3 + \ldots$$

oder, da $\Delta y_{\Delta x_z} = \Delta y_z$ ist, da man y sogleich als Function von z denken kann, nachdem der Werth $x=\varphi z$ in $y=fx$ substituirt ist:

$$\Delta y_z = \frac{dy_x}{dx_x}(\Delta x_z) + \frac{1}{2}\frac{d^2y_x}{dx_x^2}(\Delta x_z)^2 + \frac{1}{2.3}\frac{d^3y_x}{dx_x^3}(\Delta x_z)^3 + ..$$

Die Grösse Δx_z ist eine unentwickelte und in der Rechnung unbehülfliche Grösse, denn sie repräsentirt eine ganze Reihe; sie ist daher durch die expediten Operationen dx_z, d^2x_z ... zu ersetzen.

Wird

$$\Delta x_z = dx_z + \frac{1}{2}d^2x_z + \frac{1}{2.3}d^3x_z + ..$$

substituirt, so entsteht:

$$\Delta y_z = \frac{dy_x}{dx_x}\left(dx_z + \frac{1}{2}d^2x_z + ..\right) + \frac{1}{2}\frac{d^2y_x}{dx_x^2}\left(dx_z + \frac{1}{2}d^2x_z + ..\right)^2 + \\ + \frac{1}{2.3}\frac{d^3y_x}{dx_x^3}\left(dx_z + \frac{1}{2}d^2x_z + ..\right)^3 + ...$$

Die Grösse dx_z enthält den Factor dz_z in der ersten Potenz, $(dx_z)^2$ und d^2x_z enthalten diesen Factor in der zweiten Potenz, $(dx_z)^3$ ... d^3z_x .. enthalten ihn in der dritten Potenz u. s. w., während $\frac{dy_x}{dx_x}$, $\frac{d^2y_x}{dx_x^2}$ ... den Factor dz_z gar nicht enthalten, sondern blosse Functionen von x sind.

Werden die Klammern gelöst, und werden alle Glieder, die dz_z in der ersten Potenz enthalten, als erstes Differenzial von y, als dy_z; alle, die dz_z in der zweiten Potenz enthalten, als zweites Differenzial d^2y_z u. s. w. zusammengenommen, so ergiebt sich:

$$\Delta y_z = \frac{dy_x}{dx_x}dx_z + \frac{1}{2}\left(\frac{dy_x}{dx_x}d^2x_z + \frac{d^2y_x}{dx_x^2}(dx_z)^2\right) + \\ + \frac{1}{2.3}\left(\frac{dy_x}{dx_x}d^3x_z + 3\frac{d^2y_x}{dx_x^2}d^2x_z dx_z + \frac{d^3y_x}{dx_x^3}(dx_z)^3\right) + ...$$

Zusatz 1. Dasselbe Resultat hätte man auch einfacher durch successive Differenzirung finden können. Denken wir uns nämlich die Substitution von z in $y=fx$ vollzogen, woraus die neue Function $y=\psi z$ hervorgeht, so wird einfach:

$$\Delta y_z = dy_z + \frac{1}{2}d^2y_z + \frac{1}{2.3}d^3y_z + ..$$

Das erste Glied dy_z erhält man, wenn man die gegebene Function differenzirt, das zweite, wenn man dy_z differenzirt u. s. w. Ist nun dy_z als $\frac{dy_x}{dx_x} dx_z$ bekannt, so muss man, um d^2y_z zu erhalten, das Product $\left(\frac{dy_x}{dx_x}\right) \times dx_z$ differenziren, wobei dx_z als veränderliche Grösse behandelt wird. Und auf gleiche Weise verhält es sich mit den nachfolgenden Differenzialien.

In diesen sind nur: Summen, Producte, Potenzen etc. enthalten, und da man weiss, wie man diese differenzirt, so hat man die bekannten Gesetze nur anzuwenden, um die Differenzialien d^2y_z, d^3y_z u. s. w. zu finden.

Durch dieses Verfahren findet man die nämliche Reihe:

$$\Delta y_z = \frac{dy_x}{dx_x} dx_z + \frac{1}{2}\left(\frac{dy_x}{dx_x} d^2x_z + \frac{d^2y_x}{dx_x^2} (dx_z)^2\right) +$$

$$+ \frac{1}{2.3}\left(\frac{dy_x}{dx_x} d^3x_z + 3\frac{d^2y_x}{dx_x^2} d^2x_z dx_z + \frac{d^3y_x}{dx_x^3} (dx_z)^3\right) + \ldots$$

Die Werthe $\frac{dy_x}{dx_x}$, $\frac{d^2y_x}{dx_x^2}$, $\frac{d^3y_x}{dx_x^3}$ .. erhält man, wenn man die gegebene Function $y = fx$ differenzirt, und bei dieser Differenzirung gerade so verfährt, als ob dx selbst constant wäre, d. h. wenn man die aus den Operationen von Cap. V. hervorgehenden Resultate nimmt. Die Differenzialien dx_z, d^2x_z ... erhält man, wenn man die gegebene Function $x = \varphi z$ differenzirt, was keine Schwierigkeit hat, da z um die constante Grösse dz_z vermehrt wird.

Wir haben also die Gleichungen:

1) $dy_z = \frac{dy_x}{dx_x} dx_z$;

2) $d^2y_z = \frac{dy_x}{dx_x} d^2x_z + \frac{d^2y_x}{dx_x^2} (dx_z)^2$;

3) $d^3y_z = \frac{dy_x}{dx_x} d^3x_z + 3\frac{d^2y_x}{dx_x^2} d^2x_z dx_z + \frac{d^3y_x}{dx_x^3} (dx_z)^3$;

u. s. w.

Beispiel zur Verdeutlichung. Es sei gegeben: $y=x^2$; $x=z^4$; so ist:

$$\frac{dy_x}{dx_x}=2x;\quad \frac{d^2y_x}{dx_x^2}=2;\quad \frac{d^3y_x}{dx_x^3}=0;$$

$$dx_z=4z^3dz_z;\quad d^2x_z=12z^2dz_z^2;\quad d^3x_z=24zdz_z^3\ldots.$$

Diese Werthe substituirt, geben:

$$dy_z=\frac{dy_x}{dx_x}.dx_z=2x.4z^3dz_z=2z^4.4z^3dz_z=8z^7dz_z$$

$$d^2y_z=\frac{dy_x}{dx_x}d^2x_z+\frac{d^2y_x}{dx_x^2}dx_z^2=2x.12z^2dz_z^2+2(4z^3dz_z)^2$$

$$=24z^6dz_z^2+32z^6dz_z^2=56z^6dz_z^2$$

$$d^3y_z=\frac{dy_x}{dx_x}d^3x_z+3\frac{d^2y_x}{dx_x^2}d^2x_zdx_z+\frac{d^3y_x}{dx_x^3}dx_z^3=$$

$$=2x.24zdz_z^3+3.2.12z^2dz_z^2.4z^3dz_z+0=$$

$$=48z^5dz_z^3+288z^5dz_z^3=336z^5dz_z^3.$$

U. s. w.

Dasselbe Resultat hätte man erhalten, wenn man sogleich $x=z^4$ in $y=x^2$ substituirt, und $y=z^8$ differenzirt haben würde. Denn es ist dann: $dy_z=8z^7dz_z$; $d^2y_z=56z^6dz_z^2$; $d^3y_z=336z^5dz_z^3$, $d^4y_z=1680z^4dz_z^4$, u. s. w.

Zusatz 2. Wenn die Functionen in so einfachen Ausdrücken gegeben sind, wie im obigen Beispiele, so wird man ohne Zweifel die nöthigen Substitutionen sogleich vornehmen, und statt Δy_z aus fx und φz ($y=x^2$; $x=z^4$) abzuleiten, sie sogleich aus der neuen Function $y=\psi z$ ($y=z^8$) berechnen. — Allein nur selten sind die Functionen in so einfachen Ausdrücken gegeben, dass sie monomische Grössen werden, oft sind sie nur in transcendenten Gleichungen oder in andern verwickelten und unlösbaren Gleichungen und Reihen vorhanden, so dass jede unmittelbare Substitution unmöglich ist, oder nur eine unendliche Reihe monomischer Grössen giebt; und dann, denke ich, ist es doch nothwendig, dass man ein Mittel habe, das uns zeige, wie man trotzdem, dass man nicht substituiren kann, dennoch y nach z differenziren könne,

und dabei nichts anders anzuwenden brauche als die Differenzialien der gegebenen Functionen fx, φz. — Und dieser Forderung genügt die construirte Reihe; denn gegebene Ausdrücke kann man jederzeit differenziren.

§. 44.

Vertauschung der unabhängig Veränderlichen.

Die obige Reihe leitet uns noch zu einem andern wichtigen Resultate.

Ist $y = fx$, und $x = \varphi z$ gegeben, so ist:

$$\Delta y_z = dy_z + \frac{1}{2}d^2y_z + \frac{1}{2.3}d^3y_z + ..$$

und auch:

$$\Delta y_z = \frac{dy_x}{dx}dx_z + \frac{1}{2}\left(\frac{dy_x}{dx_x}d^2x_z + \frac{d^2y_x}{dx_x^2}dx_z^2\right) + \\ + \frac{1}{2.3}\left(\frac{dy_x}{dx_x}d^3x_z + \ldots\right) + \ldots$$

Daraus folgen für die ersten, zweiten, dritten und nachfolgenden Differenzialien die ganz präcisen und vollständigen Gleichungen:

$$dy_z = \frac{dy_x}{dx_x}dx_z;\quad d^2y_z = \frac{dy_x}{dx_x}d^2x_z + \frac{d^2y_x}{dx_x^2}dx_z^2;\quad \text{etc.}$$

Diess gilt für alle Functionen von x und von z, wie sie auch beschaffen sein mögen. Nimmt man nun die Function φz so, dass sie der aus der Umkehrung der Function $y = fx$ hervorgehenden Function entspricht (sei nun diese Umkehrung ausführbar oder nicht ausführbar, wirklich ausgeführt, oder in erst noch auszuführenden, nur durch Bezeichnung angedeuteten Operationen vorhanden), setzt man z. B. im obigen Beispiele $x = z^{\frac{1}{2}}$ (da diese Function, die Quadratwurzel aus der Umkehrung von $y = x^2$ als $x = y^{\frac{1}{2}}$ hervorgeht), so gilt auch für diesen besondern Fall: $dy_z = \frac{dy_x}{dx_x}dx_z$; denn was allgemein gilt, gilt auch für alle besondern Fälle. In einer solchen Function φz ist eben z nichts anders als y, denn man findet aus $y = fx$ und $x = \varphi z$ die nämlichen Werthe für y und z.

Substituirt man y statt z, so wird:

$$dy_y = \frac{dy_x}{dx_x} dx_y.$$

Die Grösse dy_y drückt aus, dass die Zunahme von y von keiner andern Grösse abhänge, also willkührlich und constant sei, während dx_y ausdrückt, dass diese Grösse das erste Glied in der Reihe der Zunahme sei, welche entsteht, wenn x als Function von y betrachtet, und y um die constante Grösse dy_y vermehrt wird. Der Ausdruck $\frac{dy_x}{dx_x}$ drückt die Function aus, die man findet, wenn man die Function y nach x differenzirt und durch dx_x dividirt.

Aus der Gleichung $dy_y = \frac{dy_x}{dx_x} dx_y$ folgt durch Division:

$$dx_y = \frac{1}{\frac{dy_x}{dx_x}} dy_y.$$

Diess heisst aber so viel: Hat man aus $y = fx$ den Ausdruck $\frac{dy_x}{dx_x}$ durch Differenzirung gefunden, so braucht man, um umgekehrt dx_y, d. h. das Differenzial von x, als einer Function von y, zu finden, die ursprüngliche Function $y = fx$ nicht erst umzukehren und nach x aufzulösen, was oft unmöglich ist, sondern man findet diess dx_y sogleich aus der Differenzial-Gleichung $dy_y = \frac{dy_x}{dx_x} dx_y$, indem man dividirt und einfach $dx_y = \frac{1}{\frac{dy_x}{dx_x}} dy_y$ erhält.

Zusatz. Diese Vertauschung von dy_x und dy_y, dx_x und dx_y nennt man die Vertauschung der unabhängig Veränderlichen einer Function.

Beispiele. 1) Ist $y = x^n$, so ist $dy_x = nx^{n-1} dx_x$, und nach obiger Formel $dx_y = \frac{1}{nx^{n-1}} dy_y$.

In der That, kehrt man $y = x^n$ um, so dass $x = y^{\frac{1}{n}}$, so ist $dx_y = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1} dy_y = \frac{1}{n y^{\frac{n-1}{n}}} dy_y$, was mit $dx_y = \frac{1}{nx^{n-1}} dy_y$ übereinstimmt.

2) Ist $y = e^x$, also $x = log\, y$, so ist, wie bekannt: $dy_x = e^x dx_x$, also auch $dx_y = \frac{1}{e^x} dy_y$, oder $x = log\, y$ substituirt: $d\, log\, y_y = \frac{dy_y}{y}$, was richtig ist, so dass man das Differenzial der Logarithmen auch aus dem Differenzial der Exponential-Grössen findet, auch wenn man die logarithmische Reihe gar nicht kennt. Umgekehrt findet man aus dem Differenzial der Logarithmen das Differenzial der Exponential-Grössen.

3) $y = sin\, x$, also $dy_x = cos\, x\, dx_x$, daher auch $dx_y = \frac{dy_y}{cos\, x}$.

Nun folgt aus $y = sin\, x$, dass $x = arc.\, sin\, y$ und $cos\, x = \sqrt{1 - sin^2 x} = \sqrt{1 - y^2}$. Diess substituirt, giebt:

$$d\, arc.\, sin\, y = \frac{dy_y}{\sqrt{1 - y^2}},$$

eine richtige Formel, wie Oben bewiesen wurde. Man kann daher das Differenzial des Bogens, auch ohne Kenntniss der Reihe und Operation, aus dem Differenzial des Sinus finden. Und dasselbe gilt, wie von selbst einleuchtet, für die übrigen goniometrischen und cyclometrischen Functionen.

Bei den Urfunctionen (Potenzen, Logarithmen, goniometrischen und cyclometrischen Functionen) ist die Umkehrung und Vertauschung der unabhängig Veränderlichen auch unmittelbar ohne Hülfe der Differenzialien möglich; aber in complicirten Ausdrücken und Gleichungen ist diese Umkehrung meist unmöglich, und darum ist es von Wichtigkeit, dass man einen Lehrsatz habe, nach welchem man differenziren kann, ohne dass man genöthigt ist, die oft unmögliche Forderung zu erfüllen, Functionen erst umzukehren, oder Gleichungen erst aufzulösen, die doch nicht aufgelöst werden können.

Zusatz 1. Der gewöhnliche Differenzial-Calcul bildet ohne Weiteres, d. h. ohne Beweis, die neue Gleichung:

$$dx_y = \frac{1}{\frac{dy_x}{dx_x}} dy_y \text{ aus } dy_x = \frac{dy_x}{dx_x} dx_x.$$

Er weiss schwerlich, was er thut. Denn in der einen Gleichung $dy_x = \frac{dy_x}{dx_x} dx_x$ ist dx_x eine beliebige und constante Zunahme von x, während dy_x das erste Glied in der Reihe Δy_x, also veränderlich und abhängig ist. In der andern Gleichung $dx_y = \frac{1}{\frac{dy_x}{dx_x}} dy_y$ ist nun dx_y, das anfangs eine beliebige Zunahme von x war, auf einmal eine veränderliche und abhängige Grösse, nämlich das erste Glied in der Reihe der Zunahme Δx_y, und das nämliche dy_y, das anfänglich eine abhängige Grösse dy_x war, ist ihm nun wie durch Zauber eine beliebige, d. h. constante Grösse geworden. Das bewirkt der gewöhnliche Differenzial-Calcul bloss durch Division. Aber in Wahrheit findet man durch Division nicht mehr und nicht weniger, als aus $dy_x = \frac{dy_x}{dx} dx_x$ die Grösse $dx_x = \frac{1}{\frac{dy_x}{dx_x}} dy_x$, die nichts nützt, und die man nicht brauchen kann, die daher der gewöhnliche Calcul unbedenklich als $dx_y = \frac{1}{\frac{dy_x}{dx_x}} dy_y$ nimmt.

Aber dass diess möglicherweise himmelweit verschiedene Dinge sein können, sieht Jeder ein. Es muss daher vorerst untersucht und bewiesen sein, ob man diese allerdings sehr willkommene Versetzung vornehmen dürfe oder nicht, und dass diess geschehen könne, ist im vorhergehenden Beweise gezeigt worden.

Zusatz 2. Diess giebt uns eine Erleichterung und Vereinfachung in Bezug auf die Zeichen. Da die Gleichungen $dy_x = \frac{dy_x}{dx_x} dx_x$ und $dy_y = \frac{dy_x}{dx_x} dx_y$ für einander gebraucht werden können, da also dasselbe Resultat hervorgeht, ob man y als Function von x oder x als Function von y nimmt, so lässt man die Bezeichnung der Grösse, nach welcher differenzirt wird, ganz weg, und schreibt einfach: dy, dx, dz. Denn es erfolgt ganz dasselbe, ob man sich unter dy den Werth dy_y oder dy_x denkt. Eben so auch bei dx.

Bis hieher, bis zum Beweise des obigen Satzes, war aber diese strenge Bezeichnungsart nothwendig. Von nun an werden wir bei einfachen Differenzial-Ausdrücken, bei denen kein Missverständniss stattfinden kann, die Indices weglassen, und einfach dy, d^2y ... dx, d^2x etc. schreiben. Denn es wird ganz auf dieselbe Art verfahren, ob man sich dx als constant und dy als erstes Differenzial, oder aber dy als constant und dx als erstes Differenzial denkt. Bei höheren Differenzialien sind die Indices auch entbehrlich, da z. B. d^2y von selbst anzeigt, dass y als Function einer andern unabhängig Veränderlichen genommen wurde, da die abhängig Veränderlichen immer um constante Grössen vermehrt werden, also selbst keine höheren Differenzialien haben können. Bei allen complicirten Formeln, bei denen diese einfachere Bezeichnungsart Missverständnissen ausgesetzt sein kann, werden wir uns aber an die strengere Bezeichnungsart halten. Wenn nicht so viele mathematische Werke in der einfachen Bezeichnungsart geschrieben wären, so dürfte wohl der Wunsch begründet sein, dass man sich immer und überall an die ganz strenge Bezeichungsart hielte.

Für uns wird Folgendes die Norm sein: Ist y eine Function von x, so wird dy_x, d^2y_x, d^3y_x etc. geschrieben, es bleibt der Index x, um die Grösse anzuzeigen, welche als unabhängig Veränderliche genommen ist. Hingegen ist in Formeln, in denen dy_x, d^2y_x etc. vorkommen, nicht mehr nothwendig, dass man auch dx_x schreibt, es genügt, wenn man einfach dx setzt, weil schon durch dy_x etc. die Grösse x als unabhängig Veränderliche angedeutet ist.

Bei Coefficienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{dz}$ etc. ist es auch nicht nothwendig, $\frac{dy_x}{dx}$, $\frac{dy_z}{dz}$ zu schreiben, da die Nenner dx, dz .. die unabhängig Veränderliche andeuten. — Diess ist die einfachste Norm, die angenommen werden kann, wenn die möglichen Missverständnisse vermieden werden sollen, was doch eine wesentliche Aufgabe der algarithmischen Technik ist. Es ist nicht möglich, sie einfacher zu machen.

Zusatz 3. Nun zeigt sich recht deutlich der grosse Vorzug der Differenzialzeichen, der aus ihrer gegenseitigen Correspondenz hervorgeht. Indem man nämlich die beliebige Zunahme von x, y, z .... nicht mit α, β, γ .., sondern mit dx, dy, dz ...

bezeichnet, hat man in ihnen sogleich möglicher Weise die ersten Differenzialien, wenn man bei einem Problem von einem Gesichtspunkte zum andern übergeht, wozu man oft der Allgemeinheit willen veranlasst wird. Und geschieht diess, so braucht man weder Gleichungen noch Zeichen zu ändern, sondern nur die gefundenen Substitutionen zu machen, und einfach fortzurechnen. — Hierin zeigt sich die Superiorität der Leibnitz'schen Bezeichnungsart vor jeder andern entweder wirklich versuchten oder nur irgend denkbaren Bezeichnungsart.

§. 45.

Vertauschung der unabhängig Veränderlichen für höhere Differenzialien.

Ich befürchte nicht mehr, dass jetzt noch das Missverständniss auftauchen könne, als fielen die höheren Differenzialien als unendlich kleine Grössen höherer Ordnung weg, wenn da nur von den ersten Differenzialien gesprochen wird, wo eben die Natur der Probleme keine andern, als die ersten Differenzialien erfordert. Die ersten Differenzialien bilden eine präcise Gleichung:

$$dx_y = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} dy_y \quad \text{und} \quad dy_x = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} dx_x.$$

Eben so präcise Gleichungen werden für die zweiten, dritten und die folgenden Differenzialien gebildet.

1) Aus der Gleichung:

$$d^2y_z = \frac{dy_x}{dx_x} d^2x_z + \frac{d^2y_x}{dx_x^2} dx_z^2$$

folgt, wenn $z = y$ genommen wird, $d^2y_y = 0$,

$$\text{also} \quad \frac{dy_x}{dx_x} d^2x_y + \frac{d^2y_x}{dx_x^2} dx_y^2 = 0,$$

$$\text{also} \quad \frac{d^2y_x}{dx_x^2} = -\frac{dy_x}{dx_x dx_y^2} d^2x_y,$$

was auch angeschrieben werden kann:

$$\frac{d^2y_x}{dx_x^2} = -\frac{\frac{d^2x_y}{dy_y^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3},$$

weil statt $\frac{dy_x}{dx_x}$ gesetzt werden kann $\frac{dy_y}{dx_y}$.

2) Aus der Gleichung:

$$d^3y_z = \frac{dy}{dx}d^3x_z + 3\frac{d^2y}{dx^2}d^2x_z dx_z + \frac{d^3y}{dx^3}(dx_z)^3$$

folgt, da für $z = y$ offenbar $d^3y_y = 0$ ist:

$$0 = \frac{dy}{dx}d^3x_y + 3\frac{d^2y}{dx^2}d^2x_y dx_y + \frac{d^3y}{dx^3}(dx_y)^3.$$

Substituirt man den in (1) gefundenen Werth für $\frac{d^2y}{dx^2}$, so folgt:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2 - \frac{dx}{dy}\frac{d^3x}{dy^3}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5}$$

u. s. w.

So nehmen sich die Formeln aus, wenn die Indices weggelassen werden, was hier füglich geschehen kann.

§. 46.

Differenzialien der Urfunctionen, ohne Voraussetzung ihrer Reihen.

Die vorausgehenden Lehrsätze geben uns die Mittel an die Hand, die Differenzialien der Urfunctionen unabhängig von den für sie gefundenen Reihen abzuleiten.

Daraus, dass wir die Differenzialien der transcendenten Grössen mit Hülfe der ihnen gleichen Reihen abgeleitet haben, könnte man vielleicht schliessen, dass der Differenzial-Calcul auf diese Reihen angewiesen sei. Diess ist aber keineswegs der Fall, und jene Ableitung geschah nur der Uebung und Verdeutlichung willen.

Die Differenzialien können gefunden werden, auch wenn die Reihen und ihre Bildungsgesetze unbekannt sind, ja dieser Gang ist sogar nothwendig, weil die Reihen, so lange ihre Bildungsgesetze nicht allgemein bewiesen sind, nur einen empirischen Werth haben können.

Es ist nun zu zeigen, wie man diese Differenzialien auch ohne Voraussetzung der ihren Functionen entsprechenden Reihen finden könne.

1) Potenzen. Für diese gilt ganz allgemein, wenn $y = ax^{\mu} + b$ ist, $dy_x = a\mu x^{\mu-1} dx$.

2) Logarithmen. Es sei gegeben: $y = {}^{a}log\, x$, so wird

$$y + \Delta y_x = {}^{a}log\,(x + dx) = {}^{a}log\, x + {}^{a}log\left(1 + \frac{dx}{x}\right),$$

$$\Delta y_x = {}^{a}log\left(1 + \frac{dx}{x}\right).$$

Man sieht a priori ein, dass die Reihe ${}^{a}log\left(1 + \frac{dx}{x}\right)$, wie sie auch sein möge, keine Constante enthalten könne, da, (für $dx = 0$,) ${}^{a}log\, 1 = 0$ wird.

Die Reihe hat daher die Form:

$$\Delta y_x = {}^{a}log\left(1 + \frac{dx}{x}\right) = A\left(\frac{dx}{x}\right) + B\left(\frac{dx}{x}\right)^2 + C\left(\frac{dx}{x}\right)^3 + \ldots$$

Das ganze erste Glied der Zunahme, d. h. das erste Differenzial ist dasjenige, das dx in der ersten Potenz enthält. Diess ist hier das Glied $A\left(\frac{dx}{x}\right)$, denn alle übrigen Glieder haben dx in höheren Potenzen. Es gilt daher die adäquate endliche Gleichung: $dy_x = A\frac{dx}{x}$.

Für die natürlichen Logarithmen bestimmt sich, wie bekannt: $A = 1$, und es ist: $dy = d(log\, x) = \frac{dx}{x}$.

Will man das zweite Differerenzial, so ist nach der Formel der Potenzen: $d\left(\frac{dx}{x}\right) = -\frac{dx^2}{x^2}$, also $d^2y_x = -\frac{dx^2}{x^2}$, und da $\frac{1}{2}d^2y = B\left(\frac{dx}{x}\right)^2$ ist, so bestimmt sich $B = -\frac{1}{2}$. U. s. w.

3) Exponential-Grössen. Aus $d\log x = \frac{dx}{x}$ findet man, wenn man $y = \log x$, also $x = e^y$ substituirt: $dy_x = \frac{dx}{x}$. Nach dem Lehrsatze der Vertauschung der unabhängigen Variabeln ist: $dx_y = x dy_y$, oder $d(e^y) = e^y dy$.

Will man das zweite Differenzial, so findet man nach dieser Formel wieder $d^2(e^y) = e^y dy^2$. U. s. w.

4) Die Sinusse eines Bogens x.

Da $\sin x = -\sin(-x)$ ist, so folgt, dass die Reihe für $\sin x$ nur ungerade Potenzen von x enthält, da die beiden Reihen für $+x$ und für $-x$ in Allem bis auf die Zeichen übereinstimmen müssen. Ferner da $\cos x = \cos(-x)$ ist, so folgt, dass die Reihe für $\cos x$, bloss gerade Potenzen von x enthält, da kein Unterschied in den Reihen hervorgeht, ob in sie $+x$ oder ob $-x$ substituirt wird. Ueberdiess ist das erste Glied der Reihe $\cos x$ offenbar gleich 1, weil $\cos x$ für $x = 0$ gleich 1 wird. Diess weiss man aus elementaren Betrachtungen der goniometrischen Functionen.

Nun ist $y = \sin x$, $(y + \Delta y_x) = \sin(x + dx)$, oder nach einem Fundamental-Satz der Trigonometrie:

$$y + \Delta y_x = \sin x \cos dx + \cos x \sin dx.$$

Da es sich um die Potenzen von dx handelt, so müssen $\cos dx$ und $\sin dx$ in Reihen, wie sie auch sein mögen, entwickelt gedacht werden, während $\sin x$ und $\cos x$ beibehalten werden, wie sie sind.

Es ist daher:

$$y + \Delta y_x = \sin x(1 + Adx^2 + Bdx^4 + ..) + \cos x(adx + bdx^3 + ...)$$

oder nach Potenzen von dx geordnet:

$$y + \Delta y_x = \sin x + a\cos x dx + A\sin x dx^2 + b\cos x dx^3 + ..$$

$$\Delta y_x = a\cos x dx + A\sin x dx^2 + b\cos x dx^3 + ..$$

Das erste Differenzial, d. h. dy_x ist die Summe der Glieder, die dx in der ersten Potenz zum Factor haben. Nur die Grösse $a\cos x\,dx$ enthält dx in der ersten Potenz, alle übrigen Glieder enthalten dx in höheren Potenzen, sie gehören also auch der Ordnung nach zum zweiten, dritten, vierten, n^{ten} Differenziale und es gilt die präcise endliche Gleichung:

$$dy_x = a\cos x dx, \text{ oder } d(\sin x) = a\cos x dx.$$

5) Der Cosinus eines Bogens.

Da $d(\sin x) = a\cos x dx$, so ist, wenn man nochmal differenzirt: $d^2 \sin x = a\,dx\,d\cos x$, also:

$$d\cos x = \frac{d^2 \sin x}{a\,dx}.$$

Nun ist $d\sin x = a\cos x dx = a\sqrt{1-\sin^2 x}\,dx$, also:

$$(d\sin x)^2 = a^2 dx^2 - a^2 \sin^2 x dx^2,$$

und nochmal differenzirt:

$$2(d\sin x)\,d^2 \sin x = -2a^2 \sin x\, d\sin x\, dx^2,$$

oder: $$d^2 \sin x = -a^2 \sin x\, dx^2.$$

Substituirt man: $d^2 \sin x = a\,dx\,d\cos x$, so wird:

$$d\cos x = -a\sin x\,dx.$$

Die Constante a wird nun wieder wie früher als $a=1$ gefunden, indem man durch die Gleichung $tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x}$ zur Tangente übergeht.

Es ist daher $d\sin x = \cos x\,dx$, $d\cos x = -\sin x\,dx$.

6) Die Differenzialien: $arc.\sin x$ und $arc.\cos x$.

Aus $d\sin x = \cos x dx$ wird, wenn $\sin x = y$, also $\cos x = \sqrt{1-y^2}$, $x = arc.\sin y$, $dx = d(arc.\sin y)$, $d\sin x = dy$ gesetzt wird:

$$dy_x = \sqrt{1-y^2}\,d(arc.\sin y),$$

und durch Vertauschung der unabhängig Variabeln:

$$d\,arc.\sin y_y = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Auf dieselbe Art wird:

$$d\,arc.\cos y_y = -\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$ gefunden.

7) Tangenten und Cotangenten.

Ihre Differenzialien werden aus $tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $cotg\,x = \frac{\cos x}{\sin x}$ gefunden. Es ist:

$$d\,tg\,x = \frac{\cos x\,d\sin x - \sin x\,d\cos x}{(\cos x)^2} = \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)}{(\cos x)^2}dx$$

$$= \frac{dx}{(\cos x)^2}.$$

Da $cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x}$ ist, so folgt:

$$d\,tg\,x = dx(1+tg^2 x).$$

Wird $tg\,x = y$, also $x = arc.tg\,y$, $dx = d\,arc.tg\,y$, $d\,tg\,x = dy$ substituirt, so folgt:

$$dy_x = d\,arc.tg\,y_x(1+y^2),$$

oder durch Vertauschung der unabhängig Variabeln:

$$d\,arc.tg\,y_y = \frac{dy}{1+y^2}.$$

Ganz auf gleiche Weise findet man:

$$d\,cotg\,x = -\frac{dx}{(sin\,x)^2},$$

oder $sin\,x = \frac{1}{\sqrt{1+cotg\,x^2}}$ substituirt:

$$d\,cotg\,x = -dx(1+cotg^2 x).$$

Durch Vertauschung der unabhängig Variabeln findet man dann:

$$d\,arc.\,cotg\,y_y = -\frac{dy}{1+y^2}.$$

8) Secanten und Cosecanten.

a) Aus $sec\,x = \frac{1}{cos\,x}$ folgt: $d\,sec\,x_x = \frac{sin\,x}{cos\,x^2}dx.$

b) Aus $cosec\,x = \frac{1}{sin\,x}$ folgt: $d\,cosec\,x_x = -\frac{cos\,x}{sin\,x^2}dx.$

a) Da $cos\,x = \frac{1}{sec\,x}$, also $sin\,x = \frac{\sqrt{sec^2 x-1}}{sec\,x}$, so wird:

$$\frac{sin\,x}{cos^2 x} = sec\,x\sqrt{sec^2 x-1} \text{ und } d\,sec\,x_x = sec\,x\sqrt{sec^2 x-1}\,dx.$$

Setzt man $sec\,x = y$, also $x = arc.sec\,y$, $dx = d\,arc.sec\,y$, so wird:

$$dy_x = y\sqrt{y^2-1}\;d\,arc.sec\,y,$$

und durch Vertauschung der unabhängig Veränderlichen:

$$d\,arc.sec\,y_y = \frac{dy}{y\sqrt{y^2-1}}.$$

b) Da ferner $sin\,x = \frac{1}{cosec\,x}$, $cos\,x = \frac{\sqrt{cosec^2 x - 1}}{cosec\,x}$, so wird:

$$\frac{cos\,x}{sin^2 x} = cosec\,x\sqrt{cosec^2 x - 1}\,,$$

und $d\,cosec\,x_x = -\frac{cos\,x}{sin\,x^2}\,dx = -\,cosec\,x\sqrt{cosec^2 x - 1}\,dx$,

und durch Vertauschung der unabhängigen Variabeln:

$$d\,arc.\,cosec\,y_y = -\frac{dy}{y\sqrt{y^2-1}}\,.$$

Zusatz. In dieser Ableitungsart wird nichts weggeworfen, nichts als unendlich klein vernachlässigt, noch viel weniger als unendlich klein angenommen; sondern Alles, was in's erste Glied gehört, sammelt man zum ersten, was in's zweite Glied gehört, zum zweiten, und so weiter, was in's n^{te} Glied gehört, zum n^{ten} Gliede.

Diese Ableitungen unterscheiden sich von den Ableitungen der Theorien des Unendlichkleinen, der Grenzen, der letzten Geschwindigkeit etc. nur darin, dass in den genannten Theorien Alles, was nicht zum ersten Differenzial gehört, als unnütz weggeworfen wird, was sich aber später wieder rächt, so dass man, um solch gewaltsames Verfahren entschuldigen zu können, zum Unendlichkleinen etc. seine Zuflucht zu nehmen genöthigt ist — während in unserer Ableitung nichts weggeworfen, sondern Alles nur auf die rechte Art geordnet wird, so dass sich Alles, was zum ersten Gliede gehört, in's erste Glied sammelt, und was in's n^{te} Glied gehört, auch in's n^{te} Glied zu stehen kommt. Ohnehin dürfte man ja nicht das in's erste Glied setzen, was in's n^{te} gehört, noch auch umgekehrt.

§. 47.

Beweis der Allgemeingültigkeit der Bildungsgesetze der Reihen für $log\,x$, $sin\,x$, $cos\,x$ etc.

Die Ableitung der Differenzialien der transcendenten Functionen, unabhängig von den Bildungsgesetzen der für sie gültigen Reihen, giebt uns die willkommenen Mittel an die Hand, diese Bildungsgesetze als ganz allgemein gültige zu beweisen.

1) Man weiss, dass $d\,log\,x = \frac{dx}{x}$ ist, unabhängig von einem vorausgesetzten Bildungsgesetze der logarithmischen Reihe.

Es werde nun angenommen, dass das Gesetz dieser Reihe nur bis zum n^{ten} Gliede gelte:

$$log\left(1+\frac{dx}{x}\right) = \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\frac{dx^2}{x^2} + \frac{1}{3}\frac{dx^3}{x^3} - .. \mp \frac{1}{n}\frac{dx^n}{x^n} \mp ..$$

so kann gezeigt werden, dass es auch für das $(n+1)^{te}$, also für alle Glieder gelte.

Denn die allgemeine Differenzial-Reihe:

$$\Delta y = dy + \frac{d^2y}{2} + \frac{1}{2}\frac{d^3y}{3} + \frac{1}{2.3}\frac{d^4y}{4} + ..$$
$$+ \frac{1}{1.2..n-1}\frac{d^ny}{n} + \frac{1}{1.2..n}\frac{d^{n+1}y}{n+1} + ..$$

gilt schlechthin, und man findet auch für die logarithmische Reihe das $(n+1)^{te}$ Glied, wenn man das n^{te} Glied differenzirt und durch $(n+1)$ dividirt.

Differenzirt man für die logarithmische Reihe das Glied $\mp \frac{1}{n}\frac{dx^n}{x^n}$, so erhält man: $\mp \frac{dx^{n+1}}{x^{n+1}}$, und dividirt man durch $(n+1)$, so geht als $(n+1)^{tes}$ Glied hervor: $\mp \frac{1}{n+1}\frac{dx^{n+1}}{x^{n+1}}$, woraus sogleich deutlich ist, dass das Bildungsgesetz allgemein gilt.

2) Man hat für $sin\,x$ die Reihe gefunden:

$$x - \frac{1}{1.2.3}x^3 + \frac{1}{1.2..5}x^5 - ..$$

und diese schreibt man aus Analogie fort; aber wie beweist man, dass sie allgemein so fortgehe?

Wenn man nun unabhängig von diesem Bildungsgesetze der Reihe findet, dass $d\,sin\,x = cos\,x\,dx$, und dass $d\,cos\,x = -sin\,x\,dx$, so hat man nach dem allgemeinen Lehrsatz:

$$\Delta y = dy + \frac{1}{2}d^2y + \frac{1}{2.3}d^3y + ..$$

Würde nun angenommen, dass die Bildungsgesetze von $sin\,x$ und $cos\,x$ etwa nur bis zum 4^{ten} (n^{ten}) Gliede gelten, so müssten

sie vermöge $d\sin x = \cos x\, dx$ und $d\cos x = -\sin x\, dx$, die unabhängig vom Bildungsgesetze der Reihe gefunden wurden, bis zum $(n+1)^{\text{ten}}$ Gliede gelten, weil durch das Differenziren ein Glied am Anfang der Reihe als constant geworden austritt, so dass, damit wieder n Glieder für $\sin x$ und $\cos x$ eintreten, aus der ersten Reihe nothwendig das $(n+1)^{\text{te}}$ Glied als ein ebenfalls gültiges mit hereingenommen werden muss, da die Factoren $\cos x$, $\sin x$, in der Gleichung $d\sin x = \cos x\, dx$, $d^2 \sin x = -\sin x\, dx^2$ etc. nothwendig wieder für n Glieder gelten müssen. Damit aber diese n Glieder gelten, muss die erste Reihe $\sin x$ schon ursprünglich wenigstens für $(n+1)$ Glieder gelten. Gilt sie aber für $(n+1)$ Glieder, so gilt sie aus denselben Gründen für alle Glieder.

Analoge Betrachtungen und Ableitungen lassen sich ohne Schwierigkeit für die Reihen e^x, *arc. sin x*, *arc. tg x* etc. etc. anstellen. Die Beweise können mit nur geringen Abänderungen aus dem Oben geführten Beweise hingeschrieben werden. —

Der Maclaurinsche Lehrsatz wird uns in den Stand setzen, einen kürzeren Beweis dieser Lehren zu geben.

§. 48.

Uebung im Differenziren zusammengesetzter Functionen *einer* veränderlichen Grösse.

Bei weitem die meisten Functionen sind zusammengesetzte Functionen, $y = fx$. Wollte man diese durch die Substitution von $(x + dx)$ statt x, differenziren, indem man mühsam alle Glieder, die dx in der ersten Potenz zum Factor haben, als erstes Glied, alle, die dx in der zweiten Potenz zum Factor haben, als zweites Glied u. s. w. zusammensuchte, so wäre das Differenziren ein sehr schwieriges und nicht mehr allgemein zu übersehendes Geschäft. Die Formeln der vorhergehenden Untersuchung überheben uns dieser Mühe, indem sie durch die Substitution einer neuen Veränderlichen alle Differenzial-Operationen auf die einfachen, allgemein übersehbaren Differenzialien zurückführen, also statt des empirischen Aufsuchens eines jeden Differenzials eine allgemeine Regel geben.

Hat man nämlich eine Function, z. B. $y = \sin(a + bx^2)$, zu differenziren, so substituirt man $z = a + bx^2$, und es wird

$y = \sin z$, $dy_x = \frac{dy}{dz} dz_x = \cos z \, dz_x$. Den Werth dz_x findet man aus $z = a + bx^2$; es ist $dz_x = 2bx\,dx$. Diess substituirt giebt: $dy_x = \cos(a + bx^2) \,.\, 2bx\,dx$.

Die Formeln der vorhergehenden §§. geben erst die Möglichkeit, alle zusammengesetzten Functionen einer veränderlichen Grösse expedit und nach allgemeinen Regeln zu differenziren.

Im Nachfolgenden stellen wir mehrere Beispiele zusammen, die zugleich als Uebung im Differenziren von Functionen einer Veränderlichen dienen können.

§. 49.

Differenzialien. Uebungsbeispiele im Differenziren einiger zusammengesetzter Functionen.

Die Functionen können nach den Uroperationen auf's Verschiedenste zusammengesetzt sein.

I. Zusammensetzung durch Addition oder Subtraction.

1) $d(ax^\mu + bx^\nu + cx^\rho + ..) =$

$= (a\mu x^{\mu-1} + b\nu x^{\nu-1} + c\varrho x^{\rho-1} + ..)\, dx_x$,

wie bereits bekannt ist.

2) $y = a + \frac{b}{\sqrt[3]{(x^2)}} - \frac{c}{x\sqrt[3]{x}} + \frac{e}{x^2}$;

$$dy = \left(-\frac{2}{3}\frac{b}{x^{\frac{5}{3}}} + \frac{4}{3}\frac{c}{x^{\frac{7}{3}}} - \frac{2e}{x^3}\right) dx_x.$$

II. Die Differenzialien der durch Multiplication und Division zusammengesetzten monomischen Functionen sind bereits Oben entwickelt worden.

III. Zusammengesetzte Potenzen.

3) Gegeben ist: $y = (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots)^\mu$.

Substituirt man: $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + .. = z$, so ist: $y = z^\mu$, $dy_x = \mu z^{\mu-1} dz_x$. Nun ist:

$$dz_x = (\beta + 2\gamma x + \ldots)\, dx_x.$$

Werden die Werthe z und dz_x in dy_x substituirt, so folgt:

$$dy_x = \mu(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + ..)^{\mu-1}(\beta + 2\gamma x + \ldots)\, dx_x.$$

Solche Substitutionen neuer Veränderlichen z sind immer nothwendig, allein man bringt es bald durch Uebung so weit, dass man sie bloss im Geiste macht, und die Resultate aufstellt, ohne die erforderlichen Substitutionen ausdrücklich hingeschrieben zu haben. Man wird sich aber nicht darüber täuschen, dass man sie jederzeit, wenn auch nur im Geiste macht, d. h. dass man nach der Formel $dy_z = \frac{dy}{dx} dx_z$ verfährt.

4) Gegeben ist:

$$y = \sqrt[4]{\left(a - \frac{b}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(c^2 - x^2)}\right)^3}.$$

Man substituirt $a - \frac{b}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(c^2 - x^2)} = z$, so ist:

$$y = \sqrt[4]{z^3} = z^{\frac{3}{4}}, \quad dy_x = \frac{3}{4} z^{-\frac{1}{4}} dz_x.$$

Nun ist $dz_x = d\left(a - bx^{-\frac{1}{2}} + (c^2 - x^2)^{\frac{1}{3}}\right)$

$$= \left(+\frac{1}{2} bx^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}(c^2 - x^2)^{-\frac{2}{3}} \times -2x\right) dx_x$$

$$= \left(\frac{b}{2x^{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{3} \frac{x}{(c^2 - x^2)^{\frac{2}{3}}}\right) dx_x.$$

Diese Werthe substituirt, geben:

$$dy_x = \frac{\left(\frac{3b}{2x\sqrt{x}} - \frac{2x}{\sqrt[3]{(c^2 - x^2)^2}}\right)}{4\sqrt[4]{\left(a - \frac{b}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(c^2 - x^2)}\right.}} dx_x$$

5) Gegeben ist:

$$y = x(a^2 + x^2)\sqrt{a^2 - x^2} = (a^2 x + x^3)\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$dy_x = (a^2 x + x^3)\, d\sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{a^2 - x^2}\, d(a^2 x + x^3).$$

Wenn diese Operationen ausgeführt, und die gefundenen Ausdrücke reducirt werden, so entsteht:

$$dy_x = \frac{a^4 + a^2 x^2 - 4x^4}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx_x.$$

6) Gegeben ist: $y = \frac{a^2 - x^2}{a^4 + a^2 x^2 + x^4}$.

Nach der Formel $y = \frac{z}{v}$, $dy_x = \frac{vdz_x - zdv_x}{v^2}$ ist:

$$dy_x = \frac{(a^4 + a^2x^2 + x^4)\,d(a^2 - x^2) - (a^2 - x^2)\,d(a^4 + a^2x^2 + x^4)}{(a^4 + a^2x^2 + x^4)^2}$$

und es wird nach gehöriger Reduction:

$$dy_x = \frac{-2x(2a^4 + 2a^2x^2 - x^4)\,dx_x}{(a^4 + a^2x^2 + x^4)^2}.$$

Auf dieselbe Art findet man durch entsprechende Substitutionen:

7) $$d\left(-\frac{1}{b(a+bx)}\right) = \frac{dx_x}{(a+bx)^2}.$$

8) $$d\left(\frac{\sqrt{a+bx^2}}{b}\right) = \frac{xdx_x}{\sqrt{(a+bx^2)}}.$$

9) $$d\left(\frac{1}{b\sqrt{a+bx^2}}\right) = -\frac{xdx_x}{\sqrt{(a+bx^2)^3}}.$$

10) $$d\left(\frac{x}{a\sqrt{a+bx^2}}\right) = \frac{dx_x}{\sqrt{(a+bx^2)^3}}.$$

IV. Logarithmische Zusammensetzungen.

Wenn e die Basis des natürlichen Logarithmen-Systems, a die Basis irgend eines künstlichen Systems ausdrückt, so ist, wie bekannt:

$$^e log\, x = \frac{1}{M_a}\, ^a log\, x,$$

worin M_a den Modulus des künstlichen Systems ausdrückt.

Bezeichnen wir durch $log\, x$ von nun an die natürlichen Logarithmen, so ist:

$$d(log\, x) = d\left(\frac{1}{M_a}\, ^a log\, x\right), \quad \frac{dx_x}{x} = \frac{1}{M_a}\, d\, ^a log\, x,$$

also: $$M_a \frac{dx}{x} = d\, ^a log\, x.$$

Ist $x = a$, so ist $^a log\, a = 1$, also $log\, a = \frac{1}{M_a}$; $M_a = \frac{1}{log\, a}$,

so dass auch $d\, ^a log\, x = \frac{1}{log\, a}\frac{dx}{x}$.

Da man also für jedes Logarithmen-System die entsprechenden Differenzialien finden kann, wenn man die Differenzialien der natürlichen Logarithmen kennt, so werden wir nur die letzteren ableiten.

11) Gegeben ist: $y = log(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + ..)$; es folgt:

$$dy_x = \frac{d(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + ..)}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + ..} = \frac{(\beta + 2\gamma x + ..)}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + ..} dx_x.$$

12) Gegeben ist:

$$y = log \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = log\, x - \frac{1}{2} log(a^2 + x^2).$$

Es folgt: $$dy_x = \frac{dx_x}{x} - \frac{x dx_x}{a^2 + x^2} = \frac{a^2 dx_x}{x(a^2+x^2)}.$$

13) Gegeben ist: $y = log\Big((a+x)^\mu . (b+x)^\nu . (c+x)^\rho ..\Big)$.

Es folgt: $dy_x = \left(\frac{\mu}{a+x} + \frac{\nu}{b+x} + \frac{\varrho}{c+x} + ..\right) dx_x.$

14) Gegeben ist:

$$y = log \frac{\sqrt{(1+x)} + \sqrt{(1-x)}}{\sqrt{(1+x)} - \sqrt{(1-x)}}$$

$$= log\Big(\sqrt{(1+x)} + \sqrt{(1-x)}\Big) - log\Big(\sqrt{(1+x)} - \sqrt{(1-x)}\Big),$$

so folgt:

$$dy_x = \frac{d\sqrt{(1+x)} + d\sqrt{(1-x)}}{\sqrt{(1+x)} + \sqrt{(1-x)}} - \frac{d\sqrt{(1+x)} - d\sqrt{(1-x)}}{\sqrt{(1+x)} - \sqrt{(1-x)}}.$$

Führt man diese Operationen aus, bringt Alles auf gleiche Nenner und reducirt, so folgt:

$$dy_x = -\frac{dx_x}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

15) Gegeben ist: $y = log\left(\frac{\sqrt{(1+x^2)} + x}{\sqrt{(1+x^2)} - x}\right)^{\frac{1}{2}}$; es folgt:

$$dy_x = \frac{dx_x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Gleicherweise

16) $d\Big(log(a+bx)\Big) = \frac{b dx_x}{a+bx}.$

17) $d\left(log \frac{a+bx}{a-bx}\right) = \frac{2ab\, dx_x}{a^2 - b^2x^2}.$

18) $d\Big(log(a+bx^2)\Big) = \dfrac{2bx\,dx_x}{a+bx^2}$.

19) $d\Big(log\Big(bx+\sqrt{(a^2+b^2x^2)}\Big)\Big) = \dfrac{b\,dx_x}{\sqrt{(a^2+b^2x^2)}}$.

20) $d(x\,log\,x - x) = log\,x\,dx_x$.

21) $d(log\,x)^n = n(log\,x)^{n-1}\dfrac{dx_x}{x}$.

22) $d\,log\,(log\,x) = ?$

Hier substituirt man $log\,x = z$, und man hat:

$$d\,log\,z = \frac{dz_x}{z}.$$

Aus $z = log\,x$ folgt: $dz_x = \dfrac{dx_x}{x}$. Diess substituirt, giebt:

$$d\,log\,(log\,x) = \frac{dx_x}{x\,log\,x}.$$

V. Zusammengesetzte exponentielle Functionen.

23) Gegeben ist: $d(a^x)$.

Da für natürliche Logarithmen: $log\,a^x = x\,log\,a$, also:

$$a^x = e^{x\,log\,a} = (e^x)^{log\,a},$$

so folgt: $d(a^x) = log\,a\,(e^x)^{log\,a-1}\,de^x$

$$d(a^x) = log\,a\,\frac{e^{x\,log\,a}}{e^x}\,.\,e^x dx_x = log\,a\,e^{x\,log\,a}dx_x$$

$$= a^x\,log\,a\,dx_x.$$

24) $d(x^x) = d\Big(e^{(log\,x)^x}\Big) = d(e^{x\,log\,x}) = e^{x\,log\,x}\,.\,d(x\,log\,x)$

$$= e^{x\,log\,x}\,.\,(1+log\,x)\,dx_x.$$

$$= x^x(1+log\,x)\,dx_x.$$

25) $d(x^z) = x^z\Big(log\,x\,dz_x + z\dfrac{dx_x}{x}\Big)$.

VI. Trigonometrische Functionen.

26) Gegeben ist: $sin(\alpha+\beta x+\gamma x^2+..)$, es folgt:

$$d\Big(sin(\alpha+\beta x+\gamma x^2+..)\Big) = cos(\alpha+\beta x+\gamma x^2+..)(\beta+2\gamma x+..)dx_x.$$

Gleicherweise können die Cosinusse, Tangenten etc., *arc. sin, arc. tg* etc., auf die verschiedenste Weise unter sich und mit andern Functionen zusammengesetzt sein. Die Operationen können immer leicht ausgeführt werden.

So ist:

27) $$d(\log \sin x) = \frac{d \sin x}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} dx_x = \operatorname{cotg} x \, dx_x.$$

28) $$d\Big(\log(\cos x)\Big) = -\operatorname{tg} x \, dx_x.$$

29) $$d\left(\log\left(\frac{a + b \operatorname{tg} x}{a - b \operatorname{tg} x}\right)\right) = \frac{2ab \, dx_x}{a^2 \cos x^2 - b^2 \sin x^2}.$$

30) $$d\left(\operatorname{arc.tg}\left(\frac{b \operatorname{tg} x}{a}\right)\right) = \frac{ab \, dx_x}{a^2 \cos x^2 + b^2 \sin x^2}.$$

31) Gegeben ist: $\cos x^{\sin x}$.

Nach der Analogie von v^z ist:

$$d(v^z) = v^z\left(\log v \, dz_x + z\frac{dv_x}{v}\right)$$

$$d \cos x^{\sin x} = \cos x^{\sin x}\left((\log \cos x) \cos x \, dx_v - \frac{\sin x \,.\, \sin x}{\cos x}\right) dx_x$$

$$= \cos x^{\sin x}\left(\cos x \log \cos x - \frac{\sin x^2}{\cos x}\right) dx_x.$$

32) Eben so ist:

$$d \sin x^{\cos x} = \sin x^{\cos x}\left(\frac{\cos x^2}{\sin x} - \sin x \log \sin x\right) dx_x.$$

Es hat keine Schwierigkeit, die Differenzialien auszuführen, wie verschiedenartig auch die Zusammensetzungen sein mögen. Wir schliessen mit dem Resultate, dass es keine endliche Combination der gegebenen Functionen gebe, die man nicht leicht und schnell und in endlichen Ausdrücken differenziren könnte. Die Differenzialien werden sogar oft sehr einfach, wie einige der obigen Beispiele zeigen, was jedoch weniger für den Differenzial-Calcul als für den Integral-Calcul von Wichtigkeit ist, dessen Aufgabe darin besteht, aus solchen gegebenen Differenzialien die Function zu finden, aus der sie abgeleitet, d. h. für die sie das erste Glied der Zunahme sind.

§. 50.

Die höhern Differenzialien zusammengesetzter Functionen.

Sucht man ausserdem noch die höheren Differenzialien von zusammengesetzten Functionen einer Veränderlichen, so findet man sie in den Formeln (§. 45.):

$$1)\quad dy_z = \frac{dy_x}{dx}\,dx_z,$$

$$2)\quad d^2y_z = \frac{dy_x}{dx}\,d^2x_z + \frac{d^2y_x}{dx^2}(dx_z)^2,$$

$$3)\quad d^3y_z = \frac{dy_x}{dx}\,d^3x_z + 3\frac{d^2y_x}{dx^2}\,d^2x_z dx_z + \frac{d^3y_x}{dx^3}(dx_z)^3.$$

U. s. w.

Will man sich aber dieser Formeln nicht bedienen, so kann man für jedes Beispiel unmittelbar aus dem ersten Differenzial das zweite, aus dem zweiten das dritte u. s. w. ableiten, wobei man die nämlichen Regeln befolgt, die für die Ableitung des ersten Differenzials gegeben sind. Im Allgemeinen ist es sicherer, sich der allgemeinen Formeln zu bedienen.

Cap. VII.

Fortsetzung des vorhergehenden Cap. Allgemeine Substitutions-Formeln.

§. 51.

Einführung neuer unabhängiger Variabeln in gegebene Differenzial-Formeln.

Wir nehmen hier die Aufgabe der Vertauschung der unabhängigen Variabeln von einem allgemeineren Gesichtspunkte aus.

Führen wir bei gegebenen Differenzial-Ausdrücken von x und y, statt dass wir bloss die unabhängigen Variabeln vertauschen, eine neue Variable z ein, so gelten die früheren allgemeinen Gleichungen:

$$dy_z = \frac{dy}{dx} dx_z,$$

$$d^2y_z = \frac{dy}{dx} d^2x_z + \frac{d^2y}{dx^2} (dx_z)^2,$$

u. s. w.

Nun sind drei Fälle möglich:

1) Man hat einen Differenzial-Ausdruck zwischen x und y so umzuwandeln, dass allgemein, sowohl y als x nach einer neuen Veränderlichen z differenzirt erscheinen, ohne dass diese Function z selbst näher bestimmt ist. Diess ist der allgemeinste Fall. Hier hat man die Aufgabe d^2y_x, d^3y_x ... d^2x_y, d^3x_y... zu eliminiren und durch Ausdrücke von der Form d^2y_z, d^3y_z.. d^2x_z .... zu ersetzen.

2) Man hat einen Differenzial-Ausdruck zwischen x und y so umzuwandeln, dass allgemein, sowohl y als x nach einer neuen Veränderlichen z differenzirt erscheinen, wobei z selbst oder dz durch eine Function zwischen x und y gegeben sind. Diess nennt man die Bedingungsgleichung. Es ist z. B. als Bedingungsgleichung gegeben $z = xy$; oder $z = \frac{x}{y}$, oder $dz_z = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, oder $dz_z = y dx_z$ etc. etc.

Auf jeden Fall hat man, da man die Bedingungsgleichung $z = U$ nach z differenziren kann: $dz_z = dU_z$; $d^2z_z = 0$, $d^3z_z = 0$, und so für alle nachfolgenden Differenzialien, da dz_z als constantes Differenzial eingeführt werden soll. Diese Bedingungsgleichungen, $dz = d_z U$, $d^2z = 0$ .... geben die Hülfsmittel an die Hand, die höheren Differenzialien gleichviel ob von x oder von y zu eliminiren, wodurch die Formeln einfacher und den Bedingungsgleichungen entsprechender werden.

3) Für die specielle Bedingungsgleichung $z = y$ tritt nichts anderes ein, als der im vorhergehenden §. behandelte Fall der Vertauschung der unabhängigen Variabeln. Hier werden in der allgemeinen, nach (1) gefundenen Formel die Werthe d^2y_z, d^3y_z ohne weiters gleich Null gesetzt (da $z = y$ ist), also alle Glieder weggeworfen, die jene Werthe zu Factoren haben.

§. 52.

Anwendung der vorigen Formeln.

Beispiel. Es sei gegeben:

$$-r = \varrho = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2y},$$

wo, wie man leicht sieht, y als Function der unabhängigen Variabeln x genommen ist. Es soll die Variable z eingeführt werden.

1) Ist z nur im Allgemeinen gegeben, so nimmt man aus Formel:

$$d^2y_z = \frac{dy}{dx} d^2x_z + \frac{d^2y}{dx^2} (dx_z)^2$$

den Werth $d^2y_x = d^2y_z - \frac{dy}{dx} d^2x_z$.

Diess in ϱ substituirt, giebt:

$$\varrho = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2y_z - dy\, d^2x_z}.$$

2) Ist ausserdem die Bedingungsgleichung gegeben:

$$dz = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

so ist durch Differenzirung:

$$d^2z = 2dx\, d^2x_z + 2dy\, d^2y_z = 0,$$

oder: $$dx\, d^2x_z + dy\, d^2y_z = 0 \quad (\beta).$$

Diese Bedingungsgleichung dient dazu, aus obiger allgemeinen Formel (ϱ) entweder d^2y_z oder d^2x_z zu eliminiren.

Eliminirt man mittelst (β) die Grösse d^2y_z, so wird:

$$\varrho = -\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2x_z}{dy}(dx^2 + dy^2)} = -\frac{dy\sqrt{dx^2 + dy^2}}{d^2x_z} = -\frac{dy\, dz}{d^2x_z}.$$

Eliminirt man mittelst derselben Gleichung (β) statt d^2y_z die Grösse d^2x_z, so wird nach gehöriger Reduction:

$$\varrho = \frac{dx\, dz}{d^2y_z}.$$

Hier sieht man recht deutlich, wie nothwendig die strengere Bezeichnungsart ist. Sehr oft bezeichnet man $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ mit ds (Differenzial des Bogens) und schreibt die Formel $\varrho = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2y}$ an als $\frac{ds^3}{dx\, d^2y}$.

Diese Formel ist richtig, wenn x als unabhängig Veränderliche, hingegen s (der Bogen) und y (der Ordinate) als Functionen von x genommen werden. Wer ist aber im Stande, der Formel $\frac{ds^3}{dx\, d^2y}$ anzusehen, ob s oder x als unabhängig Veränderliche gedacht wurde? Schreibt man hingegen $\frac{ds_x^3}{dx\, d^2y_x}$, so ist die Formel richtig und unzweideutig. Wäre hingegen s als unabhängig Veränderliche genommen, so würde die Formel nicht $\frac{ds^3}{dx\, d^2y}$, sondern $\frac{dx\, ds}{d^2y_s}$ sein, was doch von $\frac{ds^3}{dx\, d^2y_x}$ sehr verschieden ist. Würde man nun indiscret d^2y schreiben, so würden die beiden

Formeln $\frac{ds^3}{dx\,d^2y}$ und $\frac{dx\,ds}{d^2y}$ dasselbe ausdrücken, nämlich den Krümmungshalbmesser ϱ; nur würde d^2y in beiden Formeln auf ganz andere Art gefunden werden, einmal, indem man x, und das andremal, indem man s als unabhängig Veränderliche nimmt. Das ist ein so grosser Unterschied, dass es wohl der Mühe werth ist, ihn auch durch die Zeichen auszudrücken.

Anwendung dieser Formel auf eine Curve, z. B. auf die Parabel.

Für die Parabel $y^2 = px$ ist:

$$dy = \frac{1}{2}\frac{p^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}dx,$$

$$d^2y_x = -\frac{1}{4}\frac{p^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}dx^2,$$

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = dx\sqrt{1+\frac{1}{4}\frac{p}{x}}.$$

Die Formel $\frac{ds^3}{dx\,d^2y_x}$ erhält den Werth: $-\frac{4x^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{1}{4}\frac{p}{x}\right)^{\frac{3}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}}$.

Wird s als unabhängig Veränderliche genommen, so ist:

$$dy_s = \frac{1}{2}\frac{p^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}dx,$$

$$(a) \qquad d^2y_s = \frac{1}{2}\frac{p^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}d^2x_s - \frac{1}{4}\frac{p^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}dx^2.$$

Wird der Werth d^2x_s aus $\sqrt{dx^2+dy^2} = ds$, $2dx\,d^2x_s+2dy\,d^2y_s=0$ substituirt: $d^2x_s = -\frac{dy}{dx}d^2y_s$, so folgt:

$$(a) \quad d^2y_s = -\frac{1}{2}\frac{p^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}\frac{dy}{dx}d^2y_s - \frac{1}{4}\frac{p^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}dx^2,$$

$$d^2y_s = -\frac{1}{4}\frac{p}{x}d^2y_s - \frac{1}{4}\frac{p^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}dx^2,$$

$$d^2y_s\left(1+\frac{1}{4}\frac{p}{x}\right) = -\frac{1}{4}\frac{p^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}dx^2,$$

$$d^2y_s = -\frac{1}{4}\frac{p^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}.\left(1+\frac{1}{4}\frac{p}{x}\right)}dx^2,$$

also: $$\frac{dx\,ds}{d^2y_s} = -\frac{4x^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{1}{4}\frac{p}{x}\right)^{\frac{3}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}},$$ wie Oben.

§. 53.

Andere Beispiele über dieselbe Formel.

1) Es sei wieder $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y_x}$ gegeben, und als Bedingungs-Gleichung der unabhängig Veränderlichen: $z=xy$, also $dz=xdy+ydx$, $d^2z=0=xd^2y_z+2dx\,dy+yd^2x_z$, $d^3z=0$ etc.

Die allgemeine Formel wird wieder: $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y_z-dy\,d^2x_z}$.

Will man z. B. d^2x_z eliminiren, so hat man aus der Bedingungs-Gleichung $xd^2y_z+2dx\,dy+yd^2x_z=0=(\beta)$:

$$d^2x_z = -\frac{xd^2y_z}{y}-\frac{2dx\,dy}{y},$$

und diess in obige allgemeine Formel substituirt, giebt:

$$\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{d^2y_z\left(dx+\frac{x}{y}dy\right)+2\frac{dx\,dy^2}{y}} = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{d^2y_z\frac{dz}{y}+\frac{2dx\,dy^2}{y}} =$$

$$= \frac{y(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dz\,d^2y_z+2dx\,dy^2}.$$

2) Es sei wieder gegeben: $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y_x}$, und als Gleichung für z folgende: $dz=xdy-ydx$, also:

(1) $d^2z=0=xd^2y_z-yd^2x_z$. U. s. w.

Die allgemeine Formel war: $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y_z-dy\,d^2x_z}$.

Will man z. B. d^2x_z eliminiren, so findet man aus (1):

$$d^2x_z = \frac{x}{y}d^2y_z;$$

diess substituirt, giebt:

$$\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y_z - dy\,.\,\frac{x}{y}d^2y_z} = \frac{y\,(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{d^2y_z\,(ydx-xdy)} = -\frac{y\,(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dz\,d^2y_z}.$$

Diese Beispiele kann man für eine und dieselbe Formel oder auch für verschiedene Formeln beliebig vervielfältigen, je nachdem man beliebige Bedingungs-Gleichungen nimmt.

Es gelten nun für einen und denselben Ausdruck $(\varrho) = -r$ folgende Differenzialien:

1) $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y_x}$; für $y=fx$ und x als unabhängige Variable.

2) $\frac{-(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dy\,d^2x_y}$; für $x=Fy$, und y als unabhängige Variable.

3) $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y_z - dy\,d^2x_z}$; für $x=\varphi z$, und z als unabhängige Variable.

4) $-\frac{dy\,dz}{d^2x_z}$

5) $\frac{dx\,dz}{d^2y_z}$

} für die Bedingungs-Gleichung: $dz=\sqrt{dx^2+dy^2}$, und z als unabhängige Variable.

6) $\frac{y^2\,(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dz\,(yd^2y_z+dy^2)}$; für die Bedingungs-Gleichung: $dz=ydx$, und z als unabhängige Variable.

7) $\frac{y\,(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dz\,d^2y_z+2dx\,dy^2}$; für die Bedingungs-Gleichung: $z=xy$, und z als unabhängige Variable.

8) $\frac{-y\,(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dz\,d^2y_z}$; für die Bed.-Gleichung: $dz=xdy-ydx$, und z als unabhängige Variable.

U. s. w.

Alle diese Ausdrücke geben die nämliche Grösse, und die Verschiedenheit ihrer Operationen kommt daher, dass verschiedene Grössen z als unabhängige Veränderliche genommen wurden.

Zusatz. Diese verschiedenen Formen eines und desselben Ausdruckes zu finden, ist nicht bloss eine Uebung des Calculs, sondern es hat auch eine wissenschaftliche Bedeutung. Man weiss, dass für die Integration der Differenzial-Gleichungen diese Umwandlung oft nothwendig ist. Ausserdem stellen sich nicht selten

die physikalischen Gesetze in Differenzial-Ausdrücken dar. Man kann nicht prätendiren, dass sich die Natur nach dem Calcul richte, wohl aber kann und soll sich der Calcul nach der Natur richten, denn er hat die Fähigkeit, sich allen Formen anzubequemen. Man kann nicht prätendiren, dass ein Naturgesetz immer elegant und fasslich sei für Ausdrücke, in welchen die Ordinate, oder die Abscisse die unabhängig Veränderliche ist, denn was geht die Natur die Ordinate oder die Abscisse an, die künstlich gewählte Grössen sind? Wohlan nun, man nehme andere unabhängig Veränderliche, und man wird endlich auf den einfachen, eleganten und fasslichen Ausdruck der Naturgesetze kommen.

§. 54.

Allgemeingültigkeit dieser Formeln.

I. Es ist nicht schwer, für die Formeln des §. 45. ein allgemeines Symbol aufzustellen.

Es ist:

$$1)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

Bezeichnet $\frac{dy}{dx}$, dass y als Function von x betrachtet und nach x differenzirt wird, und drückt also d_y (das Differenzial-Zeichen mit untergesetztem Index) aus, dass nun nach y differenzirt wird, so kann man auch schreiben:

$$1)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx} d_y(y),$$

worin sogleich deutlich ist, dass y als unabhängig Veränderliche genommen wird, und dass $d_y(y)$ ganz dasselbe ausdrückt, wie dy_y.

Es ist:

$$2)\quad \frac{d^2y_x}{dx_x^2} = -\frac{dy}{dx^3} d^2y_x.$$

Diess kann auch geschrieben werden:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{dx} d_y\left(\frac{1}{dx} d_y(y)\right).$$

d. h. man findet $\frac{d^2y}{dx^2}$, wenn man $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx} d_y(y)$ wieder nach y differenzirt, und noch durch dx dividirt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{dx} d_y\left(\frac{1}{dx} d_y(y)\right).$$

Eben so findet man:

$$3) \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{dx} d_y\left(\frac{1}{dx} d_y\left(\frac{1}{dx} d_y(y)\right)\right),$$

d. h. wenn man $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{dx} d_y\left(\frac{1}{dx} d_y(y)\right)$ nach y differenzirt, nämlich dy constant und dx veränderlich nimmt.

Mit dx muss man noch dividiren, oder, was dasselbe ist, den Factor $\frac{1}{dx}$ vorsetzen, weil man auch auf der andern Seite der Gleichung statt $\frac{d^3y}{dx^2}$ schreibt $\frac{d^3y}{dx^3}$.

Das Fortschreitungsgesetz dieser Formel ist klar. Es ist:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{1}{dx} d_y\left(\frac{1}{dx} d_y\left(\frac{1}{dx} d_y\left(\frac{1}{dx} d_y(y)\right)\right)\right).$$

So elegant diese Formel ist, so wenig brauchbar ist sie. Denn bei der wirklichen Substitution muss man immer zu den ausgeführten Operationen zurückkehren, und

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{dx}{dy}\frac{d^2x}{dy^2}; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2 - \frac{dx}{dy}\frac{d^3x}{dy^3}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5} \text{ etc.}$$

setzen. Denn auf diese Ausdrücke kommt man, wenn man die Operationen: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx} d_y(y)$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{dx} d_y\left(\frac{1}{dx} d_y(y)\right)$ etc. ausführt.

II. Etwas schwieriger scheint es, das Bildungsgesetz der allgemeinen Formeln des §. 45. zu entdecken.

Die Formeln sind:

$$dy_z = \frac{dy}{dx} dx_z,$$

$$d^2y_z = \frac{dy}{dx} d^2x_z + \frac{d^2y}{dx^2} (dx_z)^2,$$

$$d^3y_z = \frac{dy}{dx}d^3x_z + 3\frac{d^2y}{dx^2}d^2x_z dx_z + \frac{d^3y}{dx^3}(dx_z)^3,$$

$$d^4y_z = \frac{dy}{dx}\Big\}d^4x_z + \frac{d^2y}{dx^2}\Big\{\begin{matrix}4d^3x_z dx_z \\ +3(d^2x_z)^2\end{matrix} + \frac{d^3y}{dx^3}\Big\}6d^2x_z dx_z^2 + \frac{d^4y}{dx^4}\Big\}d^4x_z,$$

$$d^5y_s = \frac{dy}{dx}\Big\}d^5x_z + \frac{d^2y}{dx^2}\Big\{\begin{matrix}5d^4x_z dx_z \\ 10d^3x_z d^2x_z\end{matrix} + \frac{d^3y}{dx^3}\Big\}\begin{matrix}10\,d^3x_z dx_z^2 + \\ 15(d^2x_z)^2 dx_z\end{matrix}$$
$$+ \frac{d^4y}{dx^4}\Big\}10d^2x_z dx_z^3 + \frac{d^5y}{dx^5}\Big\}dx_z^5.$$

Nun ist das Bildungsgesetz klar.

Um $d^n y_z$ zu finden, schreibt man zuerst an:

1) $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, ... bis $\frac{d^ny}{dx^n}$.

2) Mit jedem dieser Factoren verbindet man Differenzialien von x, so zwar, dass die Summe ihrer Indices gleich n ist; jedoch dürfen mit $\frac{dy}{dx}$ nur Differenzialien verbunden werden, die aus einem Factor bestehen, mit $\frac{d^2y}{dx^2}$, die aus zwei Factoren bestehen, mit $\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha}$, die aus α Factoren bestehen, mit $\frac{d^ny}{dx^n}$, die aus n Factoren bestehen, wie z. B. $(dx_z)^n$.

Die Anzahl und Ordnung der mit $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ ... zu verbindenden Differenzialien von x nach Unionen, Binionen, Ternionen u. s. w. findet man nach den Regeln der Combination von n Elementen zur Summe n.

3) Um die Zahlen-Coefficienten der Factoren dx_z zu finden, betrachtet man die Differenzial-Indices als eben so oft wiederholte Elemente einer Permutation, und sucht ihre Permutations-Zahl.

Kommen Potenzen gleicher Differenzialien vor, z. B. $(d^2x_z)^3$, $(d^3x_z)^2$, so verfährt man gerade wie bei Permutationen, d. h. man dividirt im ersten Falle $\left((d^2x_z)^3\right)$ durch 1.2.3, im zweiten durch 1.2, und noch ausserdem im ersten Falle durch die dritte Potenz von 1.2 (was dem Index d^2x_z entspricht), und im zweiten Falle

durch die zweite Potenz von 1.2.3 (was dem Index d^3x_z entspricht), so dass die Permutations-Zahl von $(d^\alpha x_z)^\beta$ wird:

$$\frac{1.2.3\ldots(\alpha+\beta)}{1.2.3..\beta.(1.2..\alpha)^\beta}.$$

4) Diese Permutations-Zahlen schreibt man als Coefficienten vor, und verbindet alle Glieder durch +, so erhält man den vollständigen Ausdruck von $d^n y_z$.

§. 55.

Beispiel.

Wollen wir $d^6 y_z$ finden, so nehmen wir die 6 Elemente dx, d^2x, d^3x, d^4x, d^5x, d^6x und combiniren sie zur Summe 6 mit Wiederholung der Elemente.

Wir erhalten:

I. Ordnung: d^6x.
II. Ordnung: $d^5x\,dx$, $d^4x\,d^2x$, $(d^3x)^2$.
III. Ordnung: $d^4x\,(dx)^2$, $d^3x\,d^2x\,dx$, $(d^2x)^3$.
IV. Ordnung: $d^3x\,(dx)^3$, $(d^2x)^2\,(dx)^2$.
V. Ordnung: $d^2x\,(dx)^4$.
VI. Ordnung: $(dx)^6$.

Die Permutations-Zahlen sind:

von d^6x gleich $\frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3.4.5.1} = 1$

von $d^5x\,dx$ gleich $\frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3.4.5.1} = 6$

von $d^4x\,d^2x$ gleich $\frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3.4.1.2} = 15$

von $(d^3x)^2$ gleich $\frac{1.2.3.4.5.6}{(1.2.3)^2.1.2} = 10$

von $d^4x\,(dx)^2$ gleich $\frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3.4.1.2.1^2} = 15$

von $d^3x\,d^2x\,dx$ gleich $\frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3.1.2.1} = 60$

von $(d^2x)^3$ gleich $\frac{1.2.3.4.5.6}{(1.2.)^3.1.2.3} = 15$

von $d^3x\,(dx^3)$ gleich $\dfrac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3.1.2.3.1^3} = 20$

von $(d^2x)^2\,(dx)^2$ gleich $\dfrac{1.2.3.4.5.6}{(1.2.)^2.1.2.1.2.1^2} = 45$

von $d^2x\,dx^4$ gleich $\dfrac{1.2.3.4.5.6}{1.2.1.2.3.4.1^4} = 15$

von dx^6 gleich $\dfrac{1.2.3.4.5.6}{1^6.1.2.3.4.5.6} = 1.$

Nun verbindet man die Unionen mit $\dfrac{dy}{dx}$, die Binionen mit $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ etc., und man erhält:

$$d^6y_z = \frac{dy}{dx}\Big\{d^6x_z\Big\} + \frac{d^2y}{dx^2}\Big\{\begin{matrix}6\,d^5x_z dx_z\\ +\,15\,d^4x_z d^2x_z\\ +\,10\,(d^3x_z)^2\end{matrix}\Big\} + \frac{d^3y}{dx^3}\Big\{\begin{matrix}15 d^4x_z\,(dx_z)^2\\ +\,60 d^3x_z d^2x_z dx_z\\ +\,15\,(d^2x_z)^3\end{matrix}\Big\} +$$
$$+ \frac{d^4y}{dx^4}\Big\{\begin{matrix}20\,d^3x_z(dx_z)^3\\ +\,45\,(d^2x_z)^2\,(dx_z)^2\end{matrix}\Big\} + \frac{d^5y}{dx^5}\Big\{15\,d^2x_z(dx_z)^4\Big\} + \frac{d^6y}{dx^6}(dx_z)^6.$$

Der Vortheil dieses Bildungsgesetzes ist, dass man jedes beliebige Glied eines Ausdruckes, unabhängig von allen vorhergehenden und nebenstehenden Ausdrücken, vollständig a priori aufstellen kann.

Es wäre nicht schwer, aus der Aufstellung des n^{ten} Coefficienten diess Gesetz auch für den $(n+1)^{\text{ten}}$ Coefficienten, und sohin als allgemeingültig zu beweisen. — Auch wäre es möglich, aus dem Apparate der analytischen Zeichensprache obige Regel in kurzen Symbolen auszudrücken. Allein da, wo die Zeichensprache am Ende schwieriger würde, als die Sache selbst, ist es einfacher, sich an die Sache zu halten, und die allgemeine Regel in Worten zu geben, wodurch sie Allen zugänglich bleibt, sowohl denen, die eine gewählte Zeichensprache annehmen, als auch denen, die sie nicht annehmen.

§. 56.

Anwendung auf $y = \sin e^z$.

Ist die Function $y = \sin e^z$ gegeben, so wird $x = e^z$, und $y = \sin x$.

Dann ist $\frac{dy}{dx} = +\cos x = +\cos e^z$; $\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x = -\sin e^z$;
$\frac{d^3y}{dx^3} = -\cos e^z$; $\frac{d^4y}{dx^4} = +\sin e^z$; $\frac{d^5y}{dx^5} = +\cos e^z$; $\frac{d^6y}{dx^6} = -\sin e^z$.

Ferner $\frac{dx}{dz} = e^z$, $\frac{d^2x}{dz^2} = e^z$, $\frac{d^3x}{dz^3} = e^z$ .. $\frac{d^6x}{dz^6} = e^z$, und es wird:

$$d^6y_z = d^6 \sin e^z = dz^6 (e^z \cos e^z - 31e^{2z} \sin e^z - 90e^{3z} \cos e^z + \\ + 65e^{4z} \sin e^z + 15e^{5z} \cos e^z - e^{6z} \sin e^z).$$

Bei der Maclaurinischen Reihe werden wir vielleicht Gelegenheit finden, die eben entwickelten Gesetze weiter anzuwenden.

Wir schliessen mit dem Resultate, dass man im Stande ist, im Ausdruck $y = fx$, $x = \varphi z$ den Werth $d^n y_z$ zu geben, wenn man die Differenzialien $d_x^n(y)$ und $d_z^n(x)$ kennt. — Es wäre nicht schwierig, aber weitläufig, diese Untersuchungen auf Ausdrücke von der Form: $y = fx$, $x = \varphi z$, $z = \psi v$ anzuwenden und daraus den allgemeinen Ausdruck $d^n y_v$ in Differenzialien von y, von x und von z zu geben. Führen bei singulären Fällen Untersuchungen auf solche Probleme, so kennt man den Weg, den man zu gehen hat. Die allgemeine Theorie kann sich aber nur mit dem schlechthin Allgemeinen beschäftigen.

Cap. VIII.

Differenzialien von Functionen mehrerer veränderlicher Grössen. Partielle Differenzialien.

§. 57.

Bezeichnung der partiellen Differenzialien.

Es sei u eine Function mehrerer veränderlicher Grössen, $x, y, z \ldots$, also $u = f(x, y, z \ldots)$ und $x, y, z \ldots$ seien wie immer mit einander zu einem Ausdrucke verbunden.

Differenzirt man u so, dass man bloss x als veränderlich, hingegen $y, z \ldots$ als constant nimmt, d. h. dass man mit diesen so verfährt, wie bei der gewöhnlichen allgemeinen Differenzirung mit Constanten verfahren wird, so bezeichnet man diess durch: $\left|\frac{du}{dx}\right| dx$.

Ist z. B. $u = x^m y - y^2 - y^n \log x$, so ist:

$$\left|\frac{du}{dx}\right| dx = \left(m x^{m-1} y - \frac{y^n}{x}\right) dx.$$

Eben so drückt $\left|\frac{du}{dy}\right| dy$ aus, dass man in der Function u die Grösse y allein als veränderlich, hingegen $u, z \ldots$ als constant genommen habe, so dass im obigen Beispiele:

$$\left|\frac{du}{dy}\right| dy = (x^m - 2y - n y^{n-1} \log x)\, dy$$

wird.

Die Bezeichnungen von $\left|\frac{du}{dz}\right| dz$; $\left|\frac{du}{dv}\right| dv$; etc. sind durch sich selbst verständlich.

Das Symbol $\left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right| dx\,dy$ drückt aus, dass man in der Function u zuerst x als veränderlich und y als constant, und dann in dem gewonnenen Ausdrucke $\left|\frac{du}{dx}\right| dx$ nur y als veränderlich und x als constant genommen habe.

Hierin ist die Aufeinanderfolge der Differenzialien $dx\,dy$ im Nenner $\left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right|$ entscheidend. Denn $\left|\frac{d^2u}{dy\,dx}\right| dy\,dx$ würde ausdrücken, dass man in u zuerst y allein als veränderlich, und in dem Resultate $\left|\frac{du}{dy}\right| dy$ nur x allein als veränderlich genommen habe, woraus $\left|\frac{d^2u}{dy\,dx}\right| dy\,dx$ hervorginge.

Im obigen Beispiele wird:

$$\left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right| dx\,dy = \left(mx^{m-1} - \frac{ny^{n-1}}{x}\right) dx\,dy.$$

Aber auch $\left|\frac{d^2u}{dy\,dx}\right| dy\,dx$ wird: $\left(mx^{m-1} - \frac{ny^{n-1}}{x}\right) dx\,dy.$

Das Symbol $\left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| dx^2$ drückt aus, dass man in $\left|\frac{du}{dx}\right| dx$ wieder nur bloss x als veränderlich genommen und noch einmal nach x differenzirt habe.

Dasselbe drückt $\left|\frac{d^2u}{dy^2}\right| dy^2$ in Beziehung auf y aus, so dass im obigen Beispiele:

$$\left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| dx^2 = \left(m.m-1x^{m-2}y + \frac{y^n}{x^2}\right) dx^2;$$

$$\left|\frac{d^2u}{dy^2}\right| dy^2 = -\left(2 + n.n-1y^{n-2}\log x\right) dy^2.$$

Die Symbole:

$$\left|\frac{d^2u}{dx\,dz}\right| dx\,dz, \ldots \quad \left|\frac{d^3u}{dx^3}\right| dx^3; \quad \left|\frac{d^3u}{dx^2\,dy}\right| dx^2\,dy, \quad \left|\frac{d^3u}{dx\,dy\,dx}\right| dx^2\,dy \ldots$$

$$\left|\frac{d^4u}{dx^4}\right| dx^4, \quad \left|\frac{d^4u}{dx^3\,dy}\right| dx^3\,dy; \quad \left|\frac{d^4u}{dx^2dy^2}\right| dx^2\,dy^2 \ldots.$$

sind nun für sich selbst verständlich.

Zusatz. Diese von uns beibehaltene Bezeichnungsart ist die ursprüngliche und alte, namentlich die Euler'sche.

Einige Neuere, namentlich Franzosen, La Grange, Legendre, La Croix u. m., schreiben: $\frac{du}{dx} dx$ statt $\left|\frac{du}{dx}\right| dx$, $\frac{du^2}{dx\,dy} dx\,dy$ statt

$\left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right| dx\,dy$, indem sie einfach die Klammern weglassen. — Diess ist zweideutig. Denn $\left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| dx^2$ drückt das zweite Differenzial von u nach x aus, wenn u eine Function von x und von noch mehreren Veränderlichen y, z.. ist, während $\frac{d^2u}{dx^2}\,dx^2$ das zweite Differenzial von u nach x ausdrückt, wenn u eine Function von der einzigen Veränderlichen x ist. Es ist daher $\left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| dx^2$ der allgemeine, und $\frac{d^2u}{dx^2}dx^2$ der besondere Fall, in welchem die in $\left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| dx^2$ möglichen Variabeln als solche ausgefallen sind.

Aus diesem Grunde kann diese zwar einfache, aber immerhin ungenügende Bezeichnungsart $\frac{d^2u}{dx^2}\,dx^2$ als Bezeichnungsart für partielle Differenzialien nicht angenommen werden.

Einige andere Mathematiker bezeichnen nach dem Vorgange Cauchy's die partiellen Differenzialien mit einem grossen D. Diess ist unnöthig. Denn die Operationen sind ganz dieselben, wie bei allgemeinen Differenzialien, d. h. man verfährt in beiden ganz nach denselben Gesetzen. Wo aber dieselben Operationen sind, müssen auch dieselben Zeichen sein.

Andere bezeichnen nach dem Vorgange Jacobi's die partiellen Differenzialien mit dem geschwungenen ∂ und schreiben z. B. $\frac{\partial^2u}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy$ statt $\left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right| dx\,dy$. Diese Zeichen sind einfach, man erspart sich die Klammern, aber sie sind nicht consequent. Denn warum schreibt man nicht auch: $\frac{\partial^2u}{\partial x\,\partial y}\,\partial x\,\partial y$? Antwort, weil die Factoren $\partial x\,\partial y$ im Zähler keinen Sinn haben würden, wenn $dx\,dy$ einen Sinn hat, den es allerdings hat. Es ist nun nicht einzusehen, welchen Sinn sie im Nenner $\frac{\partial^2u}{\partial x\,\partial y}$ haben sollen, da sie keinen im Zähler haben. Sollen sie aber ganz dasselbe ausdrücken, was $dx\,dy$ ausdrückt, nun so schreibe man auch $dx\,dy$, also: $\frac{\partial^2u}{dx\,dy}\,dx\,dy$, und dann ist einige Consequenz in dieser Bezeichnungsart, obgleich auch so noch nicht das geschwungene ∂ gerechtfertigt ist, so wenig als das grosse D von Cauchy. Denn

ob die Buchstaben gross oder klein sind, das macht keinen Unterschied; sowie sie anders gestaltet sind (∂x statt dx), sollen sie auch andere Operationen ausdrücken. Es muss Axiom der mathematischen Zeichensprache sein, dass für dieselben Operationen auch dieselben Zeichen beibehalten werden, und der Buchstabe d ist hier ein Zeichen. Diess gilt auch für die Bezeichnungsarten der Logarithmen, der Sinusse, Cosinusse etc., und wenn diese nämlichen Operationen doch noch Unterschiede zulassen, wie z. B. die Logarithmen für verschiedene Grundzahlen des Systems, die trigonometrischen Functionen für verschiedene Radien der Tafeln, so wird diess nicht in das allgemeine Zeichen mitverschlungen, sondern besonders ausgedrückt, z. B. ${}^{a}log\,x$, ${}^{e}log\,x$, ${}^{r}sin\,x$, ${}^{k}sin\,x$ etc., und nach dieser Analogie muss das partielle Differenzial neben dem allgemeinen Zeichen d noch besonders ausgedrückt werden. Dieser besondere Ausdruck besteht in den Klammern $\left|\frac{du}{dx}\right| dx$ etc.

Es ist daher anzunehmen, dass Jeder, dem an der Sache selbst und an der Consequenz der Wissenschaft mehr gelegen ist, als an einer beliebigen und in diesem Falle haltlosen Neuerung, die alte Bezeichnungsart $\left|\frac{du}{dx}\right| dx$ etc. beibehalten wird.

§. 58.

Differenzialien von Functionen *zweier* veränderlicher Grössen.

Es sei u eine Function zweier Veränderlichen, x und y, $u = f(x, y)$. Nimmt man jede derselben als irgend eine Function einer andern Veränderlichen ω, also $x = \varphi\omega$, $y = \psi\omega$; wird ferner ω um $d\omega_\omega$ vermehrt, so wird x nicht um dx, sondern um $\left(dx_\omega + \frac{1}{2}d^2x_\omega + \frac{1}{2.3}d^3x_\omega + \ldots\right)$ und y um $\left(dy_\omega + \frac{1}{2}d^2y_\omega + \frac{1}{2.3}d^3y + \ldots\right)$ vermehrt, und es wird:

$$(u + \Delta u) = f(x + \Delta x_\omega,\ y + \Delta y_\omega) =$$

$$= f\left(x + dx_\omega + \frac{1}{2}d^2x_\omega + \ldots;\ y + dy_\omega + \frac{1}{2}d^2y_\omega + \ldots\right)$$

Es gilt nun, diesen Ausdruck nach aufsteigenden Potenzen von $d\omega_\omega$ zu entwickeln, wobei aus dem Früheren bekannt ist, dass dx_ω und dy_ω beide die Grösse $d\omega_\omega$ in der ersten Potenz, d^2x_ω, d^2y_ω, $dx_\omega dy_\omega$ die Grösse $d\omega_\omega$ in der zweiten Potenz enthalten u. s. w. $d^3x_\omega \ldots$ in der dritten Potenz etc.

Man erhält den Ausdruck $(u + \Delta u)$, wenn man zuerst x allein als veränderlich, und dann, wenn diess entwickelt ist, y allein als veränderlich, oder umgekehrt zuerst y und dann x als veränderlich nimmt.

Nehmen wir nun zuerst x allein als veränderlich, so wird:

$$f(x + dx_\omega + \frac{1}{2}d^2x_\omega + .., y) = f(x, y) + d_x f(x, y) + \frac{1}{2}d_x^2(\ldots) + \ldots$$

oder, da $f(x, y) = u$ ist,

$$= u + \left|\frac{du}{dx}\right| dx_\omega + \frac{1}{2}\left(\left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| dx_\omega^2 + \left|\frac{du}{dx}\right| d^2x_\omega\right) + \frac{1}{2.3}\left(\ldots.\right) + ..$$

Denn wenn x allein als veränderlich genommen wird, so ist das Differenzial von u mit $\left|\frac{du}{dx}\right| dx$ zu bezeichnen. Ist diess das erste Glied in der Reihe der Zunahme u_x, so findet man das zweite, wenn man das erste wieder differenzirt und durch 2 dividirt. Das erste Glied $\left|\frac{du}{dx}\right| dx$ besteht aber aus zwei Factoren: $\left|\frac{du}{dx}\right|$ und dx, und diese wieder differenzirt, geben: $\left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| dx^2 + \left|\frac{du}{dx}\right| d^2x$. Und auf gleiche Art findet man das dritte und die nachfolgenden Glieder.

Nimmt man nun in

$$f(x + \Delta x_\omega, y) = u + \left|\frac{du}{dx}\right| dx + \frac{1}{2}\left(\left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| dx^2 + \left|\frac{du}{dx}\right| d^2x\right) + ..$$

die Grösse y allein als veränderlich, so geht $f(x + \Delta x_\omega, y)$ in $f(x + \Delta x_\omega, y + \Delta y_\omega)$, also in den verlangten Ausdruck über, und die gefundene Reihe:

$$u + \left|\frac{du}{dx}\right| dx_\omega + \frac{1}{2}\left(\left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| dx_\omega^2 + \left|\frac{du}{dx}\right| d^2x_\omega\right) + \frac{1}{2.3}\left(\ldots.\right) + ..$$

wird einzeln:

u wird: $u + \left|\frac{du}{dy}\right| dy_\omega + \frac{1}{2}\left(\left|\frac{d^2u}{dy^2}\right| dy_\omega^2 + \left|\frac{du}{dy}\right| d^2y_\omega\right) + \ldots$

$$\left|\frac{du}{dx}\right| dx_\omega \text{ wird: } \left|\frac{du}{dx}\right| dx_\omega + \left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right| dx_\omega dy_\omega +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\left|\frac{d^3u}{dx\,dy^2}\right| dx\,dy^2 + \left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right| dx\,d^2y \right) + ..$$

$$\frac{1}{2}\left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| dx_\omega^2 \text{ wird: } \frac{1}{2}\left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| dx_\omega^2 + \frac{1}{2}\left|\frac{d^3u}{dx^2\,dy}\right| dx_\omega^2 dy_\omega + \ldots$$

$$\frac{1}{2}\left|\frac{du}{dx}\right| d^2x_\omega \text{ wird: } \frac{1}{2}\left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right| d^2x_\omega dy_\omega + \ldots$$

$$+ \ldots$$

Denn jedes Glied wird nach der Differenzial-Reihe einzeln gefunden, wenn man die gegebene Function $\left(u, \left|\frac{du}{dx}\right| dx, ..\right)$ als erstes Glied nimmt, dieses dann nach y differenzirt, was das zweite Glied giebt, diess wieder nach y differenzirt und durch 2 dividirt, was das dritte Glied giebt, u. s. w.

Ordnet man alle Glieder, die aufgelöst gleiche Potenzen von $d\omega$ enthalten würden, in die ersten, zweiten, dritten und nachfolgenden Differenzialien zusammen, so erhält man:

$$u + \Delta u_\omega = u + \left|\frac{du}{dx}\right| dx + \left|\frac{du}{dy}\right| dy + \frac{1}{2}\left(\left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| dx^2 + 2\left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right| dx\,dy + \right.$$

$$\left. + \left|\frac{d^2u}{dy^2}\right| dy^2 + \left|\frac{du}{dx}\right| d^2x + \left|\frac{du}{dy}\right| d^2y \right) +$$

$$+ \frac{1}{2.3}\left(\ldots\ldots \right) + \ldots$$

Würde u sogleich nach ω total differenzirt, so folgte:

$$\Delta u_\omega = du_\omega + \frac{1}{2} d^2u_\omega + \frac{1}{2.3} d^3u_\omega + \ldots$$

(worin du_ω, d^2u_ω .. die totalen Differenzialien ausdrücken) so dass sich folgende Gleichungen herausstellen:

$$du_\omega = \left|\frac{du}{dx}\right| dx + \left|\frac{du}{dy}\right| dy;$$

$$d^2u_\omega = \left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| dx^2 + 2\left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right| dx\,dy + \left|\frac{d^2u}{dy^2}\right| dy^2 +$$

$$+ \left|\frac{du}{dx}\right| d^2x + \left|\frac{du}{dy}\right| d^2y;$$

$$d^3u_\omega = \left|\frac{d^3u}{dx^3}\right| dx^3 + 3\left|\frac{d^3u}{dx^2\,dy}\right| dx^2\,dy + 3\left|\frac{d^3u}{dx\,dy^2}\right| dx\,dy^2 + \left|\frac{d^3u}{dy^3}\right| dy^3 +$$

$$+ \left\{\begin{matrix}\left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| dx \\ \left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right| dy\end{matrix}\right\} 3\,d^2x + \left\{\begin{matrix}\left|\frac{d^2u}{dy^2}\right| dy \\ \left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right| dx\end{matrix}\right\} 3d^2y + \left\{\begin{matrix}\left|\frac{du}{dx}\right| d^3x \\ \left|\frac{du}{dy}\right| d^3y\end{matrix}\right\}.$$

U. s. w.

Zusatz. Würde man umgekehrt zuerst nach y und dann erst nach x differenzirt haben, so würde man aus $f(x, y)$ zuerst $f(x, y + \Delta y)$, und daraus $f(x + \Delta x, y + \Delta y)$, also das Nämliche erhalten haben.

Auf der andern Seite der Gleichung würde man dieselben Ausdrücke, nur in anderer Ordnung erhalten haben:

$$du_\omega = \left|\frac{du}{dy}\right| dy + \left|\frac{du}{dx}\right| dx \quad \text{statt} \quad \left|\frac{du}{dx}\right| dx + \left|\frac{du}{dy}\right| dy;$$

$$d^2u_\omega = \left|\frac{d^2u}{dy^2}\right| dy^2 + 2\left|\frac{d^2u}{dy\,dx}\right| dy dx + \left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| dx^2 + \left|\frac{du}{dy}\right| d^2y + \left|\frac{du}{dx}\right| d^2x$$

$$\text{statt} \quad \left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| dx^2 + 2\left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right| dx dy + \left|\frac{d^2u}{dy^2}\right| dy^2 + \left|\frac{du}{dx}\right| d^2x + \left|\frac{du}{dy}\right| d^2y.$$

U. s. w.

Da $d^2u_\omega = d^2u_\omega$ dieselbe Grösse ist, ob man partiell zuerst nach x oder nach y differenzirt, so folgt, dass auch $\left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right| dx dy = \left|\frac{d^2u}{dy\,dx}\right| dy dx$, d. h. dass man dasselbe Resultat erhält, ob man zuerst nach x differenzirt, also $\left|\frac{du}{dx}\right| dx$ bildet, und diess nach y differenzirt, woraus $\left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right| dx\,dy$ hervorgeht, oder ob man zuerst $\left|\frac{du}{dy}\right| dy$ bildet, und diess nach x differenzirt, woraus $\left|\frac{d^2u}{dy\,dx}\right| dy\,dx$ hervorgeht.

Ueberhaupt zeigt die Vergleichung der beiderseitigen Reihen, dass $\left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right| dx\,dy = \left|\frac{d^2u}{dy\,dx}\right| dy\,dx$;

$$\left|\frac{d^3u}{dx^2\,dy}\right| dx^2\,dy = \left|\frac{d^3u}{dy\,dx^2}\right| dy\,dx^2 = \left|\frac{d^3u}{dx\,dy\,dx}\right| dx\,dy\,dx.$$

U. s. w.

Es ist ganz gleichgültig, in welcher Ordnung differenzirt wird, wenn nur die nämliche Grösse u, und immer so oft mal

nach x und so oft mal nach y differenzirt wird, als angegeben ist, so dass:

$$\left|\frac{d^n u}{dx^\alpha dy^{n-\alpha}}\right| dx^\alpha dy^{n-\alpha} = \left|\frac{d^n u}{dx^{\alpha-1} dy^{n-\alpha} dx}\right| dx^{\alpha-1} dy^{n-\alpha} dx = \text{etc.},$$

wie immer auch die nämlichen Factoren dx^α und $dy^{n-\alpha}$ unter sich versetzt sein mögen.

§. 59.

Directe Ableitung der obigen Reihe.

Wenn man einmal weiss, dass für $u = f(x, y)$ das erste Differenzial $du = \left|\frac{du}{dx}\right| dx + \left|\frac{du}{dy}\right| dy$ ist, so kann man die Reihe Δu ohne erst auf die früheren Reihen zu recurriren, sogleich direct ableiten, was eine grössere Uebersichtlichkeit giebt.

Um d^2u zu finden, differenzirt man die partiellen Differenzialien zuerst nach x und dann nach y, wobei dx und dy so genommen werden, dass $d_x(dx) = d^2x$, $d_y(dx) = 0$, $d_x(dy) = 0$, $d_y(dy) = d^2y$, denn in der Grösse dx ist kein y und in der Grösse dy kein x enthalten.

Man erhält dann, wenn man die gleichen Grössen

$$\left|\frac{d^2u}{dxdy}\right| dxdy = \left|\frac{d^2u}{dydx}\right| dydx; \quad \left|\frac{d^3u}{dx^2dy}\right| dx^2dy = \left|\frac{d^3u}{dydx^2}\right| dydx^2 = \text{etc.}$$

zusammennimmt, Folgendes:

$$du = \left|\frac{du}{dx}\right| dx + \left|\frac{du}{dy}\right| dy;$$

$$d^2u = \left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| dx^2 + 2\left|\frac{d^2u}{dxdy}\right| dxdy + \left|\frac{d^2u}{dy^2}\right| dy^2 + \left|\frac{du}{dx}\right| d^2x + \left|\frac{du}{dy}\right| d^2y.$$

U. s. w.

Es erscheinen die nämlichen Ausdrücke, wie Oben. Bemerkt wird, dass du, d^2u .. die totalen Differenzialien nach (x, y) ausdrücken, so dass man auch statt du, d^2u, d^3u .. schreiben kann: du_ω, d^2u_ω, d^3u_ω .... oder $du_{x,y}$, $d^2u_{x,y}$, $d^3u_{x,y}$ .... U. s. w.

Ein Beispiel zur Verdeutlichung.

Ist $u = xy$, und $x = \omega^3$, $y = \omega^4$, so ist $u = \omega^7$ und $du = 7\omega^6 d\omega$, $d^2u = 42\omega^5 d\omega^2$, $d^3u = 210\omega^4 d\omega^3$, etc.

Dasselbe findet man durch die partiellen Differenzialien. Es ist:

$$u = xy,$$
$$du = y\,dx + x\,dy;\ d^2u = y\,d^2x + 2dx\,dy + x\,d^2y,$$
$$d^3u = y\,d^3x + 3dy\,d^2x + 3dx\,d^2y + x\,d^3y.$$

U. s. w.

Nun ist: $x = \omega^3,\ dx = 3\omega^2 d\omega,\ d^2x = 6\omega d\omega^2,\ d^3x = 6d\omega^3, \ldots$
$y = \omega^4,\ dy = 4\omega^3 d\omega,\ d^2y = 12\omega^2 d\omega^2,\ d^3y = 24\omega d\omega^3, \ldots$

Diese Werthe substituirt, geben:

$$du = \omega^4 . 3\omega^2 d\omega + \omega^3 . 4\omega^3 d\omega = 7\omega^6 d\omega,$$
$$d^2u = \omega^4 . 6\omega d\omega^2 + 2 . 3\omega^2 d\omega . 4\omega^3 d\omega + \omega^3 . 12\omega^2 d\omega^2 =$$
$$= (6\omega^5 + 24\omega^5 + 12\omega^5)\,d\omega^2 = 42\omega^5 d\omega^2,$$
$$d^3u = \omega^4 . 6d\omega^3 + 3 . 4\omega^3 d\omega . 6\omega d\omega^2 + 3 . 3\omega^2 . 12\omega^2 d\omega^2 + \omega^3 . 24\omega d\omega^3 .$$
$$= (6\omega^4 + 72\omega^4 + 108\omega^4 + 24\omega^4)\,d\omega^3 = 210\omega^4 d\omega^3,$$

Resultate, die mit den direct gefundenen vollkommen übereinstimmen.

Zusatz. Das Wichtigste ist, dass, wie auch immer die Veränderlichen unter sich verbunden sein mögen, ob durch Potenzen, Exponential-Grössen, trigonometrische Functionen etc. etc., das erste Differenzial eine Summe der partiellen Differenzialien wird. Der Grund davon ist, dass sich $u + \Delta u_x = f(x + \Delta x,\ y)$ in eine Summe auflöst, in: $u + \left|\frac{du}{dx}\right| dx + \ldots$ so dass nun auch $(u + \Delta u) =$ $= f(x + \Delta x,\ y + \Delta y)$ nur wieder eine Summe werden kann, und zum ersten Differenzial nothwendig $\left|\frac{du}{dx}\right| dx + \left|\frac{du}{dy}\right| dy$ giebt.

Das Zweitmerkwürdigste ist, dass es gleichgültig ist, in welcher Ordnung in Bezug auf x und y differenzirt wird, dass z. B. $\left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right| = \left|\frac{d^2u}{dy\,dx}\right|$. Etwas Analoges findet sich nur noch bei Summanden und Factoren, denn auch hier ist es gleichgültig, in welcher Ordnung addirt oder multiplicirt wird, da $a + b + c + \ldots =$ $= b + a + c \ldots = \ldots$, und $abc = bac, = \ldots$. Bei andern Operationen ist diess nicht mehr gleichgültig. So ist z. B. e^x keineswegs gleich x^e u. s. w.

Aber bei partiellen Differenzialien, welche Functionen auch in ihnen enthalten sein mögen, ist es gleichgültig, nach welcher der Veränderlichen zuerst oder zuletzt differenzirt werde. Der

letzte Grund dafür ist, dass sich Differenzialien in Summen und Producte auflösen, und dass für Summen und Producte diese Versetzung der Operations-Elemente gilt.

Beispiel. Für $u = z^y$ ist:

$$\left|\frac{du}{dy}\right| dy = z^y \log z dy$$ (nach der Exponential-Formel, indem z als constant genommen wird),

$$\left|\frac{du}{dz}\right| dz = yz^{y-1} dz$$ (nach der Potenzen-Formel, indem y als constant genommen wird).

Daher:

$$du = d(z^y) = \left|\frac{du}{dy}\right| dy + \left|\frac{du}{dz}\right| dz = z^y \log z dy + yz^{y-1} dz.$$

Nun ist: $$\left|\frac{d^2u}{dz\,dy}\right| dz\,dy = d_y \left|\frac{du}{dz}\right| dz = d_y(yz^{y-1} dz) =$$

$$= dy\, z^{y-1} dz + yz^{y-1} \log z\, dy\, dz =$$

$$(A) \quad = (z^{y-1} + yz^{y-1} \log z)\, dy\, dz,$$

und: $$\left|\frac{d^2u}{dy\,dz}\right| dy\,dz = d_z \left|\frac{du}{dy}\right| dy = d_z(z^y \log z\, dy) =$$

$$= yz^{y-1} \log z\, dy\, dz + z^y \frac{dz}{z} dy =$$

$$(B) \quad = (yz^{y-1} \log z + z^{y-1})\, dz\, dy,$$

und die beiden Resultate (A) und (B) stimmen vollkommen überein.

§. 60.

Die obige Reihe für constante *dx* und *dy*.

Wird in obiger Reihe dx constant, d. h. wird Δu_ω gleich Δu_x gesetzt, so bleibt die Reihe Δu_x die nämliche, nur fallen alle Glieder aus, die d^2x, d^3x etc. zu Factoren haben. Das Gleiche geschieht in Beziehung auf die Glieder, die d^2y, d^3y etc. zu Factoren haben, wenn dy constant wird, während dann die Glieder, die d^2x, d^3x etc. zu Factoren haben, bleiben, wie sie sind. Die Sache folgt so einfach, dass es nicht nothwendig ist, die beiden Reihen einzeln hinzuschreiben.

Werden die beiden Differenzialien, dx und dy zugleich constant, sind beide Grössen x und y unabhängig Variable, was immer möglich ist, so lange die Function u nicht selbst gleich Null,

oder eine Constante wird, und was namentlich in der Geometrie des Raumes seine Anwendung hat, so geht Δu über in $\Delta u_{x,\,y}$, und die obige allgemeine Formel wird, da alle höheren Differenzialien von x und y wegfallen:

$$du_{x,y} = \left|\frac{du}{dx}\right| dx + \left|\frac{du}{dy}\right| dy.$$

$$d^2u_{x,y} = \left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| dx^2 + 2\left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right| dxdy + \left|\frac{d^2u}{dy^2}\right| dy^2.$$

$$d^3u_{x,y} = \left|\frac{d^3u}{dx^3}\right| dx^3 + 3\left|\frac{d^3u}{dx^2\,dy}\right| dx^2dy + 3\left|\frac{d^3u}{dx\,dy^2}\right| dxdy^2 + \left|\frac{d^3u}{dy^3}\right| dy^4.$$

U. s. w.

Es ist nicht schwer, das allgemeine Bildungsgesetz dieser Reihe abzulesen.

Es wird nämlich:

$$d^nu_{x,y} = \left|\frac{d^nu}{dx^n}\right| dx^n + n\left|\frac{d^nu}{dx^{n-1}\,dy}\right| dx^{n-1}dy +$$
$$+ \frac{n.n-1}{1.2}\left|\frac{d^nu}{dx^{n-2}\,dy^2}\right| dx^{n-2}dy^2 +$$
$$+ \ldots. n\left|\frac{d^nu}{dx\,dy^{n-1}}\right| dxdy^{n-1} + \left|\frac{d^nu}{dy^n}\right| dy^n.$$

Diese Reihe ist mit der binomischen Reihe für ganze positive Exponenten von n analog, und zwar in Beziehung auf die Zahlen-Coefficienten $1, n, \frac{n.n-1}{1.2}, \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}, \ldots \frac{n.n-1}{1.2}, n, 1$ vollkommen übereinstimmend, eben so in Bezug auf die Factoren: dx^n, $dx^{n-1}dy$, $dx^{n-2}dy^2, \ldots dx^2dy^{n-2}$, $dx\,dy^{n-1}$, dy^n, und in Bezug auf die Grössen: $\left|\frac{d^nu}{dx^n}\right|$, $\left|\frac{d^nu}{dx^{n-1}dy}\right|$, $\left|\frac{d^nu}{dx^{n-2}dy^2}\right|$ in so ferne ähnlich, als immer das n^{te} Differenzial von u genommen wird, aber anfangs $n$mal nach x, dann $n-1$mal nach x und einmal nach y u. s. w., so dass immer ein Differenzial von x austritt, und dafür ein Differenzial von y eintritt, bis endlich bloss nach y differenzirt wird, womit sich die Reihe schliesst.

Diess gilt auch für das $(n+1)^{te}$ Differenzial. Denn indem wir $d^nu_{x,\,y}$ noch einmal differenziren, erhalten wir:

1) lauter Differenzialien der $(n+1)^{ten}$ Ordnung, da sämmt-

liche Glieder des Differenzials der n^{ten} Ordnung ebenfalls von der n^{ten} Ordnung sind.

2) Die Factoren von dx und dy beginnen mit dx^{n+1} und schliessen mit dy^{n+1}, da immer ein Differenzial dx austritt und dafür ein Differenzial dy eintritt.

3) Da jedes Glied des n^{ten} Differenzials nach x und nach y differenzirt wird, so erhält man, da das n^{te} Differenzial aus $(n+1)$ Glieder besteht, anfangs $2n+2$ Glieder. Von diesen Gliedern summiren sich aber je zwei, mit Ausnahme des ersten und letzten: $\left|\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}\right| dx^{n+1}$ und $\left|\frac{d^{n+1}y}{dy^{n+1}}\right| dy^{n+1}$; wir erhalten daher $\frac{2(n)}{2}+2 = n+2$ Glieder, wie beim Binomium.

4) Indem sich je zwei Glieder summiren, werden je zwei aufeinanderfolgende Zahlen-Coefficienten des n^{ten} Differenzials addirt. Derselbe Prozess findet aber auch bei den Zahlen-Coefficienten des Binomiums statt (wie in Cap. III. gezeigt wurde). Es folgen daher auch die nämlichen Zahlen-Coefficienten: 1, $\frac{n+1}{1}$, $\frac{n+1 \,.\, n}{1.2}$, ...

Daraus folgt, dass die Formel

$$d^n u_{x,y} = \left|\frac{d^n u}{dx^n}\right| dx^n + n\left|\frac{d^n u}{dx^{n-1}\,dy}\right| dx^{n-1}\,dy + \ldots$$

ganz allgemein gilt.

Symbolisch kann sie auch durch folgenden Ausdruck gegeben werden:

$$d^n u_{x,y} = [d^n u]\left(\left|\frac{1}{dx}\right| dx + \left|\frac{1}{dy}\right| dy\right)^n,$$

wenn nämlich nach vollführter Potenzirung von $\left(\left|\frac{1}{dx}\right| dx + \left|\frac{1}{dy}\right| dy\right)^n$ der Ausdruck $[d^n u]\left(\left|\frac{1}{dx^n}\right| dx^n + n\left|\frac{1}{dx^{n-1}}\right| . \left|\frac{1}{dy}\right| dx^{n-1}\,dy + \ldots\right)$ geschrieben wird: $\left|\frac{d^n u}{dx^n}\right| dx^n + n\left|\frac{d^n u}{dx^{n-1}\,dy}\right| dx^{n-1}\,dy + \ldots.\Big)$.

Zusatz. Es ist nicht schwer, aber weitläuftig, sowohl die allgemeine Formel für veränderliche dx und dy, als die besondere für constante dx und dy auf Functionen von mehr als zwei Veränderlichen auszudehnen. Der Gang ist der nämliche, und auch die Beweise werden auf dieselbe Art geführt. Insbesondere wird die Formel für unabhängig Veränderliche symbolisch bezeichnet:

$$d^n u_{x,\,y\ldots z} = d^n u \left(\left|\frac{1}{dx}\right| dx + \left|\frac{1}{dy}\right| dy + \ldots \left|\frac{1}{dz}\right| dz \right)^n.$$

Man sieht, wie sich die Sache gestaltet, und vorkommenden Falls führt man die Rechnung durch.

§. 61.

Beispiele zur allgemeinen Formel.

1) Es sei $u = x + y$, eine Summe zweier Veränderlicher, und x und y seien gemeinschaftlich Functionen von ω.

Es ist $\left|\frac{du}{dx}\right| = 1$, $\left|\frac{du}{dy}\right| = 1$; $\left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| = 0$, $\left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right| = 0$, $\left|\frac{d^2u}{dy^2}\right| = 0$, und wie man leicht einsieht, sind die höheren partiellen Differenzialien von u sämmtlich gleich Null.

Die Formel wird daher:

$$du_\omega = dx_\omega + dy_\omega$$
$$d^2u_\omega = d^2x_\omega + d^2y_\omega \text{ u. s. w.}$$
$$d^nu_\omega = d^nx_\omega + d^ny_\omega.$$

2) Es sei $u = xy$, ein Product zweier Veränderlicher, die ihrerseits wieder Functionen einer dritten Veränderlichen ω seien.

Es ist:

$$\left|\frac{du}{dx}\right| = y;\ \left|\frac{du}{dy}\right| = x;\ \left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| = 0;\ \left|\frac{d^2u}{dy^2}\right| = 0;\ \left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right| = 1.$$

Alle höheren partiellen Differenzialien von u werden gleich Null, und die allgemeine Formel wird:

$$du_\omega = ydx + xdy;$$
$$d^2u_\omega = yd^2x + 2dx\,dy + xd^2y;$$
$$d^3u_\omega = yd^3x + 3d^2x\,dy + 3dx\,d^2y + xd^3y.$$

Aus dem Bildungsgesetze der allgemeinen Formel ist einleuchtend, dass:

$$d^n u_\omega = y d^n x + n d^{n-1} x dy + \frac{n.n-1}{1.2} d^{n-2} x d^2 y + \ldots$$
$$+ \frac{n.n-1}{1.2} d^2 x d^{n-2} y + n dx d^{n-1} y + x d^n y.$$

Dass diess Bildungsgesetz allgemein gelte, sieht man auch ohne Hilfe der allgemeinen Formel ein. Denn differenzirt man $d^n u_\omega$ noch einmal, so erhält man aus jedem Gliede von $d^n u_\omega$ zwei Glieder für $d^{n+1} u_\omega$. Von diesen summirt sich je eines mit einem vorhergehenden und einem nachfolgenden, so dass sich das Bildungsgesetz der Binomial-Coefficienten daraus ergeben muss.

§. 62.

Die Differenzialien unentwickelt gegebener Functionen zweier Veränderlicher.

Ist $u = f(x, y \ldots z) = 0$, so ist es nicht möglich, dass alle Grössen $x, y, \ldots z$ unabhängig veränderlich sind; denn eine unter ihnen ist nothwendig eine Function der andern, und kann auch als solche dargestellt werden, wenn die Function $u = f(x, y, \ldots z) = 0$ aufgelöst werden kann. Ist z. B. $x^2 y^2 - xzy^2 + azy^3 - b = 0$, so ist

$$z = \frac{b - x^2 y^2}{ay^3 - xy^2},$$

und wird nun x um dx_x, y um dy_y vermehrt, so nimmt z nicht um dz_z zu, sondern um $\Delta z_{x,\,y}$, eine Zunahme, die von x, y, dx und dy abhängt und in aufsteigenden Differenzialien entwickelt werden kann.

Kann man die gegebene Function auflösen, so ist es das Kürzeste, diess zu thun, und z als Function von $x, y \ldots$ darzustellen, $z = \psi(x, y \ldots)$. Will man, oder kann man eine solche Function nicht auflösen, z. B. $v \sin y + y \cos x - xy = 0$, so kann man die Differenzialien dennoch mit Hilfe der partiellen Differenzirung finden.

Ist nun eine unentwickelte Function zwischen zwei Veränderlichen gegeben, $u = f(x, y) = 0$, und wird x als die unabhängig Veränderliche betrachtet, so werden die Differenzialien dy_x, $d^2 y_x, \ldots$ auf folgende Art gefunden:

Es ist, da $u=0$:

1) $$du = \left|\frac{du}{dx}\right| dx + \left|\frac{du}{dy}\right| dy_x = 0;$$

also: $$dy_x = -\frac{\left|\frac{du}{dx}\right|}{\left|\frac{du}{dy}\right|} dx.$$

2) $$d^2u = \left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| dx^2 + 2\left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right| dx\,dy_x + \left|\frac{d^2u}{dy^2}\right| dy_x^2 + \left|\frac{du}{dy}\right| d^2y_x = 0;$$

also: $$d^2y_x = -\frac{\left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| dx^2 + 2\left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right| dx\,dy_x + \left|\frac{d^2u}{dy^2}\right| dy_x^2}{\left|\frac{du}{dy}\right|}.$$

Substituirt man den Werth $dy_x = -\frac{\left|\frac{du}{dx}\right|}{\left|\frac{du}{dy}\right|} dx$, so wird:

$$d^2y_x = -\frac{\left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| - 2\left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right| \left(\frac{du}{dx} : \frac{du}{dy}\right) + \left|\frac{d^2u}{dy^2}\right| \left(\frac{du}{dx} : \frac{du}{dy}\right)^2}{\left|\frac{du}{dy}\right|} dx^2.$$

3) d^3y_x findet man aus:

$$d^3u = \left|\frac{d^3u}{dx^3}\right| dx^3 + 3\left|\frac{d^3u}{dx^2\,dy}\right| dx^2\,dy_x + 3\left|\frac{d^3u}{dx\,dy^2}\right| dx\,dy_x^2 + \left|\frac{d^3u}{dy^3}\right| dy_x^3 + \left\{\begin{matrix}\left|\frac{d^2u}{dy^2}\right| dy_x \\ \left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right| dx\end{matrix}\right\} 3d^2y_x + \left|\frac{du}{dy}\right| d^3y_x = 0.$$

Da man den Werth dy_x aus (1) und d^2y_x aus (2) kennt, so findet man d^3y_x durch Reduction der Gleichung $d^3u=0$ in lauter bekannten Ausdrücken. Und so weiter die vierten und höheren Differenzialien.

Beispiel 1. Ist $u = x^2y^3 - a^3 = 0$ gegeben, so ist einfach $y^3 = \frac{a^3}{x^2}$, $y = \frac{a}{x^{\frac{2}{3}}}$, also:

$$dy_x = -\frac{2}{3}\frac{a}{x^{\frac{5}{3}}}dx; \quad d^2y_x = +\frac{2.5}{3.3}\frac{a}{x^{\frac{8}{3}}}dx^2;$$

$$d^3y_x = -\frac{2.5.8}{3.3.3}\frac{a}{x^{\frac{11}{3}}}dx^3, \text{ etc.}$$

Dasselbe findet man aber auch durch die partiellen Differenzialien.

Es ist: $u = x^2y^3 - a^3 = 0$; $\left|\frac{du}{dx}\right| = 2xy^3$; $\left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| = 2y^3$;

$\left|\frac{du}{dy}\right| = 3x^2y^2$; $\left|\frac{d^2u}{dy^2}\right| = 6x^2y$; $\left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right| = 6xy^2$ u. s. w.; also:

$$dy_x = -\frac{\left|\frac{du}{dx}\right|}{\left|\frac{du}{dy}\right|}dx = -\frac{2xy^3}{3x^2y^2}dx = -\frac{2}{3}\frac{y}{x}dx,$$

oder, $y = \frac{a}{x^{\frac{2}{3}}}$ substituirt:

$$dy_x = -\frac{2}{3}\frac{a}{x^{\frac{5}{3}}}dx;$$

$$d^2y_x = -\frac{\left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| - 2\left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right|\left(\left|\frac{du}{dx}\right| : \left|\frac{du}{dy}\right|\right) + \left|\frac{d^2u}{dy^2}\right|\left(\frac{du}{dx} : \frac{du}{dy}\right)^2}{\left|\frac{du}{dy}\right|}dx^2$$

$$= -\frac{2y^3 - 2\,.\,6xy^2\,.\,\frac{2}{3}\frac{y}{x} + 6x^2y\,.\,\frac{4}{9}\frac{y^2}{x^2}}{3x^2y^2}dx^2$$

$$= +\frac{\frac{10}{3}y^3}{3x^2y^2}dx^2 = +\frac{2.5}{3.3}\frac{y}{x^2}dx^2 = +\frac{2.5}{3.3}\frac{a}{x^{\frac{8}{3}}}dx^2.$$

U. s. w.

Beispiel 2. Gegeben ist: $u = y^5x^3 - 2y^4x^2 + 3y - 6x = 0$, eine Function, die in Beziehung auf y nicht lösbar ist.

Nun ist: $\left|\frac{du}{dx}\right| = 3y^5x^2 - 4y^4x - 6$,

$\left|\frac{du}{dy}\right| = 5y^4x^3 - 8y^3x^2 + 3$,

mithin: $dy_x = -\frac{3y^5x^2 - 4y^4x - 6}{5y^4x^3 - 8y^3x^2 + 3}dx.$

Ferner ist: $\left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| = 6y^5x - 4y^4,$

$$\left|\frac{d^2u}{dy^2}\right| = 20y^3x^3 - 24y^2x^2,$$

$$\left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right| = 15y^4x^2 - 16y^3x.$$

Aus der Substitution dieser Werthe in Verbindung mit dem gefundenen Werthe dy_x ergiebt sich d^2y_x, eine Formel, die wir ihrer Weitläuftigkeit wegen nicht weiter verfolgen.

Beispiel 3. Gegeben ist: $4y^3 - 3y + \sin x = 0 = u.$

Nach der Formel: $4\left(\sin\frac{1}{3}a\right)^3 - 3\sin\frac{1}{3}a + \sin a = 0$ folgt, dass $y = \sin\frac{1}{3}x$; es ist daher

$$dy_x = \frac{1}{3}\cos\frac{1}{3}x\,dx;\quad d^2y_x = -\frac{1}{9}\sin\frac{1}{3}x\,dx^2, \text{ etc.}$$

Dasselbe findet man durch partielle Differenzialien, also ohne vorhergehende Auflösung der Gleichung.

Es ist: $\left|\frac{du}{dx}\right| = \cos x;\quad \left|\frac{du}{dy}\right| = -3(1-4y^2);$

$$\left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| = -\sin x;\quad \left|\frac{d^2u}{dy^2}\right| = 24y;\quad \left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right| = 0;$$

daher: $$dy_x = -\frac{\left|\frac{du}{dx}\right|}{\left|\frac{du}{dy}\right|}dx = \frac{\cos x}{3(1-4y^2)}dx,$$

was nach der Formel:

$$\cos a = \cos\frac{1}{3}a\left(1 - 4\left(\sin\frac{1}{3}a\right)^2\right),$$

da $y = \sin\frac{1}{3}x$ ist, giebt:

$$dy_x = \frac{\cos x}{3(1-4y^2)}dx = \frac{1}{3}\cos\frac{1}{3}x dx, \text{ wie Oben.}$$

Ferner giebt d^2y_x durch Substitution der partiellen Differenzialien:

$$d^2y_x = \frac{24y(\cos x)^2}{\left(3(1-4y^2)\right)^3}dx^2 - \frac{\sin x}{3(1-4y^2)}dx^2,$$

wie man auch durch directe Differenzirung von $d(dy_x)$ findet, wenn man den obigen Werth für dy_x einsetzt. U. s. w.

§. 63.

Entwicklung der Differenzialien unentwickelter Functionen dreier Veränderlicher.

Ist $u = f(x, y, z) = 0$, so kann eine Veränderliche, z. B. z, als Function der übrigen gedacht werden, $z = \varphi(x, y)$.

Kann man diese Auflösung bewerkstelligen, so findet man $dz_{x,y}$, $d^2z_{x,y}$ ... nach den früheren Formeln. Die Grössen x und y sind dabei unabhängig variabel. — Allein nicht immer kann man die Function $f(x, y, z) = 0$ auflösen; dann findet man $dz_{x,y}$, $d^2z_{x,y}$ .... durch partielle Differenzirung. Diess ist also das allgemeine für alle Fälle ausreichende Verfahren.

Es ist:

$$1)\quad du = \left|\frac{du}{dx}\right| dx + \left|\frac{du}{dy}\right| dy + \left|\frac{du}{dz}\right| dz_{x,y} = 0;$$

also:
$$dz_{x,y} = -\frac{\left|\frac{du}{dx}\right| dx + \left|\frac{du}{dy}\right| dy}{\left|\frac{du}{dz}\right|}.$$

$$2)\quad d^2u = \left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| dx^2 + 2\left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right| dx\,dy + \left|\frac{d^2u}{dy^2}\right| dy^2 +$$
$$+ 2\left|\frac{d^2u}{dx\,dz}\right| dx\,dz + 2\left|\frac{d^2u}{dy\,dz}\right| dy\,dz +$$
$$+ \left|\frac{d^2u}{dz^2}\right| dz^2 + \left|\frac{du}{dz}\right| d^2z_{x,y} = 0.$$

Substituirt man in diese Gleichung den für $dz_{x,y}$ gefundenen Werth, und löst man sie nach $d^2z_{x,y}$ auf, so findet man dieses Differenzial in lauter Ausdrücken von partiellen Differenzialien.

Beispiel zur Verdeutlichung. Es sei gegeben: $u = z + y^3 - xy^2 = 0$.

Da $z = xy^2 - y^3$, so kann man leicht dz, d^2z ... unmittelbar finden, was zur Controlle der nachfolgenden Resultate dient.

Obige Gleichungen geben aber:

$$\left|\frac{du}{dx}\right| = -y^2; \quad \left|\frac{du}{dy}\right| = 3y^2 - 2xy; \quad \left|\frac{du}{dz}\right| = 1,$$

also: $dz_{x,y} = -\frac{-y^2dx + (3y^2 - 2xy)dy}{1} = y^2dx + (2xy - 3y^2)dy,$

was man auch direct aus $z = xy^2 - y^3$ gefunden haben würde.

Ferner ist: $\left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| = 0$; $\left|\frac{d^2u}{dy^2}\right| = 6y - 2x$; $\left|\frac{d^2u}{dz^2}\right| = 0$;

$\left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right| = -2y$; $\left|\frac{d^2u}{dx\,dz}\right| = 0$; $\left|\frac{d^2u}{dy\,dz}\right| = 0$; also:

$$d^2u = -4y\,dx\,dy + (6y - 2x)\,dy^2 + d^2z = 0,$$
$$d^2z_{x,\,y} = 4y\,dx\,dy + (2x - 6y)\,dy^2,$$

ein Resultat, das richtig ist, wie man sich durch directe Differenzirung von z überzeugen kann.

Und so weiter für die höheren Differenzialien.

Es ist klar, wie man unentwickelte Functionen von mehr als drei Veränderlichen zu behandeln habe, um die geforderten Differenzialien zu finden. Die Sache hat keine Schwierigkeit; nur werden die Formeln so weitläuftig, dass man es vorzieht, sie in jedem einzelnen Falle zu construiren, wo meistens die Bedingungen des Problems bedeutende Abkürzungen und elegante Methoden zulassen.

Zusatz. Ich halte es nicht für überflüssig, zu bemerken, dass, obgleich die Function $u = f(x, y\,..\,z) = 0$, auch $du = 0$, $d^2u = 0$ giebt, doch nicht die einzelnen Partial-Differenzialien gleich Null sind. So ist z. B. für $u = f(x, y) = 0$, $du = \left|\frac{du}{dx}\right| dx + \left|\frac{du}{dy}\right| dy = 0$, aber nicht einzeln $\left|\frac{du}{dx}\right| dx = 0$, nach $\left|\frac{du}{dy}\right| dy = 0$.

Der Grund davon ist, dass wenigstens ein Differenzial, dx oder dy abhängig veränderlich ist. Nur in den Fällen, in denen sämmtliche Zunahmen dx, dy, dz.. unabhängig sind, sind die Partial-Differenzialien einzeln gleich Null, wie sich später zeigen wird. Eine Verwechslung dieser zwei sehr verschiedenen Fälle könnte leicht Irrthümer erzeugen.

§. 64.

Differenzirung von Functionen mehrerer Veränderlicher, für die zugleich eine Anzahl Bedingungs-Gleichungen dieser Veränderlichen gegeben ist.

Ist u eine Function von n Veränderlichen, $u = f(x, y \ldots z)$ so können höchstens $(n-1)$ Bedingungs-Gleichungen zwischen x,

$y \ldots z$ stattfinden. Denn fänden n Bedingungs-Gleichungen statt, so würden die Veränderlichen sämmtlich constante Grössen werden. Finden $n-1$ Bedingungs-Gleichungen statt, so bleibt nur eine der Grössen x, $y \ldots z$ unabhängig veränderlich, die übrigen werden sämmtlich mit Hilfe dieser Bedingungs-Gleichungen von dieser abhängig. Finden $(n-\alpha)$ Bedingungs-Gleichungen statt, so bleiben α Grössen unabhängig veränderlich, und $n-\alpha$ werden abhängig veränderlich.

Man soll die Differenzialien der abhängig Veränderlichen durch partielle Differenzirung finden, auch in dem Falle, dass man die Bedingungs-Gleichungen nicht auflösen kann.

I. Fall. Gegeben ist eine Function zweier Veränderlichen $u = f(x, y)$ und eine Bedingungs-Gleichung $P = \psi(x, y) = 0$.

Bemerkung. Die Function u kann hier nicht $= 0$ sein, denn sonst hätte man nur 2 unbekannte Grössen, x und y, und zwei Gleichungen u und P; die Grössen x und y wären daher constant. Aber dadurch, dass u nicht gleich Null ist, hat man drei unbekannte Grössen, u, x, z, und nur zwei Gleichungen. Es sei nun y die unabhängige Variable, und es soll du, d^2u, etc. durch partielle Differenzialien von u und P ausgedrückt werden, in denen die Grössen dx_y, d^2x_y etc. ausfallen, und nur die entsprechenden Potenzen von dy enthalten sein sollen.

Es ist:

$$du = \left|\frac{du}{dx}\right| dx + \left|\frac{du}{dy}\right| dy; \quad dP = \left|\frac{dP}{dx}\right| dx + \left|\frac{dP}{dy}\right| dy = 0.$$

Sucht man nun in der Gleichung $dP = 0$ den Werth dx, und substituirt ihn in du, so erhält man:

$$du = \left\{ \left|\frac{du}{dy}\right| - \left|\frac{du}{dx}\right| \frac{\left|\frac{dP}{dy}\right|}{\left|\frac{dP}{dx}\right|} \right\} dy.$$

Ferner ist:

$$d^2u = \left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| dx^2 + 2\left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right| dx dy + \left|\frac{d^2u}{dy^2}\right| dy^2 + \left|\frac{du}{dx}\right| d^2x,$$

und:

$$d^2P = \left|\frac{d^2P}{dx^2}\right| dx^2 + 2\left|\frac{d^2P}{dx\,dy}\right| dx dy + \left|\frac{d^2P}{dy^2}\right| dy^2 + \left|\frac{dP}{dx}\right| d^2x = 0.$$

Sucht man in $d^2P = 0$ den Werth d^2x, und substituirt diesen nebst dem oben gefundenen Werth dx in die Gleichung d^2u, so erhält man einen Ausdruck, der dy^2 allein zum gemeinschaftlichen Factor hat.

Hätte man in der Bedingungs-Gleichung $P = 0$ den Werth x gesucht und ihn in die gegebene Gleichung $u = f(x, y)$ substituirt, so hätte man u als eine Function von y allein entwickelt, und dann ebenfalls $d^2u = (F)\ dy^2$ gefunden. Durch partielle Differenzirung findet man diess Resultat, auch wenn man die Bedingungs-Gleichung $P = \psi\ (x, y) = 0$ nicht auflösen kann.

Ganz auf dieselbe Art verfährt man mit dem dritten und mit den höheren Differenzialien.

Beispiel zur Verdeutlichung. Es sei gegeben: $u = x^3y^4$, und die Bedingungs-Gleichung: $P = x^3y - a = 0$.

Hier kann man zwar x sehr leicht aus $P = 0$ finden, und substituirt man diesen Werth in u so wird: $u = ay^3$, also $du = 3ay^2\,dy$, $d^2u = 6ay\,dy^2$ etc.

Allein wenn man auch $P = 0$ nicht hätte auflösen können, (wenn z. B. $P = r\sin x + r\cos y - \frac{xy}{a} = 0$ gegeben wäre), so könnte man doch mit Hilfe der partiellen Differenzialien die Werthe du, d^2u etc. finden, wobei die Grösse u bloss als Function von y gedacht wird.

Denn es ist:

$$\left|\frac{du}{dx}\right| = 3x^2y^4; \quad \left|\frac{dP}{dx}\right| = 3x^2y.$$

$$\left|\frac{du}{dy}\right| = 4x^3y^3; \quad \left|\frac{dP}{dy}\right| = x^3.$$

$$\left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| = 6xy^4; \quad \left|\frac{d^2P}{dx^2}\right| = 6xy.$$

$$\left|\frac{d^2u}{dy^2}\right| = 12x^3y^2; \quad \left|\frac{d^2P}{dy^2}\right| = 0.$$

$$\left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right| = 12x^2y^3; \quad \left|\frac{d^2P}{dx\,dy}\right| = 3x^2.$$

Diese Werthe in

$$du = \left\{\left|\frac{du}{dy}\right| - \left|\frac{du}{dx}\right| \frac{\left|\frac{dP}{dy}\right|}{\left|\frac{dP}{dx}\right|}\right\} dy$$

substituirt, geben:

$$du = \left(4x^3y^3 - 3x^2y^4 \cdot \frac{x^3}{3x^2y}\right)dy$$
$$= 3x^3y^3\,dy,$$

was für $x^3 = \frac{a}{y}$ mit dem obigen $du = 3ay^2dy$ übereinstimmt.

Auf gleiche Weise findet man nach gehöriger Substitution $d^2u = 6x^3y^2\,dy^2$, was für $x^3 = \frac{a}{y}$ mit dem obigen $du = 6ay\,dy^2$ übereinstimmt.

Zusatz. Bei Bedingungs-Gleichungen, die man so leicht auflösen kann, wie die obigen, wird man sogleich die Substitution vornehmen. Darum ward auch nur solch ein Beispiel zur Verdeutlichung gewählt. Die Hauptsache ist, dass man bei unlösbaren Bedingungs-Gleichungen durch die partiellen Differenzialien das bewirkt, was man algebraisch nicht bewirken kann, nämlich dass man dx, d^2x u. s. w. eliminirt.

§. 65.

Zweiter Fall.

Es sei u als Function dreier Veränderlichen, $u = f(x, y, z)$, und eine Bedingungs-Gleichung: $P = F(x, y, z) = 0$, gegeben.

In diesem Falle bleiben zwei unabhängig Veränderliche, etwa x und y, und dann wird z eine abhängig Veränderliche, weil die Zunahmen von z abhängig werden von den willkührlichen Zunahmen von x und von y.

Man soll nun in den Ausdrücken du, d^2u, d^3u ... die Werthe dz, d^2z etc. eliminiren, auch wenn man in u noch nicht vermöge der Auflösung von $P = 0$, die Grösse z wirklich eliminiren kann.

Es wird: $$du = \left|\frac{du}{dx}\right|dx + \left|\frac{du}{dy}\right|dy + \left|\frac{du}{dz}\right|dz;$$

und: $$dP = \left|\frac{dP}{dx}\right|dx + \left|\frac{dP}{dy}\right|dy + \left|\frac{dP}{dz}\right|dz = 0.$$

Sucht man in $dP = 0$ den Werth dz, und substituirt ihn in du, so wird:

$$dz_{x,\,y} = -\frac{\left|\frac{dP}{dx}\right|}{\left|\frac{dP}{dz}\right|}dx - \frac{\left|\frac{dP}{dy}\right|}{\left|\frac{dP}{dz}\right|}dy$$

$$= -Adx - Bdy,$$

(indem man der Kürze halber die Grössen A und B statt der Factoren von dx und dy setzt),

und: $$du = \left(\left|\frac{du}{dx}\right| - A\left|\frac{du}{dz}\right|\right)dx + \left(\left|\frac{du}{dy}\right| - B\left|\frac{du}{dz}\right|\right)dy.$$

Auf dieselbe Weise werden die zweiten und höheren Differenzialien von u bestimmt. Die Formeln werden nur etwas weitläuftig, und darum zieht man es vor, im gegebenen Falle die nöthigen Rechnungen besonders auszuführen. Die Regeln, nach denen diess geschieht, sind ja bekannt.

Beispiel zur Verdeutlichung. Es sei gegeben: $u = x^2y^3z$; $P = x^4y^6z - a = 0$.

Substituirt man aus der leicht auflösbaren Gleichung $P = 0$ den Werth z in die Gleichung u, so wird: $u = \frac{a}{x^2y^3}$, und es wird unmittelbar:

$$du = -\frac{2a}{x^3y^3}dx - \frac{3a}{x^2y^4}dy.$$

Dasselbe erhält man durch partielle Differenzirung:

$$du = \left(\left|\frac{du}{dx}\right| - A\left|\frac{du}{dz}\right|\right)dx + \left(\left|\frac{du}{dy}\right| - B\left|\frac{du}{dz}\right|\right)dy.$$

Es ist: $\left|\frac{du}{dx}\right| = 2xy^3z$; $\left|\frac{dP}{dz}\right| = x^4y^6$;

$\left|\frac{du}{dy}\right| = 3x^2y^2z$; $\left|\frac{dP}{dx}\right| = 4zx^3y^6$;

$\left|\frac{du}{dz}\right| = x^2y^3$; $\left|\frac{dP}{dy}\right| = 6zx^4y^5$;

also $A = \frac{4z}{x}$; $B = \frac{6z}{y}$, und:

$$du = \left(2xy^3z - \frac{4z}{x}.x^2y^3\right)dx + (3x^2y^2z - 6x^2y^2z)\,dy$$

$$= -2zxy^3\,dx - 3zx^2y^2\,dy,$$

was mit dem obigen Resultate $du = -\frac{2a}{x^3y^3}dx - \frac{3a}{x^2y^4}dy$ vollkommen übereinstimmt, da $z = \frac{a}{x^4y^6}$ ist.

§. 66.

Dritter Fall.

Es seien gegeben: Eine Function dreier Veränderlicher, $u = f(x, y, z)$ und zwei Bedingungs-Gleichungen: $P = \varphi(x, y, z) = 0$, $Q = \psi(x, y, z) = 0$. (In diesem Falle ist nur eine Grösse unabhängig variabel, z. B. x, und die beiden andern, y, z, sind abhängig variabel.) Es sollen in du, d^2u etc. die Grössen dy, d^2y .. dz, d^2z ... nicht vorkommen, auch wenn man nicht im Stande ist, mittelst der Gleichung P und Q die Grösse y und z in u zu eliminiren. Die obigen Grössen dy, d^2y .. dz, d^2z ... soll man aber desshalb eliminiren, weil man sie nicht kennt, und nicht berechnen kann, im Falle man die Bedingungs-Gleichungen $P = 0$, $Q = 0$ nicht auflösen kann.

Auflösung. Es ist:

$$du = \left|\frac{du}{dx}\right| dx + \left|\frac{du}{dy}\right| dy + \left|\frac{du}{dz}\right| dz$$

$$dP = \left|\frac{dP}{dx}\right| dx + \left|\frac{dP}{dy}\right| dy + \left|\frac{dP}{dz}\right| dz = 0$$

$$dQ = \left|\frac{dQ}{dx}\right| dx + \left|\frac{dQ}{dy}\right| dy + \left|\frac{dQ}{dz}\right| dz = 0$$

Eliminirt man in den beiden Gleichungen $dP = 0$ und $dQ = 0$ erstlich die Grösse dz, dann die Grösse dy, so wird:

$$dy_x = \frac{\left|\frac{dQ}{dz}\right| \left|\frac{dP}{dx}\right| - \left|\frac{dP}{dz}\right| \left|\frac{dQ}{dx}\right|}{\left|\frac{dP}{dz}\right| \left|\frac{dQ}{dy}\right| - \left|\frac{dQ}{dz}\right| \left|\frac{dP}{dy}\right|} dx = A dx$$

$$dz_x = \frac{\left|\frac{dQ}{dy}\right| \left|\frac{dP}{dx}\right| - \left|\frac{dP}{dy}\right| \left|\frac{dQ}{dx}\right|}{\left|\frac{dP}{dy}\right| \left|\frac{dQ}{dz}\right| - \left|\frac{dQ}{dy}\right| \left|\frac{dP}{dz}\right|} dx = B dx$$

Diese Werthe in du substituirt, geben:

$$du = \left(\left|\frac{du}{dx}\right| + A\left|\frac{du}{dy}\right| + B\left|\frac{du}{dz}\right|\right) dx.$$

Beispiel zur Verdeutlichung. Es sei gegeben:

$$u = zx^2y^3;$$
$$P = x + y + z - a = 0;$$
$$Q = x - 2y + 3z - b = 0.$$

Es ist:

$$\left|\frac{du}{dx}\right| = 2zxy^3; \quad \left|\frac{dP}{dx}\right| = 1; \quad \left|\frac{dQ}{dx}\right| = 1.$$
$$\left|\frac{du}{dy}\right| = 3zx^2y^2; \quad \left|\frac{dP}{dy}\right| = 1; \quad \left|\frac{dQ}{dy}\right| = -2.$$
$$\left|\frac{du}{dz}\right| = x^2y^3; \quad \left|\frac{dP}{dz}\right| = 1; \quad \left|\frac{dQ}{dz}\right| = 3.$$

Substituirt man diese Werthe, so wird:

$$dy = Adx = -\frac{2}{5}dx,$$
$$dz = Bdx = -\frac{3}{5}dx,$$
$$\text{und } du = \left(2zxy^3 - \frac{2}{5} \cdot 3zx^2y^2 - \frac{3}{5}x^2y^3\right)dx.$$

Sucht man sogleich die Werthe von y und z aus den Bedingungs-Gleichungen $P = 0$, $Q = 0$, und substituirt sie in u, so erhält man:

$$u = \left(\frac{a+b-3x}{5}\right)x^2\left(\frac{3a-b-2x}{5}\right)^3,$$

da $z = \frac{a+b-3x}{5}$, $y = \frac{3a-b-2x}{5}$ ist, und die directe Differenzirung nach x giebt den nämlichen Werth für du, wie er aus den partiellen Differenzialien gefunden worden ist.

Es ist nun nicht schwer, aber weitläuftig, die höheren Differenzialien für u zu entwickeln. Die Bedingungs-Gleichungen geben immer die Mittel an die Hand, die Werthe d^2y, d^2z; d^3y, d^3z, u. s. w. zu eliminiren.

Wir dehnen auch diese Untersuchungen nicht auf mehrere Fälle aus, nicht auf Functionen von vier und mehreren veränderlichen Grössen, mit einer, mit zwei oder mehreren Bedingungs-Gleichungen. Diese Fälle entwickelt man besonders, wo sie vorkommen, z. B. bei Untersuchungen über Maxima und Minima, wo gewöhnlich die Natur der Aufgaben grössere Einfachheit und Eleganz der Auflösung gestattet.

§. 67.

Allgemeine Bemerkung.

Wir haben nun alle wesentlichen Aufgaben der Differenzial-Rechnung, so weit sie sich auf den Calcul beziehen, ausgeführt, und waren nirgends genöthigt, auf unendlich kleine Grössen, auf Grenzen u. s. w. zurückzukommen, wir haben die Differenzialien jeder Ordnung als endliche und messbare Grössen dargestellt. Das ist, so weit es den Calcul betrifft, streng genommen nichts Neues, nur bei den Anwendungen war man, gegen den Geist des Calculs, genöthigt, zu unendlich kleinen, zu verschwindenden Grössen, zu blossen Grenzwerthen zu flüchten. Aber auch bei den Anwendungen wird sich zeigen, dass die Differenzialien jeder Art und Ordnung beliebig grosse und messbare Grössen sind, wie alle andern Grössen der Analysis.

Ehe wir zu dieser Anwendung übergehen, müssen wir noch, des wissenschaftlichen Abschlusses wegen, die allgemeinen Differenzialien ($d^x u$) für die wichtigsten Urfunctionen zusammenstellen.

Cap. IX.

Independente Darstellung der n^{ten} Differenzialien der Functionen.

§. 68.

Discussion, ob für alle Functionen independente Differenzial-Ausdrücke aufgestellt werden sollen.

Aus dem Vorhergehenden ist klar, dass für jede gegebene Function die Differenzialien jeder Ordnung abgeleitet werden können. Diese Ableitung ist aber nur eine successive, das erste Differenzial wird aus der gegebenen Function, das zweite Differenzial aus dem ersten, das dritte aus dem zweiten, u. s. w., das n^{te} aus dem $(n-1)^{ten}$ Differenzial abgeleitet. Es entsteht nun die Aufgabe, jedes n^{te} Differenzial unabhängig von dem vorhergehenden darzustellen, d. h. das n^{te} Differenzial sogleich als solches zu finden, ohne dass man genöthigt ist, vorerst das erste, das zweite, das dritte, .. das $(n-1)^{te}$ aufzustellen und erst aus diesem das n^{te} abzuleiten. Diess versteht man unter der independenten Darstellung der höheren Differenzialien. Hier öffnet sich eine Aufgabe von grosser Arbeit und von grosser Tragweite. Die Frage ist nun, ob diess in die allgemeine Theorie mit aufzunehmen sei, oder nicht.

Hier erlaube ich mir, folgende Bemerkung voranzuschicken. — Ich unterscheide in jeder Wissenschaft und in jedem Theile einer Wissenschaft eine zweifache Richtung: die eine, die auf das Allgemeine, und die andere, die auf das Singuläre geht. Die

erstere Richtung nenne ich die Theorie der Elemente, die allgemeine Theorie. Zu den Elementen gehört Alles, sowohl das Anfängliche und Leichte, als das Spätere und Schwere, vorausgesetzt, dass es allgemeinen Werth hat. In diesem Sinne umfassen die Elemente die gesammte Theorie der Wissenschaft, und der Differenzial-Calcul z. B. gehört zu den Elementen der Analysis. Alles, was von der Art ist, dass das Nachfolgende einer Wissenschaft wesentlich auch auf ihm beruht, gehört zu den Elementen. Neben diesen giebt es überall Excursionen auf das Singuläre. So sind z. B. in der Geometrie das Dreieck und das Parallelogramm elementar, denn die allgemeinen Probleme aller andern Figuren können aus der Auflösung der Probleme über Dreieck und Parallelogramm vollkommen gelöst werden. Hingegen das Fünfeck, das Sechseck u. s. w. sind nicht elementar. Wenn nun ein Mathematiker eine Theorie etwa des Siebenecks schriebe, so könnte er eine Menge schöner und überraschender Resultate finden, ohne dass diese von besonderer Wichtigkeit für die Elemente wären. Er wird in seiner singulären Untersuchung Abkürzungen und Symbole einführen, die alle seine Ausdrücke ganz einfach, schön und elegant machen, und die gleichwohl die Elemente der Geometrie wenig oder gar nicht, d. h. bloss anwendungsweise berühren werden. — Gehört nun eine solche Untersuchung zu den Elementen? Gewiss nicht. Denn dann würde man nie zu einem Ende kommen, es müsste ja das Achteck, das Neuneck, .. das Tausendeck etc. eben auch erst so behandelt sein, wie das Siebeneck. Die singulären Untersuchungen gehen in's Unendliche, während die Elemente allerdings ein Ende, einen Abschluss haben, indem sie nur die allgemeinen Operationen lehren, die allen singulären Untersuchungen zur Grundlage dienen.

Die singulären Untersuchungen, obgleich sie von den Elementen ausgeschieden werden, gehören aber gleichwohl zum Ganzen der Wissenschaft, ja sie bilden den wahren Schatz der Wissenschaft, der fort und fort bereichert werden kann.

Nimmt man diese Ausscheidung von Elementen und singulären Untersuchungen nicht vor, dann geht die Wissenschaft selbst in's Ungemessene, und es kann ihr kein bestimmtes Ziel gegeben werden. Sie erhält einen höchst unproportionirten Bau, da nur erst hie und da, lange nicht überall, singuläre Untersuchungen

weiter geführt worden sind, es geht die Uebersicht und die Tendenz der Wissenschaft verloren. — Beim historischen Anfang einer Wissenschaft, im Zeitalter ihres ersten Werdens muss man freilich Alles zusammennehmen, Allgemeines und Singuläres, diess wird durch die Armuth des Anfangs entschuldigt; aber nach so langer Zeit, nach so grossen wirklichen Fortschritten, nach solch unvergleichlich reicher Entfaltung wäre es ungerecht, wenn man an die Mathematik eine geringere als die höchste Forderung stellen wollte. Es ist Zeit, dass die Elemente und die singulären Untersuchungen der Mathematik definitiv getrennt werden.

Eine solche singuläre Untersuchung, die mit der Operationslehre parallel geht, ist z. B. die combinatorische Analysis. Sie gehört nicht mehr zu den Elementen. Selbst da, wo man sie annimmt, wie in Deutschland, weiss man nicht recht, wo und wie man sie in die Elemente einordnen soll; andere Völker, wie die Franzosen, haben sie in richtigem mathematischen Instinkte gar nicht allgemein anerkannt. Aber in's Ganze, wenn auch nicht in die Elemente der Mathematik, gehört die combinatorische Analysis als singuläre Untersuchung, sie giebt schöne und elegante Resultate, und gestattet durch ihre Symbole eine Einfachheit der Ausdrücke, wie sie die Elemente nun und nimmermehr geben können.

Gerade so geht parallel mit den Elementen des Differenzial-Calculs die Lehre der independenten Darstellung der Differenzialien, die in neuerer Zeit von Gundermann, Hoppe und Anderen begonnen wurde; auch sie führt zu kurzen und eleganten Symbolen, ein Vorzug, der allen singulären Untersuchungen eigen ist. Aber zu den Elementen gehören sie nicht. Denn diese geben für sich Alles, was allgemein verlangt werden kann. So kann man z. B. durch Anwendung der Lehre der Elemente Alles differenziren, wenn auch nur der Reihe nach durch Ableitung eines Differenzials aus dem andern. Auch die independente Darstellung der Differenzialien giebt wesentlich nichts anders, sondern nur das Nämliche, aber in einem einzigen Ausdrucke, in einem kurzen und eleganten Symbole, was eben ihr Wesen ist, und um dessentwillen jede singuläre Untersuchung eingeleitet wird. Die singulären Untersuchungen geben uns Resultate, die man haben kann, oder nicht, die Elemente hingegen geben uns Lehren,

die man haben muss, wenn man die Mathematik haben will. Die Elemente sind das Allgemeine und Nothwendige, die singulären Untersuchungen das Besondere und Nichtnothwendige. Diess hindert jedoch nicht, dass man in der allgemeinen Theorie auf die Resultate der singulären Untersuchungen Rücksicht nimmt, aber nur als auf Lehren, die nicht nothwendig sind, da man das Nothwendige auch ohne die singulären Untersuchungen kennt. Würde man ihre Resultate oder ihre Symbole als nothwendige Lehren anführen, dann müssten sie freilich in die allgemeine Theorie aufgenommen werden, aber dann ginge wieder die ganze Ordnung und Schönheit, das Ebenmass der Wissenschaft verloren.

Aus diesem Grunde scheide ich die allgemeine independente Darstellung der höhern Differenzialien als solche aus den Elementen, d. h. aus der allgemeinen Theorie aus. Ich befürchte nicht, dass ich missverstanden werde. Diese Darstellung wird nur aus den Elementen, nicht aus dem Schatze der Wissenschaft ausgeschieden. Für diesen kann es nur erwünscht sein, wenn er durch gelungene singuläre Untersuchungen so viel als möglich bereichert wird.

Aber für die wenigen Urfunctionen, welche die Elemente aller übrigen Functionen sind, ist es nothwendig, dass die n^{ten} Differenzialien independent, oder wenigstens in allgemeinen Formeln gegeben werden, weil davon die letzte Abrundung und der Schluss aller Operationen abhängt. Diess soll nun im Folgenden dargestellt werden. Nicht wegen der Grösse der Arbeit, nicht wegen der Schwierigkeiten, die sich nur anfangs zeigen, wird die Theorie der independenten Darstellung der höheren Differenzialien aller Functionen ausgeschieden, sondern aus Prinzip; denn was nicht in die Elemente gehört, soll auch nicht unter sie gemengt werden.

§. 69.

Die n^{ten} Differenzialien für Potenzen, Exponential-Grössen, Logarithmen, Sinusse und Cosinusse.

I. Ist $u = x^{\mu}$ gegeben, so ist $du = \mu x^{\mu-1} dx$, und durch fortgesetzte Differenzirung:

$$d^n u = d(x^{\mu}) = \mu . \mu - 1 \ldots \mu - (n-1) x^{\mu-n} dx^n .$$

Für $\mu = -1$, also für $u = \frac{1}{x}$, ist:

$$d^n\left(\frac{1}{x}\right) = \pm 1.2.3\ldots n x^{-1-n} dx^n = \frac{(-1)^n .1.2.3..n\, dx^n}{x^{n+1}}$$

Für $\mu = -\frac{1}{2}$, also: $u = \frac{1}{\sqrt{x}}$, ist gleicherweise:

$$d^n\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{(-1)^n .1.3.5..2n-1\, dx^n}{2^n x^n \sqrt{x}}.$$ U. s. w.

Eben so ist in einem Binom, in welchem jedoch x nur in der ersten Potenz vorkommen kann:

$$d^n(a+bx)^\mu = \mu.\mu-1.\mu-2\ldots\mu-(n-1)b^n(a+bx)^{\mu-n}dx^n.$$

II. Ist $u = a^x$ gegeben, so ist:

$$du = a^x \log a\, dx;\quad d^2u = a^x (\log a)^2\, dx^2;$$

und allgemein: $d^n u = d^n(a^x) = a^x (\log a)^n dx^n$.

III. Ist $u = {}^a\log x$ gegeben, so ist: $du = \frac{1}{e\log a}\frac{dx}{x}$, also:

$$d^2u = \frac{1}{e\log a} d\left(\frac{dx}{x}\right),$$

oder: $$d^{n+1}u = d^n({}^a\log x) = \frac{1}{e\log a} d^n\left(\frac{dx}{x}\right),$$

und nach I.: $d^{n+1}({}^a\log x) = (-1)^n \frac{1.2.3\ldots n.dx^{n+1}}{e\log a\, x^{n+1}}$.

Für ${}^a\log(a+bx)$ wird:

$$d^{n+1}\left[{}^a\log(a+bx)\right] = \frac{(-1)^n .1.2.3..n.b^{n+1}dx^{n+1}}{e\log a\,(a+bx)^{n+1}}.$$

IV. Ist $u = \sin x$ gegeben, so ist:

$$d(\sin x) = \cos x\, dx = \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)dx,$$

$$d^2(\sin x) = -\sin x\, dx^2 = \sin\left(\frac{2\pi}{2}+x\right)dx^2,$$

$$d^3(\sin x) = -\cos x\, dx^3 = \sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)dx^3,$$

und, wie nun das Gesetz der Formel zeigt, allgemein:

$$d^n(\sin x) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)dx^n.$$

V. Ist $u = cos\, x$ gegeben, so folgt nach derselben Ableitung:

$$d^n(cos\, x) = cos\left(\frac{n\pi}{2} + x\right) dx^n.$$

Diese fünf Differenzialien sind daher sehr leicht in independenten Ausdrücken darzustellen.

§. 70.

Die n^{ten} Differenzialien für *arc. sin x*, *arc. cos x*, *arc. tg x* und *arc. cotg x*.

Diese Functionen geben in den ersten Differenzialien:

$$d\, arc.\, sin\, x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};\quad d\, arc.\, cos\, x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$d\, arc.\, tg\, x = \frac{dx}{1+x^2};\quad d\, arc.\, cotg\, x = -\frac{dx}{1+x^2};$$

sie haben das Gemeinschaftliche, dass sie binomische Factoren haben, nämlich die Factoren: $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ und $(1+x^2)^{-1}$.

Die independente Darstellung ihrer Differenzialien hängt also davon ab, dass man diese Darstellung für Binomial-Grössen kennt.

Euler und nach ihm La Grange haben diese Darstellung gegeben.

I. Es sei allgemein das n^{te} Differenzial der Function: $u = (a + bx + cx^2)^r$ zu finden.

Wird x um dx vermehrt, so nimmt u um Δu zu, und es ist:

$$u + \Delta u = (a + bx + cx^2 + bdx + 2cx\, dx + cdx^2)^r.$$

Setzt man der Kürze halber: $a + bx + cx^2 = p$, $b + 2cx = q$, so wird:

$$u + \Delta u = (p + qdx + cdx^2)^r.$$

Entwickelt man diesen Ausdruck nach dem Gesetze des Binomiums, indem man $q\,dx + c\,dx^2$ als eine Grösse $dx\,(q + c\,dx)$ zusammenfasst, so wird:

$$u + \Delta u = p^r + rp^{r-1}\, dx\,(q + cdx) + \frac{r.r-1}{1.2} p^{r-2}\, dx^2 (q + cdx)^2 + \ldots$$

$$+ \frac{r.r-1.r-2\ldots r-(n-2)}{1.2.3\ldots n-1} p^{r-(n-1)}\, dx^{n-1} (q + cdx)^{n-1} +$$

$$+ \frac{r.r-1.r-2\ldots r-(n-1)}{1.2.3\ldots n} p^{r-n} dx^n (q + cdx)^n + \ldots$$

Da

$$\Delta u = du + \frac{1}{1.2}d^2u + \frac{1}{1.2.3}d^3u + .. \frac{1}{1.2.3..n}d^nu + \ldots$$

so sind im gefundenen Ausdruck, $(u+\Delta u)$, enthalten, und zwar ungeschieden, die Grössen: u, du, $\frac{1}{2}d^2u$, $\frac{1}{1.2.3}d^3u..$, $\frac{1}{1.2.3..n}d^nu$, und wenn man bei dem Gliede $\frac{d^nu}{1.2\ldots n}$ bleibt, so braucht man die Reihe nicht weiter zu entwickeln, denn das nachfolgende Glied derselben enthält nothwendig dx^{n+1}, was schon zum $(n+1)^{\text{ten}}$ Differenzial gehört.

Will man aus dem ganzen Ausdruck die Grösse $\frac{d^nu}{1.2..n}$ allein haben, so sucht man alle Glieder heraus, die dx^n zum Factor haben.

Aus dem n^{ten} Gliede findet man als einzig brauchbares:

$$\frac{r.r-1.r-2..r-(n-1)}{1.2.3\ldots n}p^{r-n}q^n dx^n,$$

indem die übrigen Glieder, die aus der Entwicklung von $(q+cdx)^n$ hervorgehen, in Verbindung mit dem Factor dx^n nothwendig die Factoren $(dx)^{n+1}$, $(dx)^{n+2}$ etc. haben.

Aus dem vorletzten Gliede:

$$\frac{r.r-1\ldots r-(n-2)}{1.2\ldots n-1}p^{r-(n-1)}dx^{n-1}(q+cdx)^{n-1}$$

ist der einzige Ausdruck, der dx^n zum Factor hat, folgender:

$$\frac{r.r-1\ldots r-n-2}{1.2\ldots n-1}p^{r-(n-1)}dx^{n-1}.n-1.q^{n-2}cdx.$$

Und so sucht man aus jedem der vorhergehenden Glieder:

$$\frac{r.r-1\ldots r-(n-3)}{1.2\ldots n-2}p^{r-(n-2)}dx^{n-2}(q+cdx)^{n-2},$$

$$\frac{r.r-1..r-(n-4)}{1.2\ldots n-3}p^{r-(n-3)}dx^{n-3}(q+cdx)^{n-3}, \text{ u. s. w.}$$

jedesmal den einen Ausdruck, der dx^n zum Factor hat. Ihre Summe ist dann gleich $\frac{d^nu}{1.2\ldots n}$.

Summirt man diese Ausdrücke, scheidet man die gemeinschaftlichen Factoren aus und hebt auf beiden Seiten der Gleichung den Nenner $1.2\ldots n$ auf, so erhält man:

$$d^n u = r.r-1.r-2\ldots r-(n-1)p^{r-n}q^n dx^n\left\{1+\frac{n.n-1}{1.r-(n-1)}\frac{cp}{q^2}+\right.$$
$$+\frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.\left(r-(n-1)\right)\left(r-(n-2)\right)}\frac{c^2p^2}{q^4}+$$
$$\left.+\frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4.n-5}{1.2.3\left(r-(n-1)\right).\left(r-(n-2)\right).\left(r-(n-3)\right)}\frac{c^3p^3}{q^6}+\ldots\right\}$$

eine endliche Formel, die von der Grösse n abhängt, d. h. von dem so und so vielten Differenziale, als man sucht. Die Grösse n ist daher immer eine ganze positive Zahl.

II. Diese Formel wird einfacher, namentlich für gebrochene Exponenten r, die 2 zum Factor haben, $r = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$ etc., wenn man folgende Umformungen vornimmt.

Man setzt:

$$(p+qdx+cdx^2)^r = p^r\left(1+\frac{2qdx}{2p}+\frac{4pc}{4p^2}dx^2\right)^r$$

Nun ist $4pc = 4ac+4bcx+4c^2x^2$. Zieht man davon $q^2=(b+2cx)^2$ ab, so erhält man: $4pc-q^2 = 4ac-b^2$.

Setzt man $4ac-b^2=e$, so ist $4pc = e+q^2$, und diess substituirt, giebt:

$$(p+qdx+cdx^2)^r = p^r\left(1+\frac{2q}{2p}dx+\frac{4pc}{4p^2}dx^2\right)^r =$$
$$= p^r\left(1+\frac{2q}{2p}dx+\frac{e+q^2}{4p^2}dx^2\right)^r =$$
$$= p^r\left[\left(1+\frac{q}{2p}dx\right)^2+\frac{e}{4p^2}dx^2\right]^r,$$

oder, wenn man q' und e' statt $\frac{q}{2p}$, $\frac{e}{4p^2}$ setzt:

$$= p^r\left[(1+q'dx)^2+e'dx^2\right]^r,$$

und diess giebt, als Binom entwickelt:

$$p^r\left[(1+q'dx)^{2r}+\frac{r}{1}(1+q'dx)^{2r-2}e'dx^2+\right.$$
$$\left.+\frac{r.r-1}{1.2}(1+q'dx)^{2r-4}e'^2dx^4+\ldots.\right]$$

Nimmt man nun wieder gerade wie in der ersten Entwicklung diejenigen Glieder zusammen, die dx^n als Factor enthalten, so erhält man, wenn man der Reihe nach $(1+q'dx)^{2r}$, $(1+q'dx)^{2r-2}$ entwickelt:

$$p^r\left[\frac{2r.2r-1.2r-2\ldots2r-(n-1)}{1.2.3\ldots n}q'^n+\right.$$
$$+\frac{r}{1}.\frac{2r-2.2r-3\ldots2r-(n-1)}{1.2.3\ldots n-2}q'^{n-2}e'+$$
$$\left.+\frac{r.r-1}{1.2}.\frac{2r-4.2r-5..2r-(n-1)}{1.2\ldots n-4}q'^{n-4}e'^2+\ldots\right]dx^n.$$

Nun ist aber:

$$q'^n=\frac{q^n}{2^np^n},\ q'^{n-2}e'=\frac{q^n}{2^np^n}.\frac{e}{q^2},\ q'^{n-4}e'^2=\frac{q^n}{2^np^n}.\frac{e^2}{q^4},\ \text{etc.}$$

Substituirt man diese Werthe, und nimmt die Veränderungen vor, wie bei der ersten Entwicklung, scheidet man die gleichen Factoren aus und hebt auf beiden Seiten den Nenner, so wird:

$$d^nu=2r.2r-1.2r-2..2r-(n-1)\left(\frac{q}{2}\right)^np^{r-n}dx^n\left[1+\frac{r}{1}.\frac{n.n-1}{2r.2r-1}\frac{e}{q^2}+\right.$$
$$+\frac{r.(r-1)}{1.2}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2r.(2r-1).(2r-2).(2r-3)}\frac{e^2}{q^4}+$$
$$\left.+\frac{r.(r-1)(r-2)}{1.2.3}\frac{n(n-1)..(n-5)}{2r(2r-1)..(2r-5)}\frac{e^3}{q^6}+\ldots\right]$$

III. Für den Ausdruck $u=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ist $r=-\frac{1}{2}$, $a=1$, $b=0$, $c=-1$, $p=1-x^2$, $q=-2x$, $e=-4$, und es wird:

$$d^nu=\frac{1.2.3..nx^ndx^n}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}\left[1+\frac{1}{2}\frac{n.(n-1)}{1.2x^2}+\right.$$
$$+\frac{1.3}{2.4}\frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4x^4}+$$
$$\left.+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{n.n-1\ldots n-5}{1.2.3\ldots6x^6}+\ldots\right]$$

Diese Formel bezeichnen wir mit (*S*).

IV. Für $u=\frac{1}{1+x^2}$ ist $r=-1$, $a=1$, $b=0$, $c=1$, $p=1+x^2$, $q=2x$, $e=4$, und es ist:

$$d^nu=\frac{(-1)^n1.2.3..(n+1)x^ndx^n}{(1+x^2)^{n+1}}\left[1-1.\frac{n.(n-1)}{2.3x^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3\ldots5x^4}-\frac{n.n-1.n-2.n-3..n-5}{2.3.4\ldots7x^6}+\ldots\right]$$

Diese Formel bezeichnen wir mit (*T*).

V. Nun ist $d\,arc.\,sin\,x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = u\,dx$, also, da dx constant ist:

$$(S) \quad d^{n+1}\,arc.\,sin\,x = dx\,d^n u = S dx.$$

Da $d(arc.\,cos\,x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, so ist:

$$(S) \quad d^{n+1}\,arc.\,cos\,x = -\,dx\,d^n u = -\,S dx.$$

Dadurch sind die independenten Differenzialien für den Bogen in Bezug auf Sinus und Cosinus gegeben, weil man aus (III) die Grösse S independent hat, die man nur hinzuschreiben braucht.

Ferner ist $d\,arc.\,tg\,x = \frac{dx}{1+x^2} = u dx$, also:

$$(T) \quad d^{n+1}\,arc.\,tg\,x = dx\,d^n u = T dx.$$

Da $arc.\,cotg\,x = -\frac{dx}{1+x^2}$, so ist:

$$(T) \quad d^{n+1}\,arc.\,cotg\,x = -\,T dx.$$

Diess sind die allgemeinen Differenzialien des Bogens in Bezug auf Tangente und Cotangente. Sie sind independent, weil man aus (IV) die Grösse (T) independent hat.

Zusatz. Das independente Differenzial der Tangente würde man einfacher erhalten haben, wenn man im Ausdruck $d\,arc.\,tg\,x = \frac{1}{(1+x^2)}dx$, den Factor $\frac{1}{1+x^2}$ in die Summe $\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(\frac{1}{x-\sqrt{-1}} - \frac{1}{x+\sqrt{-1}}\right)$ zerlegt und diese Summe nach der Formel $u = (a+bx)^\mu$ $n$mal differenzirt haben würde. Man erhält natürlich das nämliche Resultat wie in (V).

§. 71.

Allgemeine Differenzialien des Bogens in Bezug auf Secante und Cosecante.

Da $d(arc.\,sec.\,x) = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$, wo wir der Kürze willen schreiben wollen: $dA = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$, so ist:

$$xdA = dx\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = udx,$$

wo $u = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ ist.

Das independente Differenzial für $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ kennen wir schon, wenn wir in $(a+bx+cx^2)^r$ setzen:

$$r = -\frac{1}{2},\quad a = -1,\quad b = 0,\quad c = +1.$$

Nun ist durch Differenzirung von $(xdA = udx)$, da dx constant ist:

$$\begin{aligned}
xd^2A + dxdA &= du\,.\,dx\\
xd^3A + 2dxd^2A &= d^2u\,.\,dx\\
xd^4A + 3dxd^3A &= d^3u\,.\,dx\\
&\cdots\cdots\cdots\\
xd^{n+1}A + ndxd^nA &= d^nu\,dx.
\end{aligned}$$

Da man nun d^nu kennt, so findet man allgemein $d^{n+1}A$ aus der höchst einfachen recurrirenden Gleichung:

$$d^{n+1}A = \frac{d^nu\,dx - nd^nAdx}{x},$$

$$= \frac{dx}{x}(d^nu - nd^nA).$$

Da sich *d arc. cosec x* nur im Zeichen von *d arc. sec x* unterscheidet, so ist:

$$d^{n+1}C = \frac{dx}{x}(nd^nC - d^nu),$$

wenn C kurz statt *arc. cosec x* gesetzt wird.

§. 72.

Die allgemeinen Differenzialien für Tangente und Cotangente, Secante und Cosecante.

Die Functionen der Tangente und Cotangente, der Secante und Cosecante sind ohnehin nur zusammengesetzte Gleichungen von Sinus und Cosinus, es genügt daher, für ihre n^{ten} Differenzialien eine allgemeine recurrirende Gleichung aufzustellen.

Da $tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x}$, so ist:

$$\cos x\,tg\,x = \sin x \quad \text{und} \quad d^n(\sin x) = d^n(\cos x\,tg\,x).$$

Das n^{te} Differenzial von $\sin x$, $d^n \sin x$, ist gleich $\sin\left(\frac{1}{2}n\pi+x\right)dx^n$, und $d^n(\cos x\, tg\, x)$ findet man nach der Producten-Formel:

$$d^n u = d^n(vy) = vd^n y + ndvd^{n-1}y + \frac{n.n-1}{2}d^2v\,d^{n-2}y + \ldots$$

Nun ist $v = \cos x$, $dv = -\sin x\,dx$, $d^2v = -\cos x\,dx^2$, $d^3v = +\sin x\,dx^3$, $d^4v = +\cos x\,dx^4$, ... also:

$$d^n u = \cos x d^n tg\, x - n\sin x d^{n-1} tg\, x dx - \frac{n.n-1}{1.2}\cos x d^{n-2} tg\, x dx^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\sin x d^{n-3} tg\, x\, dx^3 + ..$$

oder: $d^n u = \sin\left(\frac{1}{2}n\pi + x\right)dx^n$ substituirt:

$$\sin\left(\frac{1}{2}n\pi+x\right)dx^n = \cos x\left(d^n tg\, x - \frac{n.n-1}{1.2}d^{n-2} tg\, x\, dx^2 + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}d^{n-4} tg\, x\, dx^4 - \ldots\right) - \sin x\left(nd^{n-1} tg\, x dx - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}d^{n-3} tg\, x dx^3 + \ldots\right)$$

Aus dieser Gleichung findet man unmittelbar $d^n tgx$, wenn man $dtgx$, d^2tgx, d^3tgx etc. findet. Diese erhält man aber, wenn man der Reihe nach: $n=1$, $n=2$, $n=3$ ... in die Gleichung substituirt.

Die recurrirende Gleichung für die Secante findet man aus der Formel: $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ also $\cos x \,.\, \sec x = 1$, und $d^n(\cos x \sec x) = 0$.

Man findet daher nach der vorhergehenden Formel:

$$0 = \cos x\left(d^n \sec x - \frac{n.n-1}{1.2}d^{n-2}\sec x\, dx^2 + \ldots\right) - \sin x\left(nd^{n-1}\sec x dx - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}d^{n-3}\sec x dx^3 + \ldots\right)$$

Daraus leitet man unmittelbar $d^n \sec x$ ab, indem man die Werthe von $d\sec x$, $d^2\sec x$ ... $d^{n-1}\sec x$ substituirt, was keine weitere Schwierigkeit darbietet, da man successiv: $n=1$, $n=2$, $n=3$ etc. setzen kann.

Auf dieselbe Art werden auch die n^{ten} Differenzialien der Cotangente und Cosecante abgeleitet.

§. 73.

Schlussbemerkung.

Im Vorhergehenden sind die allgemeinen Formeln für die n^{ten} Differenzialien der Urfunctionen gegeben.

Man kann sich nicht verhehlen, dass es ausser den Potenzen, den Exponential-Grössen, den Logarithmen, den goniometrischen und cyclometrischen Functionen noch mehrere andere Stammfunctionen giebt, die man zum Theil schon kennt, z. B. die elliptischen Functionen, die Integral-Logarithmen und andere, und solche, die man noch nicht kennt. Auch diese sollten in der Reihe der Urfunctionen stehen, und also auch im Differenzial-Calcul behandelt werden. Jedoch, ehe man zum Integral-Calcul kommt, hat man keinen hinreichenden Grund, sie als Urfunctionen aufzustellen, man hat auch keine Mittel, sie a priori zu finden, und man ist in Beziehung auf ihre Theorie fast ganz auf den Integral-Calcul angewiesen. Und doch geht systematisch das Differenziren dem Integriren voraus. Entsteht dadurch nicht eine Lücke in der Wissenschaft?

Hier erinnere ich an einen Grundsatz der Methode, den der unsterbliche Euler aufgestellt hat, und der wohl auch bleibt, so lange die Wissenschaft dauern wird. Es giebt, sagt Euler, eine doppelte Ordnung der Aufeinanderfolge der Lehrsätze; die eine ist die Ordnung der Probleme, die andere ist die Ordnung der Beweise. Vieles stellt sich an seinem Orte als Problem dar, was an diesem Orte noch nicht gelöst werden kann. Was ist da zu thun? Man denkt sich diese Probleme als an ihrem Orte gelöst, und kommt man in nachfolgenden Theilen der Wissenschaft auf Sätze, welche jene, nur als gelöst gedachten Probleme wirklich lösen, so wendet man diese nachfolgenden Sätze auf die früheren an, man kommt auf diese zurück, und beweist sie an der Stelle, an der sie bewiesen werden können. Z. B. In der Algebra, als der Lehre von den Gleichungen, sollten alle Gleichungen einfach und leicht gelöst werden können. Von diesem Ziele bleibt man in der Algebra weit entfernt. Dessenungeachtet denkt man sich diese Gleichungen als leicht gelöst, und kommt man in der Lehre von den Reihen, oder im Differenzial-Calcul, im Integral-Calcul auf

Schwierigkeiten der Gleichungen, so denkt man sie als überwunden, ihre Schwierigkeiten fallen nicht dem Differenzial-Calcul, nicht dem Integral-Calcul etc. zur Last, sondern der Algebra. Stösst man aber umgekehrt da auf Sätze, die jene Schwierigkeiten lösen, so kommt man dadurch den früheren Problemen zu Hilfe, und diess giebt die natürlichen Anwendungen der nachfolgenden Theile auf die vorhergehenden. Man darf sicher sein, dass in den nachfolgenden Untersuchungen gar Vieles gefunden wird, was den früheren Problemen zur Auflösung dient, was das Frühere erhellt, was das Schwierige leicht macht.

Gerade so hat nun auch der Differenzial-Calcul eine Beziehung auf den nachfolgenden Integral-Calcul, der die hier bloss der Idee nach gelösten Probleme der weitern Urfunctionen wirklich lösen wird, und er hat zugleich eine Anwendung auf die vorhergehenden Theile der Analysis, für die er nun seinerseits Probleme löst, die zu lösen ihnen schwer, wenn nicht unmöglich war.

Diese Anwendung des Differenzial-Calculs auf die vorhergehenden Theile der Analysis werden wir in der nachfolgenden Abtheilung allgemein geben. Seinerseits wird dann der Integral-Calcul einen Abschnitt haben, der unter der Rubrik: Anwendung auf den Differenzial-Calcul, diejenigen Differenzial-Probleme wirklich lösen und leicht machen wird, die in der Theorie des Differenzial-Calculs nur postulirt sind, die zwar nicht unmöglich, aber doch hier zwecklos und zum Mindesten mit unnützen Schwierigkeiten behaftet wären. Unmöglich zu differenziren sind sie nicht, weil sie, wie sie auch beschaffen sein mögen, unendliche Reihen potenzieller Functionen sind, die man, wie bekannt, alle unbedingt, wenn auch nur successiv differenziren kann.

Auf diese Art werden sich alle Theile der Wissenschaft gegenseitig ergänzen, und man wird einer vollkommenen Systematik Genüge leisten, wenn man mit Euler die zweifache Ordnung einerseits der Probleme und andrerseits der Auflösungen unterscheidet.

DRITTE ABTHEILUNG.

ANWENDUNG DES DIFFERENZIAL-CALCULS AUF ANALYSIS.

Cap. X.

Allgemeine Gesichtspunkte für die Anwendung des Differenzial-Calculs auf Analysis.

§. 74.

Bedingungen, unter denen die Differenzial-Reihen auf die Analysis angewendet werden können.

Die in Abtheilung II. sowohl für eine als für mehrere veränderliche Grössen einer Function gefundenen und behandelten Differenzial-Reihen können auf die Analysis angewendet werden, wenn die in ihnen enthaltenen Veränderlichen bestimmte Werthe erhalten.

Nehmen wir die Reihe für Functionen einer Veränderlichen, $y = fx$:

$$y + \Delta y_x = y + dy_x + \frac{1}{2}d^2y_x + \cdot\frac{1}{1.2..n}d^ny_x + ..$$

oder in der Taylor'schen Form:

$$f(x+dx) = fx + dfx + \frac{1}{2}d^2fx + .. \frac{1}{1.2..n}d^nfx + ..$$

$$f(x+\omega) = fx + \frac{dy}{dx}\omega + \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}\omega^2 + .. \frac{1}{1.2..n}\frac{d^ny}{dx^n}\omega^n + ..$$

so haben wir Reihen, die nach aufsteigenden ganzen und positiven Potenzen von dx oder von ω gebildet sind. Sie reihen sich daher unter die allgemeinen Reihen von Cap. II., und sind den Bedingungen unterworfen, welche dort für Reihen dieser Art entwickelt worden sind.

Diese Bedingungen sind aber zweierlei, erstens Bedingungen, unter denen die Reihen überhaupt möglich sind, und zweitens

Bedingungen, unter denen sie convergiren, d. h. einen endlichen Werth als Summe geben.

Die vornehmste Bedingung der ersten Art ist, dass kein Glied der Reihe unendlich gross werde. Unendlich gross wird aber ein Glied, wenn für bestimmte Werthe von x oder dx entweder die Continuität der Function zwischen $y + \Delta y_x$ und y unterbrochen wird, oder wenn in einem der Ausdrücke $y + \Delta y_x$ und y eine Wurzel verschwindet, die in dem andern enthalten bleibt.

Diese Bedingungen sind nothwendige Bedingungen, weil nur unter ihrer Voraussetzung bewiesen werden kann, dass eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen entstehe, während mit Vernachlässigung dieser Voraussetzung auch Reihen mit negativen oder mit gebrochenen Exponenten möglich sind. Da nun von den Differenzial-Reihen verlangt wird, dass sie nach ganzen positiven Potenzen entwickelt werden, weil es wohl ein erstes, zweites, drittes, nicht aber etwa ein dritthalbes Differenzial giebt, so muss man, wenn man das Eine will, auch das Andere wollen, d. h. man muss die Bedingungen einhalten, unter denen eine Entwicklung nach ganzen positiven Potenzen möglich ist. Uebersieht man diess, dann läuft man Gefahr, aus eigner Schuld auf Widersprüche zu stossen, die man gewöhnlich nur zu geneigt ist, nicht sich, sondern dem Calcul zur Last zu legen.

Einige Functionen haben die Eigenschaft, diesen Bedingungen jederzeit und ohne Ausnahme zu genügen, wie z. B. $\sin x$ und $\cos x$. Denn $\sin(x+\omega) - \sin x$; $\cos(x+\omega) - \cos x$ bleiben für alle Werthe von x und ω continuirlich, auch verschwindet nicht in dem einen Ausdrucke eine reelle Wurzel, die in dem andern bliebe, welche Werthe man auch für x und ω setzen möge.

Für andere Functionen, z. B. für $\mathrm{cotg}\, x$, findet diess nicht unbedingt statt. Denn in $\mathrm{cotg}(x+\omega) - \mathrm{cotg}\, x$ wird für $x = 0$ der Ausdruck $\mathrm{cotg}\, x$ unendlich, während $\mathrm{cotg}(x+\omega)$ endlich bleibt, so wie hinwieder für $\omega = -x$ der Ausdruck $\mathrm{cotg}(x+\omega)$ unendlich wird, während $\mathrm{cotg}\, x$ endlich bleibt.

Etwas Aehnliches tritt für die Function $y = x + \sqrt{a-x}$ ein; denn für $x = a$ verschwindet in y die Wurzel $(a-x)$, während sie in $y + \Delta y_x$ bleibt, und für $\omega = a - x$ verschwindet diese Wurzel in $y + \Delta y_x$, während sie in y bleibt.

Auch in diesem Falle ist die Entstehung einer Reihe mit

ganzen positiven Potenzen unmöglich, und diess zeigt sich durch die Reihe selbst, indem die Glieder $\frac{dy}{dx}\omega$, oder $\frac{d^2y}{dx^2}\omega^2$ etc. für $x = a$ unendlich gross werden.

Diess sind die Bedingungen, unter denen die verlangten Reihen überhaupt möglich sind. Sie sind das Wichtigste. Denn das Wesen des Differenzial-Calculs besteht darin, dass die Anordnung festgehalten werde, dass Reihen mit ganzen positiven Potenzen von dx entwickelt werden. Dadurch wird aber der Differenzial-Calcul in seiner Bestimmtheit aus der mehr unbestimmten Masse der allgemeinen Reihen ausgeschieden.

Die andern Bedingungen, die der Convergenz, sind zwar von minderer Bedeutung, müssen aber immerhin beachtet werden, wenn es sich um brauchbare Reihen handelt.

Diese Bedingungen der Convergenz sind, dass nach einer endlichen Anzahl von Gliedern die nachfolgenden Glieder kleiner werden, als die vorhergehenden, und dass die Summe von unendlich vielen Gliedern eine endliche Grösse bleibe.

Ist die Reihe allgemein folgende:

$$y + \Delta y = y + \ldots A_n\omega^\alpha + A_{n+1}\omega^\beta + A_{n+2}\omega^\gamma + \ldots$$

worin der Voraussetzung nach $\gamma > \beta > \alpha$ ist, so muss $A_{n+1}\omega^\beta < A_n\omega^\alpha$ oder $\omega^{\beta-\alpha} < \frac{A_n}{A_{n+1}}$ sein.

Der Werth $\beta - \alpha$ kann niemals eine gebrochene oder negative Zahl sein, und bleibt immer positiv, da $\beta > \alpha$, ist. Im Falle, dass kein Glied in der allgemeinen Reihe gleich Null wird, ist $\beta - \alpha = 1$, und darum wird gewöhnlich die Bedingung der Convergenz als: $\omega < \frac{A_n}{A_{n+1}}$ ausgesprochen.

Die zweite Bedingung, dass die Reihen eine endliche Summe geben, ist für Reihen, die nach ganzen positiven und aufsteigenden Potenzen von ω geordnet sind, die nämliche: $\omega^{\beta-\alpha} < \frac{A_n}{A_{n+1}}$, wie aus den Lehren der Convergenz der Reihen bekannt ist, die hier nicht wiederholt zu werden brauchen.

§. 75.

Verschiedenheit der besondern Werthe, welche die einzelnen Glieder der Differenzial-Reihen annehmen können.

Die besondern Werthe, welche die einzelnen Glieder der Reihen: $y = f(x + dx)$, $u = f(x + dx,\ y + dy\ ..)$ etc. annehmen können, sind folgende:

1) Jedes Glied, y, dy, $\frac{d^2y}{2}$ ... u, du, $\frac{d^2u}{2}$ ... hat einen bestimmten endlichen Werth A, B, C u. s. w.

2) Eines oder mehrere Glieder, y, dy, $\frac{d^2y}{2}$ .., u, du, $\frac{d^2u}{2}$ ... haben den Werth Null.

3) Eines oder mehrere Glieder, y, dy, $\frac{d^2y}{2}$ .. u, du, $\frac{d^2u}{2}$ ... haben den Werth $\frac{1}{0} = \infty$.

4) Eines oder mehrere Glieder, y, dy, $\frac{d^2y}{2}$ .. u, du, $\frac{d^2u}{2}$ .. haben den Werth $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$.

Daraus ergeben sich folgende Anwendungen auf die Analysis:

1) Wenn alle Glieder der Reihen y, dy, $\frac{d^2y}{2}$ .. u, du, $\frac{d^2u}{2}$ .. bestimmte endliche Werthe haben, so ist eine Reihen-Entwicklung für $f(x + dx)$, $f(x + dx,\ y + dy\ ..)$ nach ganzen positiven Potenzen der Grössen dx, dy .. möglich. Diess giebt besondere Fälle der Differenzial-Reihen für bestimmte Werthe der veränderlichen Grössen, Fälle, die man unter der Benennung des Taylor'schen oder des verallgemeinerten Maclaurin'schen Lehrsatzes zusammenfasst.

2) Wenn eines oder mehrere Glieder: y, dy, $\frac{d^2y}{2}$ .. u, du, $\frac{d^2u}{2}$ .. gleich Null sind, so ergeben sich folgende Unterabtheilungen.

a) Es ist $y = 0$, oder $u = 0$. Diess giebt den Maclaurin'schen Lehrsatz, nach welchem die Functionen: $f(x + dx)$, $f(x + dx,\ y + dy, ..)$ bloss nach aufsteigenden ganzen und positiven Potenzen von dx, dy, entwickelt werden, da die Func-

tionen $y = fx$, $u = f(x, y..)$ gleich Null sind. Dadurch wird es möglich, dass die transcendenten Functionen in Reihen von blossen Potenzen gegeben werden, was der Vorzug der Maclaurin'schen Reihe ist.

b) Es sind nicht fx, $f(x, y..)$ gleich Null, wohl aber dy oder du. Diess giebt eine ausgezeichnete Anwendung auf die Bestimmung der Maxima und Minima einer gegebenen Function.

c) Es sind nicht y, dy, u, du, wohl aber d^2y, d^2u gleich Null. Auch diess giebt besondere Anwendungen, wie z. B. in der Geometrie für die Inflexionspunkte einer Curve, oder für die Inflexionslinien der Flächen, u. s. w.

Und so kann der Reihe nach jedes nachfolgende Glied gleich Null gesetzt werden, und aus jedem ergeben sich besondere Anwendungen. Aber alle diese Fälle, mit Ausnahme der zwei ersten, $y = 0$, $u = 0$ und $dy = 0$, $du = 0$ geben zwar höchst merkwürdige, aber immerhin singuläre, beschränkte Anwendungen und werden darum in der allgemeinen Theorie übergangen. Diess geschieht nicht etwa, weil sie keine Resultate geben (diess wäre unrichtig); sondern weil die Resultate, die sie geben, singulärer Natur sind und nur wenige und allzufeine Anhaltspunkte in der allgemeinen Theorie haben. Die besondern Untersuchungen hingegen geben ihnen sehr markirte Anhaltspunkte, von denen sie sicher getragen werden, so dass man sie auch sicher diesen Untersuchungen überlassen kann.

Wir behandeln daher hier nur den Maclaurin'schen Lehrsatz, und die Lehren vom Maximum und Minimum einer gegebenen Function.

3) Für den Werth $\frac{a}{0} = \infty$ giebt es analytisch nur eine und dieselbe Untersuchung, welches Glied auch, ob y, ob dy, ob d^2y etc., unendlich gross werde. Analytisch zeigt sich, dass in diesem Falle die Grundbedingungen, unter denen die verlangten Reihen entwickelt werden können, überschritten sind.

Bei besondern Untersuchungen und Anwendungen ist es allerdings nicht einerlei, welche der Grössen, ob y, oder dy, oder d^2y etc. unendlich gross wird, dort treten auch die markirten Anhaltspunkte hervor, die in der allgemeinen Analysis zu fein und künstlich wären.

4) Eben so ist, wenigstens in der allgemeinen Analysis die Untersuchung für Werthe $\frac{0}{0}$ eine und dieselbe, welches der Glieder y, dy, d^2y .. u, du, d^2u .. den scheinbar unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ annehmen möge. Diess giebt eine ausgezeichnete Anwendung auf die näherungsweise Bestimmung der Wurzeln von Gleichungen und Reihen, und allgemeine Umkehrungs-Formeln der Functionen, Formeln, die unter der Benennung der La Grange'schen und La Place'schen Umkehrungs-Reihen bekannt sind.

Diess sind die Fälle, auf die wir uns bei der Anwendung des Differenzial-Calculs auf Analysis einschränken werden.

§. 76.

Bestimmung der Taylor'schen Reihe.

Die erste Untersuchung, dass jedes Glied der Reihe einen bestimmten Werth annimmt, die verallgemeinerte Maclaurin'sche Formel, bietet keine besondere Schwierigkeit und kann hier sogleich erledigt werden.

Um zu dem gewünschten Resultate zu gelangen, setzt man für x und dx beliebige Werthe, welche die Bedingungen erfüllen, dass eine Reihe sowohl entwickelt als auch convergent gemacht werden könne.

Beispiel 1. Wir haben für $y = e^x$ gefunden:

$$e^{x+dx} = e^x + e^x dx + e^x\frac{dx^2}{2} + e^x\frac{dx^3}{2.3} + .. \; e^x\frac{dx^n}{1.2.3..n} + ..$$

Setzt man $x = a$, $dx = b$, so wird:

$$e^{a+b} = e^a\left(1 + b + \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{2.3} + .. \frac{b^n}{1.2..n} + \frac{b^{n+1}}{1.2..n.n+1} + ..\right)$$

Für die Convergenz ist nothwendig, dass:

$$b < \frac{1.2.3..n.n+1}{1.2...n} < n+1 < \infty.$$

Die Reihe gilt daher für alle b und für alle a.

Für $b = 1$, $a = 0$ wird:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + .. \frac{1}{1.2..n} + ..$$

eine bekannte Reihe.

Beispiel 2. $y = log\, x$. **Es wird:**

$$log\,(x+dx) = log\,x + \frac{dx}{x} - \frac{dx^2}{2x^2} + \frac{dx^3}{3x^3} - \frac{dx^4}{4x^4} + \ldots$$

Für $x = a$, $dx = b$ **wird:**

$$log\,(a+b) = log\,a + \frac{b}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^4 + \ldots$$

Die Grösse a **kann alle Werthe haben, die grösser sind als Null. Für** $a = 0$ **oder** $a = -\alpha$ **würde** $log\,0$, $log\,-\alpha$ **unendlich gross.**

Die Grösse b **kann alle Werthe haben, welche die Reihe convergent machen, also:**

$$\frac{b}{a} < \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^n}{\frac{1}{n+1}\left(\frac{b}{a}\right)^n} < \frac{n+1}{n} < 1,$$

d. h. b **kann nicht grösser als** a **werden, kann übrigens positiv oder negativ sein. U. s. w.**

Die Anwendungen haben keine Schwierigkeit, man erreicht aber auch nicht, was man durch die Maclaurin'sche Reihe erreicht, nämlich dass die transcendenten Functionen e^a, $log\,a$ **verschwinden. Nur für** $a = 1$ **wird** $log\,a = 0$, **und die Formel wird die gewöhnliche:**

$$log\,(1+b) = b - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{4}b^4 + \ldots$$

Beispiel 3. $y = sin\,z$. **Es wird:**

$$sin\,(z+dz) = sin\,z + cos\,z dz - \frac{1}{2}sin\,z dz^2 - \frac{1}{2.3}cos\,z dz^3 + \\ + \frac{1}{2.3.4}sin\,z dz^4 + \ldots$$

Setzt man $z = nx$, $dz = ndx$, **so wird:**

$$sin\,(nx+ndx) = sin\,nx + cos\,nx\,.\,ndx - \frac{1}{2}sin\,nx\,.\,n^2dx^2 - \\ - \frac{1}{2.3}cos\,nx\,n^3dx^3 + \ldots$$

Wird 1) $x = 0$, **so ist** $sin\,nx = 0$, $cos\,nx = 1$,

$$sin\,ndx = ndx - \frac{1}{2.3}n^3dx^3 + \frac{1}{2.3..5}n^5dx^5.$$

Wird 2) $nx = ndx = \frac{1}{2}\pi$, **so ist** $sin\,nx = 1$, $cos\,nx = 0$,

$$sin\,\pi = 0 = 1 - \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{1.2..4}\frac{\pi^4}{16} - \ldots$$

Wird 3) $nx = z$, und $x + dx = z$ gesetzt, so wird $nx + ndx = nz$,

und $dx = z - x = \left(z - \frac{z}{n}\right)$,

und $\sin nz = \sin z + n \cos z \left(z - \frac{z}{n}\right) - \frac{n^2}{2} \sin z \left(z - \frac{z}{n}\right)^2 - \ldots$

U. s. w.

Es bietet sich hier eine Fülle von Formeln dar, aus denen man eben so viele algebraische Probleme ableiten kann.

§. 77.

Bestimmung der Reste dieser Reihen.

Es ist noch die Frage zu erörtern, welche Reste übrig bleiben, wenn man die Reihen nur bis zu einem beliebigen n^{ten} Gliede fortsetzt. Werden die Reihen zur numerischen Berechnung von Functionen gebraucht, so ist es nothwendig, dass man diess wisse.

Gehen die Reihen in's Unendliche, so ist es nicht möglich, diese Reste genau anzugeben, aber es genügt, ihre obern und untern Grenzen zu kennen, d. h. einen Werth zu finden, der grösser ist als der Rest, und einen Werth, der kleiner ist als der Rest. Man sieht dann, bis zu welchem Gliede man gehen müsse, um die verlangte Genauigkeit zu erreichen. Will man z. B. die numerischen Werthe bis zur 7^{ten} Dezimalstelle genau haben, und giebt das n^{te} Glied der Reihe solche Grenzen, welche die ersten 7 Dezimalstellen gemeinschaftlich haben, und erst in den nachfolgenden Dezimalstellen als grössere und kleinere Werthe erscheinen, so genügt es für den verlangten Zweck, die Berechnung der Reihe bis zum n^{ten} Gliede fortzusetzen.

Diese verlangten obern und untern Grenzen des Restes der Taylor'schen Reihe findet man aber auf folgende Weise:

1) Die Reihe ist:

$$y + \Delta y = y + \frac{dy}{dx}dx + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{dx^3}{1.2.3} + \ldots \frac{d^ny}{dx^n}\frac{dx^n}{1.2.3..n} +$$

$$+ \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\frac{dx^{n+1}}{1.2..n+1} + \frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}\frac{dx^{n+2}}{1.2.3..n+2} + \ldots$$

Sie wird also vom $(n+1)^{\text{ten}}$ Gliede an:

$$\frac{dx^{n+1}}{1.2..n+1}\left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}+\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}\frac{dx}{n+2}+\right.$$
$$\left.+\frac{d^{n+3}y}{dx^{n+3}}\frac{dx^2}{n+2.n+3}+\ldots\right)=R.$$

Sind alle Glieder der Reihe positiv, so ist das erste Glied $\frac{dx^{n+1}}{1.2..n+1}\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}<R$, weil mit dem ersten Gliede allein nur ein Theil der ganzen Summe genommen wird.

2) Wird in diesem ersten Gliede: $\frac{dx^{n+1}}{1.2..n+1}\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$, die Grösse x um dx vermehrt, so geht y in $y+\Delta y_x$ über, und das erste Glied wird:

$$\frac{dx^{n+1}}{1.2...n+1}\left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}+\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}\frac{dx}{1}+\frac{d^{n+3}y}{dx^{n+3}}\frac{dx^2}{1.2}+..\right)$$

Dieser Ausdruck ist grösser als R, da die Glieder, die auf $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$ folgen, der Reihe nach durch 1, 1.2, 1.2.3.. dividirt sind, während in R die nämlichen Grössen durch $n+2$, $n+2.n+3,\ldots$ dividirt sind, also grössere Nenner haben.

Der Rest der Taylor'schen Reihe ist daher zwischen den Grenzen

$$\frac{dx^{n+1}}{1.2..n+1}\frac{dy^{n+1}}{dx^{n+1}} \text{ und } \frac{dx^{n+1}}{1.2..n+1}\frac{d^{n+1}(y+\Delta y)}{dx^{n+1}}$$

oder $R>\frac{d^{n+1}y}{1.2..n+1}$ und $R<\frac{d^{n+1}(y+\Delta y)}{1.2...n+1}$.

3) Sind die aufeinanderfolgenden Glieder der Reihe abwechselnd positiv und negativ, so erhalten alle Glieder gleiche Zeichen, wenn man $(-dx)$ statt $(+dx)$ in die Reihe substituirt, und es gelten für diesen Fall die gefundenen Grenzen von R. Wird nun für $x=x$ der Werth der Function durch y, für $x+dx$ durch $y+\Delta y=y_{\prime}$, und für $(x-dx)$ durch $y_{\prime\prime}$ bezeichnet, so dass $y_{\prime\prime}$, y, $y_{\prime}$ aufeinanderfolgende Werthe der Function für $(x-dx)$, x, $(x+dx)$ sind, so ist, wenn $\frac{d^{n+1}y}{1.2...n+1}$ positiv ist, der Werth

$\frac{d^{n+1}y_{II}}{1.2..n+1}$ grösser als $\frac{d^{n+1}y}{1.2..n+1}$. Die Function nimmt daher von dem Werthe $x-dx$ bis x fortwährend ab, und da sie continuirlich bleiben muss, wenn die Taylor'sche Reihe überhaupt gelten soll, so ist $\frac{d^{n+1}y_{I}}{1.2..n+1}$, welches dem Werthe $x+dx$ entspricht, kleiner als $\frac{d^{n+1}y}{1.2..n+1}$. In diesem Falle ist $\frac{d^{n+1}(y+\Delta y)}{1.2...n+1}$ die untere Grenze, während $\frac{d^{n+1}y}{1.2..n+1}$ die obere Grenze des Restes ist, weil das Zeichen des nächstfolgenden Glieds negativ, also die ganze Reihe kleiner ist als das erste Glied derselben. Ist aber $\frac{d^{n+1}y}{1.2..n+1}$ negativ, dann wird die obere Grenze zur untern und umgekehrt. Bezeichnet man $\frac{d^{n+1}y}{1.2..n+1}$ durch A und $\frac{d^{n+1}(y+\Delta y)}{1.2...n+1}$ durch B, so ist in allen Fällen $R \gtrless \begin{matrix} A \\ B \end{matrix}$.

Bei Reihen, deren sämmtliche Glieder positiv sind, ist A die untere und B die obere Grenze; bei Reihen mit wechselnden Zeichen der Glieder ist A die untere und B die obere Grenze, wenn das $n+1^{te}$ Glied negativ ist. Ist aber diess Glied positiv, so ist A die obere und B die untere Grenze.

Beispiele zur Verdeutlichung. 1) Wir haben aus $y = e^x$ gefunden:

$$e^{x+dx} = e^x\left(1 + dx + \frac{dx^2}{2} + \frac{dx^3}{2.3} + \frac{dx^4}{2.3.4} + ..\right)$$

Will man nun die Berechnung der Reihe mit dem Gliede $\frac{dx^4}{2.3.4}$ schliessen, so ist der Rest:

$$> \frac{e^x dx^4}{2.3.4} \text{ und } < \frac{e^{x+dx} dx^4}{2.3.4}.$$

Für $x=0$, $dx=1$ wird die Reihe:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} +$$

$$\text{und } e > 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} > 2{,}7083$$

$$e < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{e}{2.3.4},$$

oder $$e\left(1-\frac{1}{2.3.4}\right)<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3},\ <2{,}6666\ldots$$

$$e<2{,}666\times\frac{24}{23}<2{,}78\ldots$$

2) Aus der logarithmischen Reihe haben wir gefunden:

$$log\,(x+dx)=log\,x+\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{x}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{dx}{x}\right)^3-$$
$$-\frac{1}{4}\left(\frac{dx}{x}\right)^4+\frac{1}{5}\left(\frac{dx}{x}\right)^5+\ldots$$

Für $x=1$ und $dx=1$ wird:

$$log\,2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\cdots$$

Will man die Reihe mit dem Gliede $\frac{1}{5}\left(\frac{dx}{x}\right)^5$ schliessen, dann ist $\frac{dx}{x}+\ldots+\frac{1}{5}\left(\frac{dx}{x}\right)^5$ die obere, und $\frac{dx}{x}+\ldots+\frac{1}{5}\left(\frac{dx}{x+dx}\right)^5$ die untere Grenze, und:

$$log\,2<1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5},\ <0{,}783$$
$$>1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5.2^5},\ >0{,}589.$$

Will man mit dem Gliede $\frac{1}{4}\left(\frac{dx}{x}\right)^4$ die Berechnung schliessen, so gilt, weil diess Glied negativ ist: $-\frac{1}{4}\left(\frac{dx}{x}\right)^4$ für die untere, und $-\frac{1}{4}\left(\frac{dx}{x+dx}\right)^4$ für die obere Grenze, oder, $dx=x=1$ gesetzt: $-\frac{1}{4}$ für die untere, und: $-\frac{1}{4.2^4}=-\frac{1}{64}$ für die obere Grenze, d. h. $log\,2>0{,}58\ldots$ und $log\,2<0{,}81$.

Z u s a t z. Ganz auf dieselbe Weise werden die übrigen Differenzial-Reihen behandelt, wenn besondere Werthe für die veränderlichen Grössen und ihre Zunahmen substituirt werden. Weitere Schwierigkeiten kommen bei ihnen nicht vor, wenn nicht etwa eines oder mehrere Glieder die Werthe 0, ∞ oder $\frac{0}{0}$ annehmen, und diese Fälle zu entwickeln, wird ohnehin die Aufgabe der nachfolgenden Untersuchungen sein.

Cap. XI.

Der Maclaurin'sche Satz.

§. 78.

Der Maclaurin'sche Satz für Functionen *einer* veränderlichen Grösse.

Der Maclaurin'sche Satz ist ein besonderer Fall des Taylor'schen. Wird nämlich in der Entwicklung der Taylor'schen Reihe:

$$f(x+dx) = fx + \frac{dfx}{dx}dx + \frac{1}{2}\frac{d^2fx}{dx^2}dx^2 + \frac{1}{2.3}\frac{d^3fx}{dx^3}dx^3 + \ldots$$

die veränderliche Grösse x gleich Null gesetzt, so dass $f(x+dx)$ in $f(dx)$ übergeht, so entsteht die Maclaurin'sche Reihe.

Ist z. B. die Function e^x gegeben, so ist:

$$e^{x+dx} = e^x\left(1 + dx + \frac{1}{2}dx^2 + \frac{1}{2.3}dx^3 + \ldots\right)$$

und, $x=0$ gesetzt:

$$e^{dx} = 1 + dx + \frac{1}{2}dx^2 + \frac{1}{2.3}dx^3 + \ldots$$

Setzt man dx als beliebige, einfach bezeichnete Grösse z, so ist

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2.3}z^3 + \ldots$$

die bekannte Reihe für die Exponential-Grössen.

Der bei der Maclaurin'schen Reihe, meistens, aber doch nicht immer, eintretende Vortheil besteht darin, dass die gegebene transcendente Function fx, (e^x), verschwindet, oder algebraisch wird, so dass die Reihen-Entwicklung der Function $f(dx)$, (e^{dx}) nach ganzen positiven Potenzen von dx möglich wird. Diess hat

der Maclaurin'sche Satz vor dem Taylor'schen voraus, da im letztern die zwei Functionen, sowohl $f(x+dx)$ als $f(x)$ übrig bleiben. Vor der allgemeinen Reihen-Entwicklung nach den Gesetzen der unbestimmten Coefficienten hat die Maclaurin'sche Reihe das voraus, dass ihr Bildungsgesetz sogleich als allgemein gültiges erkannt wird, da die Differenzialien independent dargestellt werden können.

In Bezug auf Gültigkeit ist die Maclaurin'sche Reihe genau den Bedingungen unterworfen, die für die allgemeine Taylor'sche gelten. Diese sind, wie im Vorhergehenden erörtert wurde, Bedingungen der Convergenz und Bedingungen der Möglichkeit der Entstehung einer Reihe.

Die Maclaurin'sche Reihe hat einen viel beschränkteren Spielraum als die Taylor'sche. Denn wird die letzere für einen Werth $x=a$ unmöglich, so bleibt sie doch für unzählig viele andere Werthe möglich, während die Maclaurin'sche Reihe, wenn sie für den Werth $x=0$ unmöglich wird, für die gegebene Function überhaupt unmöglich bleibt.

So ist es z. B. nicht möglich, aus

$$(x+dx)^{\mu} = x^{\mu} + \mu x^{\mu-1}dx + \frac{\mu.\mu-1}{1.2}x^{\mu-2}dx^2 + \\ + \frac{\mu.\mu-1\ldots\mu-(n-1)}{1.2\ldots n}x^{\mu-n}dx^n + ..$$

für $x=0$ die Reihe $(dx)^{\mu}$ zu entwickeln, sobald μ eine andere als eine ganze positive Zahl ist; denn es werden für $x=0$ diejenigen Glieder der Reihe unendlich gross, für welche $n-1>\mu$ ist.

Eben so ist es unmöglich, aus

$$log(x+dx) = log\,x + \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\frac{dx^2}{x^2} + \frac{1}{3}\frac{dx^3}{x^3} - .. \mp \frac{1}{n}\frac{dx^n}{x^n} \mp ..$$

für $x=0$ die Reihe

$$log\,dx = log\,0 + \frac{dx}{0} - \frac{1}{2}\frac{dx^2}{0} + ..$$

zu entwickeln. Denn es wird jedes Glied derselben unendlich gross, während die Taylor'sche Reihe für $x=1$:

$$log(1+dx) = dx - \frac{1}{2}dx^2 + \frac{1}{3}dx^3 - \ldots$$

auf's Leichteste hergestellt werden kann.

Wie die Schwierigkeiten, die sich dabei ergeben, erklärt und gehoben werden können, ist bereits im Vorhergehenden erörtert worden.

§. 79.

Ableitung dieser Reihe von Maclaurin.

Maclaurin hat seine Reihe unabhängig von der Taylor'schen gefunden, und die Art und Weise seiner Ableitung ist so merkwürdig, dass sie hier kurz dargestellt werden darf.

Der Gang, den er einschlägt, ist folgender:

Es sei:

$$1)\quad fx = y = a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4 + \ldots$$

so wird durch successive Differenzirung gefunden:

$$2)\quad dy_x = (b + 2cx + 3ex^2 + 4fx^3 + \ldots)\,dx;$$

$$3)\quad d^2y_x = (2c + 3.2.ex + 4.3fx^2 + \ldots)\,dx^2;$$

$$4)\quad d^3y_x = (3.2.e + 4.3.2.fx + \ldots)\,dx^3;$$

$$5)\quad d^4y_x = (4.3.2.1f + kx + \ldots)\,dx^4;$$

u. s. w.

Setzt man $x = 0$, so findet man die Coefficienten a, b, c, $e \ldots$, und zwar $a = y$ aus (1); $b = \frac{dy}{dx}$ aus (2); $c = \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}$ aus (3); $e = \frac{1}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3}$ aus (4) u. s. w.

Diess substituirt, giebt:

$$fx = y + \frac{dy}{dx}x + \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}x^2 + \frac{1}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3} + \ldots,$$

worin y den Werth ausdrückt, den die Function fx erhält, wenn in ihr $x = 0$ gesetzt wird. Die gleiche Einschränkung gilt für $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ und die übrigen Differenzialien.

Der Satz stimmt mit dem Taylor'schen überein, ist jedoch nur sehr speziell, da ihn Maclaurin nur für den Werth $x = 0$ beweist, während ihn Taylor für jeden Werth von x beweist.

Ueberhaupt nimmt der Wachsthum der Wissenschaft von schwachem Anfange an nur allmählig zu, auch wenn, wie hier, im Anfange schon Alles enthalten ist. Aber zu sehen und auszusprechen, was in ihm enthalten ist, das ist es, was den Fort-

schritt der Wissenschaft von Stufe zu Stufe auszeichnet. Weder Maclaurin noch Taylor sahen die ganze Tragweite ihrer Lehrsätze, und es blieb ihrem Nachfolger Euler überlassen, die Wahrheiten dieser Sätze ganz allgemein und unabhängig von dem damaligen, mit unendlich kleinen Grössen rechnenden, Differenzial-Calcul zu erkennen, so dass endlich La Grange die letzte Hand anlegen und diese Sätze zur Grundlage seiner Theorie der Functionen machen konnte.

§. 80.

Beispiele über die Maclaurin'sche Reihe.

I. Erste Reihe der Urfunctionen.

1) $y = x^\mu$, $y + \Delta y = (x + dx)^\mu$ giebt für $x = 0$ keine Reihe, wenn μ eine andere als ganz positive Zahl ist.

2) $y = a^x$ giebt aus $y + \Delta y = a^{x+dx}$:

$$a^{x+dx} = a^x\left(1 + \log a\,dx + \frac{1}{2}(\log a)^2 dx^2 + \frac{1}{2.3}(\log a)^3 dx^3 + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n}(\log a)^n dx^n + \ldots\right)$$

und für $x = 0$, und $dx = z$:

$$a^z = 1 + z\log a + \frac{1}{2}z^2(\log a)^2 + \frac{1}{2.3}z^3(\log a)^3 + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n}z^n(\log a)^n + \ldots$$

3) $y = \sin x$ giebt $y + \Delta y = \sin(x + dx)$:

$$\sin(x+dx) = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)dx + \sin\left(\frac{2\pi}{2} + x\right)\frac{dx^2}{2} + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\frac{dx^3}{2.3} + \ldots \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)\frac{dx^n}{1.2\ldots n} + \ldots$$

Für $x = 0$ werden

$$\sin x, \quad \sin\left(\frac{2\pi}{2} + x\right), \quad \sin\left(\frac{4\pi}{2} + x\right)\ldots$$

sämmtlich gleich Null, und

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right), \quad \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right), \quad \sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right)\ldots$$

abwechselnd $+\cos x$ und $-\cos x$, d. h. für $x = 0$ abwechselnd

$+1$ und -1. Wird überdiess $dx = z$ gesetzt (um eine einfacher bezeichnete Grösse zu haben), so wird:

$$\sin z = z - \frac{1}{2.3}z^3 + \frac{1}{2.3..5}z^5 + . \mp \frac{z^n}{1.2..n} \mp \ldots$$

4) $y = \cos x$ giebt, auf dieselbe Art behandelt und in eben so allgemeiner Form:

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{1.2..4} - \ldots \mp \frac{z^n}{1.2..n} \mp \ldots$$

5) $y = tg\,x,\ y + \Delta y = tg\,(x + dx)$.

Um eine Reihe für $tg\,z$ nach dem Maclaurin'schen Satze zu entwickeln, differenzirt man $tg\,x$ der Reihe nach, und setzt am Ende $x = 0$ und $dx = z$. Die independente Darstellung von $d^n tg\,x$ ist complicirt, nur in einer recurrirenden Gleichung zu geben, wie Cap. IX. gezeigt worden ist.

Führt man die dort angedeuteten Operationen aus, so erhält man:

$$tg\,z = \frac{T_1 z}{1} + \frac{T_3 z^3}{1.2.3} + \frac{T_5 z^5}{1.2\ldots5} + \ldots$$

Für die Coefficienten $T_1, T_3, T_5 \ldots$ ergeben sich die Werthe: $T_1 = 1,\ T_3 = 2,\ T_5 = 16$ u. s. w.

6) Für $y = cotg\,x$ findet man aus dem Maclaurin'schen Satze keine Reihe, da x nicht gleich Null gesetzt werden darf, indem $cotg\,0 = \infty$ ist. Man kann übrigens die verlangte Reihe aus dem Taylor'schen Satze, oder auch aus der Division:

$$cotg\,x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2..4}x^4 - ..}{x - \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1}{2.3..5}x^5 - ..}$$

herstellen. Durch analoge Division $tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x}$ findet man auch die Tangenten-Reihe, wie in Cap. II. gezeigt wurde. Die gegenwärtige Entwicklung hat den Vorzug, dass die aufeinanderfolgenden Glieder nicht empirisch, wie bei der Division, sondern nach allgemeinen Formeln gefunden werden.

Uebrigens hat die Goniometrie Hilfsmittel genug, die Reihe $cotg\,x$, wenn sie verlangt wird, nach allgemeinen Gesetzen zu entwickeln, die jedoch von goniometrischen Gleichungen, nicht aber von Differenzialien abhängig sind.

7) Auf dieselbe Art findet man aus den recurrirenden Gleichungen (Cap. IX.) die Reihe für *sec z*, die mit der früher gefundenen (Cap. II.) übereinstimmt.

8) Da $cosec\, x$ für $x = 0$ selber unendlich wird, so wird aus dem Maclaurin'schen Satze keine Reihe für *cosec z* gefunden. In Cap. II. ist übrigens gezeigt worden, welche Hilfsmittel der Goniometrie zu Gebote stehen, um die verlangte Reihe herstellen zu können. Diese mit den Lehrsätzen über zusammengesetzte Differenzialien verbunden geben der goniometrischen Reihe die Allgemeinheit ihres Fortschreitungsgesetzes. Die Durchführung aller hieher gehörigen Formeln ist Sache der Goniometrie.

II. Zweite Reihe.

1) $y = log\, x$. Da für $x = 0$ die Function $log\, x$ gleich unendlich wird, so kann *log z* aus der Maclaurin'schen Reihe nicht entwickelt werden, wohl aber aus der Taylor'schen:

$$log(1+z) = dz\left(z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \ldots \mp \frac{1}{n}z^n \mp \frac{1}{n+1}z^{n+1} + \ldots\right)$$

2) $y = arc.\, sin\, x$, also $x = sin\, y$. Nun ist:

$$dy = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx,$$
$$d^2y = x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}dx^2,$$
$$d^3y = \left((1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}\right)dx^3,$$
$$d^4y = \left((3.3.x(1-x^2)^{-\frac{5}{2}} + 3.5.x^3(1-x^2)^{-\frac{7}{2}}\right)dx^4,$$
$$d^5y = \Big(3.3(1-x^2)^{-\frac{5}{2}} + 3.5.6x^2(1-x^2)^{-\frac{7}{2}} + + 3.5.7x^4(1-x^2)^{-\frac{9}{2}}\Big)dx^5.$$

Den Ausdruck $d^{n+1}y$ haben wir Cap. IX. independent gefunden. Für $x = 0$ verschwinden alle Glieder, die x zum Factor haben, und es wird:

$$d^{n+1}y = \frac{1.3.5.7..n-1}{2.4.6.8..n}\, n.n-1.n-2..1\, dx^{n+1},$$

wenn $n = 2k$, gleich einer geraden Zahl ist; denn die Glieder, für welche n eine ungerade Zahl ist, verschwinden.

Setzt man nun $x = 0$ und $dx = z$, so geht:

$$y + \Delta y = y + dy + \frac{1}{2}d^2y + \frac{1}{2.3}d^3y \ldots \frac{1}{2.3..n+1}d^{n+1}y + \ldots$$

in folgende Reihe über:

$$arc.\sin z = z + \frac{z^3}{2.3} + \frac{3z^5}{2.4.5} + \frac{3.5.z^7}{2.4.6.7} + \ldots$$

oder $z = \sin v$ gesetzt:

$$v = \sin v + \frac{\sin v^3}{2.3} + \frac{3\sin v^5}{2.4.5} + \frac{3.5\sin v^5}{2.4.6.7} + \ldots.$$

3) $y = arc.\ \cos x.$

Da $arc.\cos x = \frac{\pi}{2} - arc.\ \sin x$, so ist unmittelbar:

$$arc.\cos z = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{2.3} - \frac{1.3.x^5}{2.4.5} - \ldots.$$

4) $y = arc.\ tg\, x.$

Da $d\,arc.tg\,x = dy = \frac{dx}{1+x^2}$ ist, so kennen wir auch das independente Differenzial $d^{n+1}y$ aus Cap. IX.

Es ist $dy = \frac{dx}{1+x^2}$,

$$d^2y = -2x\,(1+x^2)^{-2}\,dx^2,$$
$$d^3y = -2\,(1+x^2)^{-2}\,dx^3 + 8x^2\,(1+x^2)^{-3}\,dx^3.$$

U. s. w.

Für $x = 0$ verschwinden alle Differenzialien gerader Ordnung, und in den Differenzialien der ungeraden Ordnung bleibt nur das erste Glied. Diess reducirt sich für $d^{n+1}y$ auf $\pm 1.2.3..n\,dx^n$, je nachdem $\frac{n}{2}$ eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Da

$$arc.tg\,(x+dx) = arc.tg\,x + dy + \frac{1}{2}d^2y + \frac{1}{2.3}d^3y + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n+1}d^{n+1}y + \ldots$$

so wird für $x = 0$ und $dx = z$:

$$arc.tg\,z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \ldots \pm \frac{z^{n+1}}{n+1} \mp \frac{z^{n+3}}{n+3} \pm \ldots$$

Zusatz. $arc.\ cotg\,z$ findet man einfach aus der Gleichung:

$$arc.\ cotg\,z = \frac{\pi}{2} - arc.\ tg\,z.$$

5) $arc.\ sec\,x$ und $arc.\ cosec\,x.$

Da $d(arc.\ sec\,x) = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ und $d(arc.\ cosec\,x) = \frac{-dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ ist, so sieht man leicht ein, dass der Maclaurin'sche Satz die gesuchten Reihen nicht geben könne, da alle Differenzialien für $x = 0$ unendlich gross werden.

In Cap. II. haben wir aus andern Hilfsmitteln der Analysis die verlangten Reihen hergestellt. Will man sie mit Hilfe der Differenzialien herstellen, so setzt man in $d\,arc.\,sec\,x = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ und in die höheren Differenzialien einen Werth $x > 1$ und $dx = z$. Dann hat es keine Schwierigkeit, das Bildungsgesetz allgemein zu beweisen. Noch schneller gelangt man zum Ziele, wenn man wie in Cap. II. verfährt und dann nach dem allgemeinen Gesetze des Differenzirens vorgeht. Da $arc.\,sec\,y = arc.\,cos\frac{1}{y}$, so ist:

$$arc.\,sec\,y = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{y} - \frac{1}{2.3.y^3} - \frac{1.3}{2.4.5y^5} - .$$

und da $arc.\,cos\left(\frac{1}{y}\right)$ allgemein gilt, so gilt auch $arc.\,sec\,y$ allgemein. Analoge Resultate leitet man für $arc.\,cosec\,x$ ab, indem man $cosec\,x = \frac{1}{sin\,x}$ setzt, $cosec\,x = y$, $sin\,x = z$, also $x = arc.\,cosec\,y$, $x = arc.\,sin\,z$, also $arc.\,cosec\,y = arc.\,sin\,z = arc.\,sin\frac{1}{y}$, da $y = \frac{1}{z}$ ist. Da man nun $arc.\,sin\frac{1}{y}$ allgemein entwickeln kann, so gilt dieselbe Allgemeinheit auch für $arc.\,cosec\,y$. —

Zusatz. Die Maclaurin'sche Reihe ist hier aus dem Grunde völlig unanwendbar, weil keine Secante und Cosecante gleich Null gesetzt werden darf, da Secante und Cosecante nicht kleiner als der Radius werden können. Werden sie aber dennoch gleich Null gesetzt, so findet man die Reihen für imaginäre Grössen.

§. 81.

Die Maclaurin'sche Formel für Functionen von Veränderlichen, die ihrerseits Functionen von andern unabhängigen Veränderlichen sind.

Ist $y = fx$, und $x = \varphi z$, so entstehen die Formeln §. 43. Setzt man in diesen, nachdem sie entwickelt sind, $z = a$ und $dz = v$, so hat man Reihen nach aufsteigenden Potenzen von v, und diese Reihen folgen den Gesetzen des Taylor'schen Satzes. Setzt man hingegen $z = 0$ und $dz = v$, so erhält man Reihen, die dem Maclaurin'schen Satze gemäss sind.

In Bezug auf die Convergenz und auf die Möglichkeit von Reihen-Entwicklungen gelten hier die nämlichen Regeln, die für die einfache Taylor'sche Reihe bewiesen worden sind.

Die Formeln für diese Entwicklungen sind:

$$y + \Delta y = y + dy_z + \frac{1}{2} d^2y_z + \frac{1}{2.3} d^3y_z + \ldots \frac{1}{1.2\ldots n} d^n y_z + \ldots$$

und $$dy_z = \frac{dy}{dx} dx_z,$$

$$d^2y_z = \frac{dy}{dx} d^2x_z + \frac{d^2y}{dx^2} (dx_z)^2,$$

$$d^3y_z = \frac{dy}{dx} d^3x_z + 3\frac{d^2y}{dx^2} d^2x_z dx_z + \frac{d^3y}{dx^3} (dx_z)^3,$$

u. s. w., wie sie §§. 54 und 55 gegeben sind.

Beispiel. Es sei $y = \sin(\alpha + \beta z + \gamma z^2)$ zu entwickeln.

Setzt man $\alpha + \beta z + \gamma z^2 = x$, so wird:

$$y = \sin x \quad \text{und} \quad x = \alpha + \beta z + \gamma z^2.$$

Nun ist:

$$\frac{dy}{dx} = \cos x; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x; \quad \frac{d^4y}{dx^4} = +\sin x \text{ u. s. w.}$$

und $$dx = (\beta + 2\gamma z)dz, \quad d^2x = 2\gamma\, dz^2, \quad d^3x = 0,$$

und alle nachfolgenden Differenzialien von x sind gleicherweise gleich Null.

Substituirt man diese Werthe in die obige Formel, so wird:

$$y + \Delta y = \sin x + \cos x\,(\beta + 2\gamma z)dz +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\cos x \,.\, 2\gamma dz^2 - \sin x\,(\beta + 2\gamma z)^2\, dz^2\right) +$$
$$+ \frac{1}{2.3}\left(-3\sin x \,.\, 2\gamma \,.\, (\beta + 2\gamma z) - \cos x\,(\beta + 2\gamma z)^3\right) dz^3 + \ldots$$

Nun ist auch

$$y + \Delta y = \sin\left(\alpha + \beta\,(z + dz) + \gamma\,(z + dz)^2\right).$$

Substituirt man $z = 0$ und $dz = v$, so wird:

$$\sin(\alpha + \beta v + \gamma v^2) = \sin\alpha + (\beta \cos\alpha\,.)\,v + \frac{1}{2}(2\gamma\cos\alpha - \beta^2 \sin\alpha)v^2 -$$
$$- \frac{1}{2.3}(6\gamma\beta\sin\alpha + \beta^3\cos\alpha)v^3 + \ldots$$

Setzt man $\alpha = 0$, $\gamma = 0$ und $\beta = 1$, so erhält man die einfache Sinus-Reihe:

$$\sin v = \cos \alpha . v - \frac{1}{2.3} \cos \alpha v^3 + \ldots$$

und, da $\cos \alpha = 1$:

$$\sin v = v - \frac{1}{2.3} v^3 + \ldots$$

§. 82.

Sinusse und Cosinusse vielfacher Bogen.

Es sei $y = \sin(m \, arc. \sin z)$.

Setzt man $arc. \sin z = x$, so wird: $y = \sin mx$, $x = arc. \sin z$.

1) Nun sind:

$$\frac{dy}{dx} = m \cos mx; \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -m^2 \sin mx;$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -m^3 \cos mx; \quad \frac{d^4y}{dx^4} = +m^4 \sin mx;$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = +m^5 \cos mx \text{ etc. etc.}$$

$$dx = (1-z^2)^{-\frac{1}{2}} dz; \quad d^2x = z(1-z^2)^{-\frac{3}{2}} dz^2;$$

$$d^3x = \left((1-z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3z^2(1-z^2)^{-\frac{5}{2}}\right) dz^3;$$

$$d^4x = \left(3.3z(1-z^2)^{-\frac{5}{2}} + 3.5.z^3(1-z^2)^{-\frac{7}{2}}\right) dx^4;$$

$$d^5x = \Big(3.3(1-z^2)^{-\frac{5}{2}} + 3.5.6z^2(1-z^2)^{-\frac{7}{2}} + 3.5.7z^4(1-z^2)^{-\frac{9}{2}}\Big) dz^5;$$

u. s. w.

2) Substituirt man $z = 0$, so wird $\sin z = 0$ und $arc. \sin z = 0$, also auch $x = 0$, und es gehen folgende Werthe hervor:

$$y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = m \cos mx = m, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0;$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -m^3, \quad \frac{d^4y}{dx^4} = 0, \quad \frac{d^5y}{dx^5} = +m^5 \text{ u. s. w.}$$

Das Fortschreitungs-Gesetz ist deutlich.

Ferner wird, für $z = 0$:

$$dx = dz; \quad d^2x = 0; \quad d^3x = dz^3; \quad d^4x = 0;$$

$$d^5x = 3.3.dz^5; \quad d^6x = 0 \text{ etc.},$$

so dass auch hier das Fortschreitungs-Gesetz deutlich ist.

Substituirt man diese Werthe in

$$y + \Delta y = y + dy_z + \frac{1}{2}d^2y_z + \frac{1}{2.3}d^3y_z + \ldots$$

so wird, da $y+\Delta y = \sin\left(m\,arc.\sin(z+dz)\right) = \sin(m\,arc.\sin dz)$ ist:

$$\sin(m\,arc.\sin dz) = mdz - \frac{1}{1.2.3}(m^3-m)\,dz^3 + \\ + \frac{1}{1.2..5}(m^5-10m^3+9m)\,dz^5 - \ldots$$

Wird $dz = \sin v$ gesetzt, also $v = arc.\sin dz$, so wird:

$$(1)\quad \sin mv = m\sin v - \frac{1}{1.2.3}m(m^2-1^2)(\sin v)^3 + \\ + \frac{1}{1.2..5}(m.m^2-1^2.m^2-3^2)(\sin v)^5 - \ldots$$

Diess ist eine Formel des Sinus vielfacher Bogen, die für alle Werthe von m, auch für negative und gebrochene Zahlen gilt.

Ist m eine ungerade ganze Zahl, so besteht die Formel aus einer endlichen Anzahl von Gliedern, wie das Fortschreitungsgesetz zeigt.

3) Durch Differenzirung erhält man, wenn man beiderseits durch mdv dividirt:

$$(2)\quad \cos mv = \cos v\left[1 - \frac{m^2-1^2}{1.2}\sin^2 v + \right. \\ \left. + \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{1.2.3.4}\sin^5 v + \ldots\right]$$

4) Entwickelt man ganz auf dieselbe Art: $\cos(m\,arc.\sin z)$, so findet man:

$$(3)\quad \cos mv = 1 - \frac{m^2}{1.2}\sin^2 v + \frac{m^2.m^2-2^2}{1.2.3.4}\sin^4 v - \ldots,$$

und durch Differenzirung:

$$(4)\quad \sin mv = \cos v\left[m\sin v - \frac{m.(m^2-2^2)}{1.2.3}\sin^3 v + \ldots\right]$$

Diese beiden Reihen brechen für gerade m ab, und geben endliche Formeln.

5) Aus diesen vier allgemeinen Reihen lassen sich viele besondere Reihen ableiten, wenn der Zahl m beliebige Werthe beigelegt werden.

So wird für $m = 1$:

$$(4)\quad \sin v = \cos v \left[\sin v + \frac{1.3}{1.2.3} \sin^3 v + \frac{1.3.15}{1.2..5} \sin^5 v + .. \right]$$

$$(3)\quad \cos v = 1 - \frac{1}{1.2} \sin^2 v - \frac{1.3}{1.2..4} \sin^4 v - \ldots$$

Für $m = 0$ wird $\cos mv = 1$, und es wird:

$$(2)\quad 1 = \cos v \left[1 + \frac{1}{2} \sin^2 v + \frac{1.3}{2.4} \sin^4 v + .. \right]$$

Die Formel (3) würde die Identität: $1 = 1$ geben.

Diese Formeln lassen zich noch vielfach verändern, wenn man Tangenten und Cotangenten und andere Substitutionen einführt, die sich aus den goniometrischen Gleichungen ergeben.

§. 83.

Historische Vergleichung.

Die Formel:

$$y + \Delta y_z = y + \frac{dy}{dx} dx_z + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} d^2 x_z + \frac{d^2 y}{dx^2} (dx_z)^2 \right) + .. ,$$

aus der so viele andere Formeln hervorgehen, wenn der Grösse z und dz bestimmte Werthe beigelegt werden, ist erst spät als das erkannt worden, was sie ist. Noch Euler verhält sich gegen diese Formel genau so, wie sich Maclaurin gegen die Taylor'sche Reihe verhält. Er findet dieselben Resultate, aber nur für den speciellen Fall $z = 0$, und mehr empirisch, ohne Hilfe des Fortschreitungs-Gesetzes der allgemeinen Formel.

Obwohl nun seine Methode, gerade wie die Maclaurin'sche Ableitung antiquirt ist, so zeigt doch eine Vergleichung der verschiedenen Methoden den Weg, den die Wissenschaft genommen hat, um vom Besondern und Unvollkommenen zum Allgemeinen und Vollkommenen zu gelangen.

1) Euler behandelt das Beispiel im §. 81. auf folgende Weise:

Es sei gegeben: $y = \sin(\alpha + \beta x + \gamma x^2)$. Man setze:

$$\sin(\alpha + \beta x + \gamma x^2) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots .$$

Der Kürze halber setze man:

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 = u \text{ und } A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + .. = y,$$

so dass $y = \sin u$. Durch Differenzirung entsteht: $dy = \cos u\, du$. Um $\cos u = \sqrt{1 - \sin^2 u}$ wegzubringen, differenzirt man auf's Neue

und substituirt die Werthe: $\sin u = y$ und $\cos u = \frac{dy}{du}$, dann erhält man $d^2y = \frac{dy}{du} d^2u - y\,du^2$, oder $du\,d^2y - dy\,d^2u + y\,du^3 = 0$.

In diese Gleichung hat man die Werthe dy, d^2y, du, du^3, d^2u zu substituiren, und die Glieder nach aufsteigenden Potenzen von x zu ordnen.

2) Nun ist:
$$\begin{aligned} y &= A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots, \\ dy &= (B + 2Cx + 3Dx^2 + \ldots)\,dx, \\ d^2y &= (2C + 3.2.Dx + \ldots)\,dx^2, \\ u &= \alpha + \beta x + \gamma x^2, \\ du &= (\beta + 2\gamma x)\,dx, \\ du^3 &= (\beta^3 + 6\beta^2\gamma x + 12\beta\gamma^2 x^2 + 8\gamma^3 x^3)\,dx^3, \\ d^2u &= 2\gamma dx^2. \end{aligned}$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung:
$$du\,d^2y - dy\,d^2u + y\,du^3 = 0,$$
und ordnet sie nach aufsteigenden Potenzen von x, so folgt:

$$\left.\begin{matrix} 2\beta C \\ +\ \beta^3 A \\ -\ 2\gamma B \end{matrix}\right\} x^0 \left.\begin{matrix} +\ 6\beta D \\ +\ 4\gamma C \\ +\ 6\beta^2\gamma A \\ +\ \beta^3 B \\ -\ 4\gamma C \end{matrix}\right\} x^1 \left.\begin{matrix} +\ 12\beta E \\ +\ 12\gamma D \\ +\ 12\beta\gamma^2 A \\ +\ 6\beta^2\gamma B \\ +\ \beta^3 C \\ -\ 6\gamma D \end{matrix}\right\} x^2 + \ldots$$

3) Ferner ist nach dem Lehrsatze der unbestimmten Coefficienten jeder Coefficient der aufsteigenden Potenzen von x einzeln gleich Null. Diess giebt die Mittel an die Hand, die Werthe von C, D, E.. zu bestimmen. Die Werthe A und B bestimmt man aus den Gleichungen: $y = \sin u$, $dy = \cos u\,du$, aus denen man für $x = 0$ findet: $A = \sin\alpha$ und $B = \beta\cos\alpha$. Mit diesen Werthen bestimmt man C aus dem Coefficienten von x^0, D aus dem Coefficienten von x^1, E aus dem Coefficienten von x^2 u. s. w.

4) Man sieht das Mühselige und Empirische dieser Operationen ein, und doch ist alle Mühe nur auf eine einzelne Operation verwendet. Ist eine andere Function gegeben, z. B. $log(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + .)$, so ist dafür wieder eine ganz eigene Formel zu construiren.

Wie ganz anders ist unsere Reihe, die für jede beliebige Function die eine, leichte und allgemeine Formel giebt:

$$y + \Delta y_z = y + \frac{dy}{dx}\,dx_z + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\,d^2x_z + \frac{d^2y}{dx^2}\,(dx_z)^2\right) + \ldots$$

und die nicht bloss für den Werth $z = 0$, sondern für beliebige Werthe $z = \alpha$ gilt, von denen der Werth $z = 0$ nur ein einziger Fall ist.

Zusatz. Diese specielle Methode, deren sich Euler und La Grange bedient haben, heisst die Methode der Entwicklung in Reihen mittelst der Differenzial-Gleichungen. Hat man dabei specielle Zwecke im Auge, so bedient man sich ihrer manchmal mit Vortheil; handelt es sich aber um die allgemeine Entwicklung nach aufsteigenden Potenzen einer Veränderlichen, so ist die allgemeine Formel weit vorzuziehen, schon darum, weil sie allgemeine Resultate giebt.

§. 84.

Andere Beispiele.

1) Man vergleiche die Euler'sche Ableitungsart noch mit folgender:

Es sei $y = log(\alpha + \beta z + \gamma z^2)$ zu finden.

Setzt man $x = \alpha + \beta z + \gamma z^2$, so wird $y = log\, x$, und

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x};\quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2};\quad \frac{d^3y}{dx^3} = +\frac{2}{x^3};\quad \frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{2.3}{x^4}\,..$$

$$dx = (\beta + 2\gamma z)\,dz;\quad d^2x = 2\gamma\,dz^2;\quad d^3x = 0;\quad d^4x = 0 \text{ etc.}$$

Für $z = 0$ wird $y = log\,\alpha$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\alpha}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{\alpha^2}$; $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2}{\alpha^3}$ etc., und $dx = \beta dz$, $d^2x = 2\gamma dz^2$, folglich:

$$y + \Delta y_z = log\left(\alpha + \beta(z+dz) + \gamma(z+dz)^2\right) = log(\alpha + \beta dz + \gamma dz^2) =$$

$$= log\,\alpha + \frac{1}{\alpha}.\beta dz + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}2\gamma dz^2 - \frac{1}{\alpha^2}\beta^2 dz^2\right) +$$

$$+ \frac{1}{2.3}\left(\frac{1}{\alpha} \times 0 - \frac{3}{\alpha^2}.2\gamma.\beta dz^3 + \frac{2}{\alpha^3}\beta^3 dz^3\right) + ..$$

oder:

$$log(\alpha + \beta dz + \gamma dz^2) = log\,\alpha + \frac{1}{\alpha}\beta dz + \frac{1}{2}\left(\frac{2\gamma}{\alpha} - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)dz^2 +$$

$$+ \frac{1}{3}\left(\frac{\beta^3}{\alpha^3} - \frac{3\beta\gamma}{\alpha^2}\right)dz^3 + ..$$

Für $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$ entsteht die früher abgeleitete Formel:

$$log(1 + dz) = dz - \frac{1}{2}dz^2 + \frac{1}{3}dz^3 - \ldots$$

Beispiel 2. Es sei $y = cos(z^n)$ zu entwickeln.

Wir wählen diess Beispiel, weil die allgemeine Formel unmöglich wird, so wie n eine andere als ganze positive Zahl ausdrückt. Diess sieht man a priori ein. Denn da

$$cos\, v = 1 - \frac{v^2}{1.2} + \frac{v^4}{1.2..4} - ..$$

so wird $v = z^n$:

$$cos(z^n) = 1 - \frac{z^{2n}}{1.2} + \frac{z^{4n}}{1.2..4} - ..$$

Ist n eine gebrochene Zahl, so entsteht eine Reihe mit gebrochenen Exponenten von z, und ist n eine negative Zahl, so entsteht eine Reihe mit negativen Potenzen von z. Diess widerspricht der ersten Bedingung der allgemeinen Formel, nämlich, dass die Reihen nach ganzen und positiven Exponenten fortschreiten.

Wird $z^n = x$ gesetzt, so ist $y = cos\, x$,

$$\frac{dy}{dx} = -sin\, x;\ \frac{d^2y}{dx^2} = -cos\, x;\ \frac{d^3y}{dx^3} = +sin\, x;\ \frac{d^4y}{dx^4} = +cos\, x \text{ etc.},$$

$$dx = nz^{n-1}dz,\ d^2x = n.n-1\, z^{n-2}dz^2 \text{ etc.}$$

Für $z = 0$ wird $x = 0$, und alle Differenzialien von x werden ebenfalls gleich Null, mit Ausnahme des einzigen

$$d^n x = n.n-1..n-(n-1)z^{n-n}dz^n = n.n-1.n-2..1dz^n,$$

was jedoch nur möglich ist, wenn n eine ganze positive Zahl ist, da ein n^{tes} Differenzial immer n als ganze positive Zahl vorausgesetzt. Denn es giebt kein Differenzial $d^{-n}z$, $d^{\frac{\alpha}{\beta}}z$, sondern nur dz, d^2z, d^3z etc.

Die allgemeine Formel wird also für $z = 0$ illusorisch, nicht aber (nach dem Taylor'schen Lehrsatze) für $z = \alpha$, so dass auch hier wieder dieser Lehrsatz als der allgemeinere erscheint.

Ist aber n eine ganze positive Zahl, so entwickelt man die Reihe sehr leicht. Ist z. B. $n = 2$, so sind x, dx, d^3x etc. gleich Null, und nur $d^2x = 2dz^2$.

Man sammelt nun die Glieder, in denen d^2x und Potenzen von d^2x enthalten sind. Diese sind:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)d^2x;\quad \frac{1}{2.3.4}\cdot 3(d^2x)^2\frac{d^2y}{dx^2};\quad \frac{1}{1.2..6}15(d^2x)^3\frac{d^3y}{dx^3}\text{ etc.}$$

Nun ist für $z=0$, $\cos x=1$, $\sin x=0$, also $\frac{dy}{dx}=0$, $\frac{d^2y}{dx^2}=-1$, $\frac{d^3y}{dx^3}=0$, $\frac{d^4y}{dx^4}=+1$, also:

$$\cos(dz)^2=1-\frac{3(2dz^2)^2}{2.3.4}+\frac{105.(2dz^2)^4}{1.2.3..8}-\ldots$$

$$\cos(dz)^2=1-\frac{dz^4}{2}+\frac{dz^8}{1.2.3.4}-\ldots$$

Zusatz. Die Coefficienten von d^2x, $(d^2x)^2$, $(d^2x)^4$ etc. kann man nach den Cap. VII. §. 54. gegebenen Regeln a priori finden.

Beispiel 3. Es sei $y=(\cos z)^n$ nach aufsteigenden Potenzen von z zu entwickeln.

Wird $x=\cos z$ gesetzt, so ist $y=x^n$ und

$$\frac{dy}{dx}=nx^{n-1},\ \frac{d^2y}{dx^2}=n.n-1x^{n-2},\ \frac{d^3y}{dx^3}=n.n-1.n-2x^{n-3}\text{ etc.,}$$

$$dx=-\sin z dz,\ d^2x=-\cos z dz^2,\ d^3x=+\sin z dz^3\text{ etc.}$$

Für $z=0$ werden dx, d^3x, d^5x u. s. w. sämmtlich gleich Null, und es wird: $x=1$, $d^2x=-dz^2$, $d^4x=+dz^4$ u. s. w.

Ferner wird:

$$y=1,\ \frac{dy}{dx}=n,\ \frac{d^2y}{dx^2}=n.n-1,\ \frac{d^3y}{dx^3}=n.n-1.n-2\text{ etc.,}$$

also $y+\Delta y_z=(\cos z+dz)^n$ für $z=0$,

$$(\cos dz)^n=1-\frac{ndz^2}{2}+\frac{1}{2.3.4}(n+3.n.n-1)dz^4-\ldots$$

Für $n=1$ geht die frühere einfache Formel hervor:

$$\cos dz=1-\frac{dz^2}{2}+\frac{dz^4}{1.2.3.4}-\ldots$$

Diese Formel gilt für alle Werthe von n.

Beispiel 4. Es sei $y=\log\cos z$.

Wird $x=\cos z$ gesetzt, so ist $y=\log x$.

Nun ist:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x},\ \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{x^2},\ \frac{d^3y}{dx^3}=+\frac{2}{x^3}\text{ etc.}$$

$$dx=-\sin z dz,\ d^2x=-\cos z dz^2,\ d^3x=+\sin z dz^3\text{ etc.}$$

Für $z = 0$ wird $x = \cos z = 1$, $dx = 0$, $d^2x = -dz^2$, $d^3x = 0$, $d^4x = +dz^4$ etc., und $\frac{dy}{dx} = 1$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -1$, $\frac{d^3y}{dx^3} = +2$ etc.

Diese Werthe substituirt, geben für $z = 0$:

$$y + \Delta y = \log \cos dz = -\frac{1}{2}dz^2 - \frac{1}{3.4}dz^4 - \ldots$$

eine Formel, die sehr schnell convergirt, da $dz < \frac{1}{4}\pi$ genommen wird.

Sie ist dienlich, wenn man zum Behufe der Tafeln sogleich die Logarithmen des Cosinus statt des Cosinus selbst berechnen will. Doch giebt sie nur die natürlichen Logarithmen; will man die Logarithmen für die Grundzahl 10, so muss man die Reihe: $-\frac{1}{2}dz^2 - \frac{1}{3.4}dz^4 - \ldots$ durch A multipliciren. Berechnet man überdiess die trigonometrischen Functionen für einen Radius, dessen Logarithmus $= 10$ ist, was gewöhnlich geschieht, so ist die Formel demgemäss umzubilden.

Will man eine Formel für successive Berechnung der Logarithmen von Cosinus, etwa von Minute zu Minute des Bogens, so substituirt man statt $z = 0$ den Werth $z = \alpha$ in die allgemeine Formel $\log \cos (z + dz)$, und man findet dann, wenn man $\log \cos \alpha$ kennt, eine nach aufsteigenden Potenzen von dz geordnete, sehr convergirende Reihe für die Berechnung von $\log \cos (z + dz)$.

Zusatz. Es hält nicht schwer, für beliebige zusammengesetzte Functionen einer veränderlichen Grösse die entsprechenden Reihen aufzustellen. Es mögen daher die ausgeführten Beispiele genügen.

§. 85.

Die Maclaurin'sche Reihe für Functionen mehrerer veränderlichen Grössen.

In Cap. VIII. haben wir der Reihe nach die Formeln für Functionen mehrerer veränderlicher Grössen mit und ohne die nöthige Zahl von Bedingungs-Gleichungen gegeben, für entwickelte wie für unentwickelte Functionen.

Substituirt man in ihnen für die Veränderlichen x, y, z .. bestimmte Werthe α, β, γ .., so erhält man Theoreme nach der

Taylor'schen Substitution; substituirt man $x=0$, $y=0$, $z=0\ldots$, so erhält man Theoreme nach der Maclaurin'schen Substitution.

Diess führt zu eben so vielen, schönen und merkwürdigen Lehrsätzen, die man Andern als erst zu beweisende aufgeben kann, wenn man sie von der Wurzel ihrer Entwicklung abschneidet.

Es kommen dabei keine andern Schwierigkeiten vor, als die sich auch bei den einfachen Formeln finden, dass nämlich für bestimmte Werthe die Reihen unmöglich oder nicht convergent werden, und die Criterien, die für die einfachen Formeln gefunden worden sind, gelten auch für die zusammengesetzten, wobei sich von selbst versteht, dass sie den jedesmaligen Problemen angepasst werden müssen.

Wir schliessen daher diesen Abschnitt, indem wir das Weitere der vielen sich hier ergebenden Theoreme, die aber keine elementare, d. h. allgemeine Bedeutung haben, den singulären Untersuchungen über die Reihen überlassen.

Dass übrigens in allen diesen Anwendungen die Differenzialien durchaus als endliche und messbare Grössen genommen werden, dafür giebt selbst der gewöhnliche Differenzial-Calcul Zeugniss, indem er unbedenklich nach vollbrachten Substitutionen statt dx, dz . . die Grössen x, z, v . setzt, und z. B. statt

$$\cos dz = 1 - \frac{dz^2}{1.2} + \frac{dz^4}{1.2..4} - \ldots$$

schreibt:

$$\cos v = 1 - \frac{v^2}{1.2} + \frac{v^4}{1.2..4} - \ldots$$

Es könnten auch unbedenklich dx, dz . . stehen bleiben, wie in den obigen Untersuchungen hie und da geschehen ist. Die Zeichen x, z, v . . sind einfacher; diess ist ihr ganzer Unterschied von dx, dz u. s. w.

§. 86.

Der Moivre'sche Lehrsatz.

Dieser Lehrsatz ist mehr ein Lehrsatz der Goniometrie als des Differenzial-Calculs. Da uns jedoch die vorhergehenden Untersuchungen die Mittel gegeben haben, ihn nicht aus blosser

Induction, sondern allgemein zu beweisen, so kann er kurz erörtert werden.

1) Die Reihen für die Functionen: e^x, $\sin x$, $\cos x$ gelten allgemein für alle Werthe von x.

Entwickelt man diese Reihen für $e^{x\sqrt{-1}}$, $e^{-x\sqrt{-1}}$, so findet man:

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sin x\sqrt{-1};\quad e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sin x\sqrt{-1};$$

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2};\quad \sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Setzt man in $e^{x\sqrt{-1}}$ die Grösse $x = mu$, so wird:

$$e^{mu\sqrt{-1}} = \cos mu + \sin mu\sqrt{-1}.$$

Erhebt man $e^{u\sqrt{-1}} = \cos u + \sin u\sqrt{-1}$ zur Potenz m, so ist:

$$e^{mu\sqrt{-1}} = (\cos u + \sin u\sqrt{-1})^m.$$

Beide Ausdrücke einander gleichgesetzt, geben:

$$(\cos u + \sin u\sqrt{-1})^m = \cos mu + \sin mu\sqrt{-1},$$

welches der Moivre'sche Satz ist.

2) Entwickelt man das Binomium: $(\cos u + \sin u\sqrt{-1})^m$ und sammelt man alle reellen Grössen in den einen, alle imaginären in den andern Ausdruck, so sind die ersteren gleich $\cos mu$, die letzteren gleich $\sin mu\sqrt{-1}$, und es wird:

$$\cos mu = \cos u^m - \frac{m.m-1}{2}\cos u^{m-2}\sin u^2 + \frac{m.m-1..m-3}{1.2.3.4}\cos u^{m-4}\sin u^4 - \ldots$$

$$\sin mu = m\cos u^{m-1}\sin u - \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\cos u^{m-3}\sin u^3 + \frac{m.m-1..m-4}{1.2\ldots5}\cos^{m-5} u\sin u^5 - \ldots$$

3) Diese Formeln scheinen zwar allgemein richtig, allein sie haben ihre Schwierigkeiten. Denn ist $u = \pm\frac{1}{2}\pi = \pm\frac{3}{2}\pi$ etc., so wird $\cos u = 0$, und ist m eine negative oder gebrochene Zahl, so kommen Potenzen von $\cos u$ in den Nenner, und dadurch werden Glieder der Reihe unendlich gross.

Eben so wird für $u = 0$, $u = \pm\pi$ etc. die Grösse $\sin u = 0$, und es verschwinden alle Glieder, die $\sin u$ zum Factor haben,

so dass $cos\, mu = cos\, u^m$ und $sin\, mu = 0$ würde, was z. B. für $u = \pm \pi$ richtig ist, wenn m eine ganze Zahl ist, was aber offenbare Widersprüche giebt, wenn m eine gebrochene Zahl ist. Denn ist z. B. $mu = 1^0 = \frac{\pi}{180}$, dann ist für $u = \pi$, $m = \frac{1}{180}$, $cos\, u = -1$, und es würde folgen:

$$cos\, 1^0 = (-1)^{\frac{1}{180}} \quad \text{und} \quad sin\, 1^0 = 0,$$

Resultate, die doch offenbar beide ungereimt sind.

4) Mit diesen Schwierigkeiten hat sich La Grange in seinen Vorlesungen über die Theorie der Functionen ausführlich herumgeschlagen, ohne ganz Sieger zu bleiben. Sie sind Schwierigkeiten der Algebra und nicht der Differenzial-Rechnung. Die Wahrheit in dieser Sache ist kurz diese, dass die obigen Formeln nur *specielle Fälle* sind, und dass sie dann unbewusst verallgemeinert werden.

Denn $cos\, x + sin\, x \sqrt{-1}$ ist zwar gleich $e^{x\sqrt{-1}}$, jedoch $cos\, x + sin\, x \sqrt{-1}$ ist auch gleich: $cos\,(2\varkappa\pi + x) + sin\,(2\varkappa\pi + x)\sqrt{-1}$; aber dieser Ausdruck ist nicht unmittelbar gleich: $e^{(2\varkappa\pi + x)\sqrt{-1}}$, wenn man die Reihen festhält:

$$cos\,(2\varkappa\pi + x) = cos\, x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2..4}x^3 ..$$

$$sin\,(2\varkappa\pi + x) = sin\, x = x - \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1}{1.2..5}x^5 - ..$$

Gilt die Gleichung:

$$cos\,(2\varkappa\pi + x) + sin\,(2\varkappa\pi + x)\sqrt{-1} = e^{(2\varkappa\pi + x)\sqrt{-1}},$$

dann kann nicht:

$$cos\,(2\varkappa\pi + mx) + sin\,(2\varkappa\pi + mx)\sqrt{-1} = \left(cos\,(2\varkappa\pi + x) + sin\,(2\varkappa\pi + x)\sqrt{-1}\right)^m$$

gelten, sondern es wird:

$$cos\left(m(2\varkappa\pi + x)\right) + sin\left(m(2\varkappa\pi + x)\sqrt{-1}\right) = \left(cos\,(2\varkappa\pi + x) + sin\,(2\varkappa\pi + x)\sqrt{-1}\right)^m,$$

und nur wenn m eine *ganze* positive oder negative Zahl ist, kann man dafür setzen:

$$cos\,(mx) + sin\,(mx)\sqrt{-1} = (cos\, x + sin\, x\sqrt{-1})^m.$$

Ist aber z. B. m eine gebrochene Zahl, $= \frac{1}{r}$, dann wird:

$$\cos\left(\frac{2\varkappa\pi}{r} + \frac{x}{r}\right) + \sin\left(\frac{2\varkappa\pi}{r} + \frac{x}{r}\right)\sqrt{-1} =$$

$$= \left(\cos(2\varkappa\pi + x) + \sin(2\varkappa\pi + x)\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{r}},$$

und man darf nun nicht mehr dafür setzen:

$$\cos\frac{x}{r} + \sin\frac{x}{r}\sqrt{-1} = (\cos x + \sin x\sqrt{-1})^{\frac{1}{r}};$$

denn $\frac{2\varkappa\pi}{r}$ ist nicht nothwendig ein Vielfaches der Peripherie des Kreises.

Indem man diess unbewusst auf gebrochene m ausdehnt, begeht man den Fehler, dass man von zwei Gleichheiten auszugehen glaubt, die es doch nicht sind, da für $m = \pm\frac{\alpha}{\beta}$ die Ausdrücke:

$$\cos\left(m(2\varkappa\pi + x)\right) + \sin\left(m(2\varkappa\pi + x)\sqrt{-1}\right),$$

und $\cos(2\varkappa\pi + mx) + \sin(2\varkappa\pi + mx)\sqrt{-1}$

ganz verschiedene Werthe haben.

Zusatz. Es ist der Mühe werth, diesen Irrthum auch analytisch nachzuweisen.

La Grange (Vorlesung XI, 117.) sagt: „Die Gleichung

$$\cos mx + \sin mx\sqrt{-1} = (\cos x + \sin x\sqrt{-1})^m$$

gilt allgemein für jedes beliebige m, weil sie allgemein hervorgeht, wenn $e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sin x\sqrt{-1}$ zur Potenz m erhoben wird, und weil die Regeln der Potenzirung eben so wohl für gebrochene wie für ganze Zahlen gelten."

Der Schluss wäre richtig, wenn die Basis richtig wäre. Nun ist aber allgemein: $\sin x = \sin(2\varkappa\pi + x)$; $\cos x = \cos(2\varkappa\pi + x)$, also auch:

$$\cos m(2\varkappa\pi + x) + \sin m(2\varkappa\pi + x)\sqrt{-1} =$$

$$= \left(\cos(2\varkappa\pi + x) + \sin(2\varkappa\pi + x)\sqrt{-1}\right)^m$$

oder:

$$\cos(2m\varkappa\pi + mx) + \sin(2m\varkappa\pi + mx\sqrt{-1}) =$$

$$(1) \quad = \left(\cos(2\varkappa\pi + x) + \sin(2\varkappa\pi + x)\sqrt{-1}\right)^m$$

Nun ist aber auch:

$$(2) \quad \cos mx + \sin mx\sqrt{-1} = (\cos x + \sin x\sqrt{-1})^m$$

und Gleichungen (1) und (2) müssen mit einander bestehen.

Man kann nun immer statt $cos(2\varkappa\pi + x)$ und $sin(2\varkappa\pi + x)$ setzen $cos\,x$ und $sin\,x$, aber man darf nicht immer $cos\,mx$ statt $cos(2m\varkappa\pi + mx)$, und $sin\,mx$ statt $sin(2m\varkappa\pi + mx)$ setzen, wie sogleich deutlich wird, wenn man statt m z. B. den Werth $\frac{1}{\alpha\varkappa}$ substituirt, so dass $cos(2m\varkappa\pi + mx)$ in $cos\left(\frac{2\pi}{\alpha} + \frac{x}{\alpha\varkappa}\right)$, und $sin(2m\varkappa\pi + mx)$ in $sin\left(\frac{2\pi}{\alpha} + \frac{x}{\alpha\varkappa}\right)$ übergeht, wofür man nicht setzen darf: $cos\frac{x}{\alpha\varkappa}$, $sin\frac{x}{\alpha\varkappa}$.

Da nun Gleichungen (1) und (2) mit einander bestehen müssen, so gelten sie nicht allgemein, sondern nur für die Werthe von m, welche diess gemeinschaftliche Bestehen der beiden Gleichungen möglich machen, d. h. für ganze positive oder negative Werthe von m. Denn solche Werthe von m genügen beiden Gleichungen zugleich.

Man ging also von Einer Gleichung aus, während man von zwei Gleichungen hätte ausgehen sollen, und schloss von dem, was eine Gleichung erlaubt, auf das, was beide erlauben sollen, ohne auf die zweite Rücksicht zu nehmen. Daher kam der Irrthum, der nicht dem Calcul zur Last fällt. Er ist nicht eine Parodoxie des Calculs, sondern einfach ein Irrthum, ein Versehen.

Zusatz. Für ganze negative Werthe von m bleibt die Reihe gültig, obgleich sie für $u = \pm\frac{1}{2}\pi$ etc. unendlich grosse Glieder giebt. Sie wird darum nicht ungültig, sondern für solche Werthe von u bloss unbrauchbar.

§. 87.

Der Cotes'sche Satz.

1) Es ist allgemein, wenn m eine ganze Zahl ist:

$$2\cos x = e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}$$

und $$2\cos mx = e^{mx\sqrt{-1}} + e^{-mx\sqrt{-1}}.$$

Setzt man $e^{x\sqrt{-1}} = y$, so erhält man:

$$2\cos x = y + \frac{1}{y} \quad \text{und} \quad 2\cos mx = y^m + \frac{1}{y^m},$$

oder: (1) $y^2 - 2y\cos x + 1 = 0$, und

(2) $y^{2m} - 2y^m \cos mx + 1 = 0$.

Da beide Gleichungen zugleich stattfinden, so müssen sie auch die Wurzeln gemeinschaftlich haben, d. h. die zwei Wurzeln von Gleichung (1) sind zugleich zwei Wurzeln von Gleichung (2). Die Gleichung (2) hat aber $2m$ Wurzeln; welches sind die übrigen $2(m-1)$ Wurzeln?

2) Setzt man $mx = \varphi$, so wird:

(1) $y^2 - 2y\cos\frac{\varphi}{m} + 1 = 0$,

(2) $y^{2m} - 2y^m \cos\varphi + 1 = 0$.

Nun hat $\cos\varphi$ auch die Werthe:

$\cos\varphi$, $\cos(2\pi+\varphi)$, $\cos(4\pi+\varphi)\ldots$, $\cos\left(2(m-1)\pi+\varphi\right)\ldots$

Diese in (1) substituirt, geben:

$$y^2 - 2y\cos\frac{\varphi}{m} + 1 = 0,$$
$$y^2 - 2y\cos\frac{2\pi+\varphi}{m} + 1 = 0,$$
$$y^2 - 2y\cos\frac{4\pi+\varphi}{m} + 1 = 0,$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$y^2 - 2y\cos\frac{2(m-1)\pi+\varphi}{m} + 1 = 0.$$

Diese Werthe sind sämmtlich verschieden. Der nächste Werth, der folgen würde:

$$y^2 - 2y\cos\frac{2m\pi+\varphi}{m} + 1 = 0,$$

käme wieder auf den ersten zurück:

$$y^2 - 2y\cos\left(2\pi+\frac{\varphi}{m}\right) + 1 = 0 = y^2 - 2y\cos\frac{\varphi}{m} + 1 = 0.$$

Es sind also die m quadratischen Gleichungen:

$$y^2 - 2y\cos\frac{\varphi}{m} + 1 = 0,$$
$$y^2 - 2y\cos\frac{2\pi+\varphi}{m} + 1 = 0,$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$y^2 - 2y\cos\frac{2(m-1)\pi+\varphi}{m} + 1 = 0,$$

sämmtlich Gleichungen, die in $y^{2m} - 2y^m \cos\varphi + 1 = 0$ enthalten sind, da $y^{2m} - 2y^m \cos\varphi + 1 = 0$ allgemein:

$$y^{2m} - 2y^m \cos(2x\pi + \varphi) + 1 = 0$$

ist.

Jede dieser m quadratischen Gleichungen giebt aber zwei Wurzeln, es geben daher die m quadratischen Gleichungen die verlangten $2m$ Wurzeln der Gleichung:

$$y^{2m} - 2y^m \cos\varphi + 1 = 0.$$

Die gefundenen Werthe sind richtig, da in algebraischen Gleichungen der Exponent m eine ganze positive Zahl ist.

3) Wird $\varphi = 0$ gesetzt, so ist $\cos\varphi = 1$; wird $\varphi = \pi$ gesetzt, so ist $\cos\varphi = -1$, und $y^{2m} - 2y^m \cos\varphi + 1$ wird gleich

$$y^{2m} \mp 2y^m + 1 = (y^m \mp 1)^2,$$

und man findet die $2m$ Wurzeln der Gleichung $(y^m \mp 1)^2 = 0$ aus den ihnen entsprechenden m quadratischen Gleichungen.

4) Der Satz in dieser Einschränkung auf $\cos\varphi = \pm 1$ heisst der Cotes'sche Lehrsatz.

Cap. XII.

Maxima und Minima.

§. 88.

Allgemeine Erörterung.

Der singuläre Fall, dass das erste Differenzial einer Function gleich Null wird, führt zur Untersuchung über die Maxima und Minima einer Function.

Der Uebersichtlichkeit willen schicken wir eine allgemeine Erörterung der Theorie des Maximum und Minimum voraus.

Ist $u = fx$ gegeben, und bezeichnet u' den Werth von u, der entsteht, wenn x um dx vermehrt wird (also $u' = u + \Delta u$); bezeichnet hingegen u_1 den Werth von u, der entsteht, wenn x um dx vermindert wird, also $u_1 = (u - \Delta u_1)$, so hat man folgende Ausdrücke:

$$u_1 = u - du + \frac{1}{2}d^2u - \frac{1}{2.3}d^3u + \frac{1}{2.3.4}d^4u + \ldots$$

$$u = u,$$

$$u' = u + du + \frac{1}{2}d^2u + \frac{1}{2.3}d^3u + \frac{1}{2.3.4}d^4u + \ldots$$

Die beiden Werthe u_1 und u' unterscheiden sich nur in den Zeichen derjenigen Glieder, die ungerade Potenzen von dx enthalten.

Man kann nun der Grösse dx unendlich viele Werthe beilegen, welche bewirken, dass jedes vorhergehende Glied der Reihen, absolut genommen, grösser bleibt, als die Summe aller nachfolgenden Glieder, ohne dass darum dx selbst unendlich klein oder verschwindend genommen werden müsste.

Ist du absolut genommen positiv, so ist:

$$-du+\frac{1}{2}d^2u-\frac{1}{2.3}d^3u+\ldots$$

für entsprechende Werthe von dx eine negative Grösse $=-P$ (weil das Zeichen des ersten Gliedes das Zeichen der ganzen Reihe bleibt); eben so ist dann:

$$du+\frac{1}{2}d^2u+\frac{1}{2.3}d^3u+\ldots$$

eine positive Grösse $=+Q$ (weil das Zeichen des ersten Gliedes das Zeichen der ganzen Summe bleibt), und es ist $u_1=u-P$; $u=u$, $u'=u+Q$, d. h. $u_1<u$; $u'>u$, d. h. die Function nimmt zu von u_1 bis u und auch von u bis u'.

Ist hingegen du absolut genommen negativ, so ist aus gleichem Grunde: $u_1>u$ und $u'<u$, d. h. die Function nimmt ab von u_1 bis u und auch von u bis u'.

In diesen Fällen findet also in der Zunahme oder Abnahme einer Function für aufeinanderfolgende Werthe von x keine Unterbrechung statt, d. h. die Function hat weder ein Maximum noch ein Minimum.

Ist hingegen $du=0$, so kann d^2u absolut genommen entweder positiv oder negativ sein.

Ist d^2u positiv, so ist $u_1=u+R$ und $u'=u+S$, und es sind sowohl u_1 als u' grösser als u, d. h. die Function u nimmt bis zum Werthe x, der $du=0$ macht, fortwährend ab, und nimmt dann von diesem Werthe an wieder zu, u ist für diesen Werth von x ein Minimum.

Ist aber d^2u absolut genommen negativ, so ist $u_1=u-R$, $u'=u-S$; es sind sowohl u_1 als auch u' kleiner als u, d. h. die Function nimmt bis zu dem Werthe von x, der $du=0$ und $d^2u=-$ macht, fortwährend zu, und beginnt von diesem Werthe an wieder abzunehmen, die Function u ist ein Maximum.

Diess giebt eine eben so einfache als leichte Regel für die Bestimmung der Maxima und Minima einer Function. Man differenzirt die Function u, setzt $du=0$, sucht daraus die Werthe von x, und substituirt diese in das zweite Differenzial. Wird dieses für die substituirten Werthe positiv, so ist die Function für die gefundenen Werthe ein Minimum, wird es aber negativ, ein Maximum. Giebt die Gleichung $du=0$ mehrere Werthe von x,

so muss die Substitution in d^2u für alle gefundenen Werthe einzeln durchgeführt werden, damit man entscheiden könne, für welche Werthe Maxima und für welche Minima entstehen.

Der Calcul ist bekannt. Würde auch d^2u für die gefundenen Werthe gleich Null, so muss d^3u für die Werthe von $du = 0$ ebenfalls $= 0$ werden (weil die beiden Reihen u_1 und u' das Glied d^3u in verschiedenen Zeichen haben). Wird es nicht $= 0$, so ist es ein Zeichen, dass kein Maximum oder Minimum stattfindet. Wird es aber $= 0$, dann entscheidet das Zeichen von d^4u (das wieder in beiden Reihen gleich ist), ob ein Maximum oder ein Minimum stattfindet. Und so weiter.

Ganz analoge Betrachtungen gelten auch für die Functionen zweier oder mehrerer veränderlicher Grössen, die wir der Reihe nach untersuchen werden.

Ausserdem können neben einer Function von mehreren veränderlichen Grössen $u = f(x, y, z \ldots v, \omega)$, die in Bezug auf ein Maximum oder Minimum untersucht werden soll, noch Bedingungs-Gleichungen zwischen den Veränderlichen gegeben sein [höchstens $(n-1)$], wenn die Anzahl der Veränderlichen n ist. Die Regeln bleiben dieselben, und die Hilfsmittel des Calculs zur Auflösung solcher Probleme sind bekannt.

Zusatz 1. Werthe von x, die $du = \frac{1}{0} = \infty$ machen, können auch ein Maximum oder Minimum bestimmen.

Diess gehört zu den singulären Fällen $du = \infty$, auf die wir im nachfolgenden Abschnitte Rücksicht nehmen werden.

Hier ist es uns nur darum zu thun, in Erinnerung zu bringen, dass man die Untersuchungen über Maxima und Minima ausführen könne, ohne dass man auf unendlich kleine Grössen zurückgehen müsse. Freilich kommt man dabei meistens auf kleine Grössen von dx; allein diess liegt in der besondern Natur des Problems, denn es handelt sich um die Werthe, die der gegebenen Function zunächst vorhergehen und zunächst nachfolgen. Aber trotzdem bleibt dx eine endliche, messbare Grösse, ja es giebt nicht bloss einen, sondern unendlich viele endliche Werthe von dx, die dem Problem genügen, nämlich alle Werthe von $dx = 0$ bis $dx = \alpha$, wo α eine Grösse bezeichnet, die absolut genommen $du > \frac{1}{2} d^2u + \frac{1}{2.3} d^3u + \ldots$ macht, und diese Grösse α kann

nach der Theorie der Reihen berechnet werden. Würde z. B. $\alpha = 0{,}019r$ gefunden, so wird es Niemanden einfallen, zu behaupten, dass es nicht unendlich viele endliche und messbare Werthe gebe, die kleiner als $0{,}019r$ sind, und alle diese endlichen Werthe gelten für dx. — In diesem Sinne haben auch Euklid und Archimed von Grössen gesprochen, die kleiner genommen werden können, als jede gegebene noch so kleine endliche Grösse α, und es ist noch Niemanden eingefallen, von ihnen zu sagen, sie hätten mit unendlich kleinen oder verschwindenden Grössen im Sinne von Leibnitz oder Newton gerechnet.

Zusatz 2. Bei den Untersuchungen über Maxima und Minima muss man sich in Acht nehmen, dass man nicht constante Functionen veränderlicher Grössen, mit dem Maximum oder Minimum einer veränderlichen Function verwechselt. Denn auch die constanten Functionen haben das erste Differenzial $= 0$. Dasselbe gilt von Functionen, die an und für sich gleich Null sind, z. B. $f(x \ldots z) = 0$. Das Criterium ist, dass constante Functionen veränderlicher Grössen alle Differenzialien gleich Null haben, während diess beim Maximum oder Minimum nicht der Fall sein kann.

Ich würde diese Bemerkung nicht machen, wenn es nicht einigen Mathematikern, wie z. B. Dirksen, begegnet wäre, dass sie in ihren tiefsinnigen Untersuchungen über die Variations-Rechnung constante Functionen mit dem Maximum und Minimum einer veränderlichen Function verwechselt, und dadurch auch etwas herausgebracht haben, das an sich sehr ingeniös, aber doch von der Wahrheit verschieden ist.

Dieser Unterschied zwischen constanten Functionen und Maximum oder Minimum veränderlicher Functionen, ein Unterschied, der sehr gross ist, obgleich er in den Operationen des ersten Differenzials nicht hervortritt, ist bei der Bestimmung der Grenzwerthe der Variationen (im Variations-Calcul) von allgemeiner Wichtigkeit, und ist leider bisher allgemein übersehen worden. Denn selbst die scharfsinnigsten Mathematiker, La Grange und Euler, haben sich hierin verstrickt. Ich beschränke mich auf diese Bemerkung, da die Sache nicht den Differenzial-Calcul, sondern die Variations-Rechnung betrifft, und erst in dieser vollständig erläutert werden kann.

Was aber einigen Mathematikern, wie Dirksen und Ohm, begegnet ist, das darf kurz erörtert werden, schon darum, weil es zum Verständniss der Theorie beitragen wird.

§. 89.

Kritik und Zurückweisung der Fälle, die constante Functionen geben, also nicht zum Maximum und Minimum gehören.

Dirksen behandelt, gleich Andern, in seiner analytischen Darstellung der Variations-Rechnung §§. 42, 43. z. B. folgendes Problem als zur Theorie des Maximums und Minimums gehörend: „Unter allen Curven, welche durch einen gegebenen Punkt, dessen Coordinaten x und y sind, gehen, diejenige zu finden, in welcher die an diesem Punkte gezogene Tangente vor- und rückwärts verlängert, bis sie zwei auf der Axe errichtete, den Abscissen m und n entsprechende Senkrechte trifft, auf diesen Stücke abschneide, deren Product ein Maximum (oder Minimum) ist.“

Analytisch ausgedrückt (was uns hier allein angeht), ist die Formel des Problems:

$$P = \left(y + \frac{dy}{dx}(m-x)\right)\left(y + \frac{dy}{dx}(n-x)\right)$$

Wird dieser Ausdruck differenzirt, so erhält man:

$$dP = 0 = \left(dy + \frac{d^2y}{dx}(m-x) - dy\right)\left(y + \frac{dy}{dx}(n-x)\right) +$$
$$+ \left(y + \frac{dy}{dx}(m-x)\right)\left(dy + \frac{d^2y}{dx}(n-x) - dy\right)$$
$$= \frac{d^2y}{dx}\left(y(m+n-2x) + 2\frac{dy}{dx}(m-x)(n-x)\right) = 0,$$

was die zwei Factoren giebt:

$$(1) \quad \frac{d^2y}{dx} = 0,$$

$$(2) \quad y(m+n-2x) + 2\frac{dy}{dx}(m-x)(n-x) = 0.$$

Die Gleichung (1) giebt $\frac{d^2y}{dx} = 0$, $dy = Cdx$, $y = Cx + B$, welches die Gleichung einer geraden Linie ist. In der That erfüllt auch die gerade Linie diese Bedingung, da sie in allen Punkten

ihre eigene Tangente ist, so dass sie constante Stücke der Senkrechten, die auf der Axe errichtet sind, abschneidet.

Die Gleichung (2) giebt: $dy = \frac{(2x - m - n)ydx}{2(m-x)(n-x)}$.

Durch Integration (die wir hier in der Deduction eines Beispiels voraussetzen) findet man: $y^2 = k(x-m)(x-n)$, was die Gleichung der Ellipse oder Hyperbel ist, je nachdem k bestimmt wird.

Substituirt man die gefundenen Werthe in den Ausdruck P, so wird:

$$y + \frac{dy}{dx}(m-x) = \frac{y(n-m)}{2(n-x)} = \alpha,$$

$$y + \frac{dy}{dx}(n-x) = \frac{y(m-n)}{2(m-x)} = \beta,$$

und ihr Product:

$$\alpha\beta = P = -\frac{y^2(m-n)^2}{4(n-x)(m-x)} = -\frac{k}{4}(m-n)^2,$$

was doch offenbar eine constante Grösse ist.

Für den Kreis ist $k = -1$, $m = 2r$, $n = 0$, also $P = r^2$.

Diess ist eben nichts Merkwürdiges. Gerade Linien und Kegelschnitte haben die Eigenschaft, dass die Tangenten in allen ihren Punkten von den verlangten Senkrechten solche Stücke abschneiden, deren Product eine constante Grösse ist.

Merkwürdig ist nur, dass Dirksen und Andere durch einen Irrthum das zweite Differenzial der constanten Grösse P veränderlich finden, und da vom Maximum und Minimum reden, wo nur von Constanten die Rede sein kann.

Der Umstand, dass der Factor d^2y in dP ausfällt, was jene Mathematiker übersehen haben, verleitet sie, hier ein Variations-Problem zu wittern, wo doch nichts anders als ein Problem über constante Grössen gegeben ist. Davon kann sich Jeder selbst überzeugen. Er construire z. B. eine Ellipse, errichte an den Endpunkten der Axe senkrechte Linien auf diese, und ziehe an beliebigen Punkten der Ellipse Tangenten, so werden diese immer solche Stücke von jenen Senkrechten abschneiden, dass ihr Product constant und gleich b^2 ist, was auch bei der Tangente der Fall ist, die mit der Axe parallel ist. Es handelt sich hier nicht von einem Punkte, sondern von allen Punkten der Curve, und für alle Punkte ist das verlangte Product eine constante Grösse.

Ueberhaupt giebt es da keine Variations-Probleme, wo sie Dirksen und einige deutsche Mathematiker suchen; nur wo allgemeine Integral-Ausdrücke gegeben sind, treten diese schönen Probleme auf.

In dem gegebenen Falle zeigt diess schon die Auflösung an. Wie konnte es doch Dirksen entgehen, dass er gar nichts gefunden hat, indem ja alle Curven, die mit dem verlangten einzigen Punkte der Ellipse oder Hyperbel eine gemeinschaftliche Tangente haben (und solche Curven giebt es unendlich viele), ebenfalls die Eigenschaft haben würden, dass ihre gemeinschaftlichen Tangenten solche Stücke der zwei Senkrechten abschneiden, dass ihr Product eine constante Grösse, d. h. die nämliche Grösse, wie für die Ellipse oder Hyperbel ist, da ja die Tangente eine und die nämliche, allen tangirenden Curven gemeinschaftliche ist? Sucht man aber Curven, die für alle ihre Punkte Tangenten geben, die Stücke der Senkrechten abschneiden, so dass ihr Product ein Maximum oder Minimum ist, so hat die Aufgabe einen schönen Sinn, dann findet man Ellipse und Hyperbel, die aber nicht ein Maximum oder Minimum geben, sondern eine constante Grösse, die ebenfalls die Eigenschaft hat, dass ihr erstes Differenzial gleich Null ist. Aber ausser dem ersten sind noch alle übrigen Differenzialien gleich Null, was beim Maximum und Minimum nicht der Fall ist. So viel zur Abgrenzung und Ausscheidung der Probleme dieses Abschnitts.

Im Uebrigen sind die Probleme über Maximum und Minimum in jeder Theorie des Differenzial-Calculs so durchgearbeitet und so musterhaft geordnet, dass dieser Abschnitt zu den gediegensten der ganzen Wissenschaft gehört. Welche Ansicht auch einer jeden der verschiedenen Theorieen des Differenzial-Calculs zu Grunde liegen möge, so ist die Ausführung, was das bloss Technische des Calculs betrifft, in jeder eine vollkommene.

§. 90.

Maximum und Minimum für entwickelte Functionen *einer* veränderlichen Grösse.

Ist $y = fx$, so ist:

$$y + \Delta y = y + \frac{dy}{dx}dx + \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}dx^2 + \ldots$$

$$y - \Delta y_1 = y - \frac{dy}{dx}dx + \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}dx^2 - \ldots$$

Diejenigen Werthe von x machen die Function y zu einem Maximum oder Minimum, welche entweder $dy = 0$ oder $dy = \infty$ machen. Von dem Falle, dass $dy = \infty$ wird, wird später gehandelt werden.

Die Werthe von x, welche aus $dy = 0$ hervorgehen, geben ein Maximum, wenn für sie das zweite Differenzial d^2y negativ, und sie geben ein Minimum, wenn für sie das zweite Differenzial positiv wird. Ergiebt sich aber für die aus $dy = 0$ hervorgehenden Werthe von x auch $d^2y = 0$, so kann weder ein Maximum noch ein Minimum stattfinden, wenn für sie nicht auch $d^3y = 0$ wird. Ist diess aber der Fall, so geben sie ein Maximum oder ein Minimum, je nachdem d^4y für sie negativ oder positiv wird. U. s. w.

Beispiel. „Um ein cylindrisches Hohlmass von gegebenem cubischen Inhalte C mit dem geringsten Material-Aufwande herzustellen, muss die Oberfläche desselben ein Minimum werden. Welches muss seine Höhe sein?“

Bezeichnen wir den Radius der Grundfläche durch y, die Höhe durch x, so ist die ganze Oberfläche des Hohlmasses (1) $F = y^2\pi + 2xy\pi$, der cubische Inhalt: (2) $C = y^2x\pi$. Substituirt man aus (2) den Werth $x = \frac{C}{y^2\pi}$ in Gleichung (1), so wird:

$$F = y^2\pi + \frac{2C}{y},$$

$$dF = \left(2y\pi - \frac{2C}{y^2}\right)dy = 0,$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{C}{\pi}}.$$

Dieser Werth in $d^2F = \left(2\pi + \frac{4C}{y^3}\right)dy^2$ substituirt, macht d^2F positiv. Der gefundene Werth von x giebt also ein Minimum.

Zusatz. Den Werth $y = \sqrt[3]{\frac{C}{\pi}}$ in der Gleichung $C = y^2x\pi$ substituirt, giebt auch $x = \sqrt[3]{\frac{C}{\pi}}$, so dass die Höhe des Maasses gleich dem Halbmesser der Grundfläche sein muss.

§. 91.

Maximum und Minimum für entwickelte Functionen von zwei unabhängigen Veränderlichen.

Für solche Functionen $u = f(x, y)$ ist:

$$f(x+dx,\ y+dy) = u + \left|\frac{du}{dx}\right| dx + \left|\frac{du}{dy}\right| dy + \\ + \frac{1}{2}\left(\left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| dx^2 + 2\left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right| dx\,dy + \left|\frac{d^2u}{dy^2}\right| dy^2\right) + \ldots$$

$$f(x-dx,\ y+dy) = u - \left|\frac{du}{dx}\right| dx + \left|\frac{du}{dy}\right| dy + \\ + \frac{1}{2}\left(\left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| dx^2 - 2\left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right| dx\,dy + \left|\frac{d^2u}{dy^2}\right| dy^2\right) + \ldots$$

$$f(x+dx,\ y-dy) = u + \left|\frac{du}{dx}\right| dx - \left|\frac{du}{dy}\right| dy + \\ + \frac{1}{2}\left(\left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| dx^2 - 2\left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right| dx\,dy + \left|\frac{d^2u}{dy^2}\right| dy^2\right) + \ldots$$

$$f(x-dx,\ y-dy) = u - \left|\frac{du}{dx}\right| dx - \left|\frac{du}{dy}\right| dy + \\ + \frac{1}{2}\left(\left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| dx^2 + \left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right| dx\,dy + \left|\frac{d^2u}{dy^2}\right| dy^2\right) + \ldots$$

1) Damit u ein Maximum oder Minimum werde, muss

$$du = \left|\frac{du}{dx}\right| dx + \left|\frac{du}{dy}\right| dy = 0$$

sein. Es muss aber noch überdiess einzeln

$$\left|\frac{du}{dx}\right| = 0 \quad \text{und} \quad \left|\frac{du}{dy}\right| = 0$$

sein. Denn wäre diess nicht der Fall, so hätte man:

$$\left|\frac{du}{dx}\right| dx + \left|\frac{du}{dy}\right| dy = 0,$$

also:

$$dy = -\frac{\left|\frac{du}{dx}\right|}{\left|\frac{du}{dy}\right|} dx,$$

d. h. man hätte y als Function von x, was unmöglich ist, da x und y von einander unabhängige Variable sind.

2) Die beiden Gleichungen $\left|\frac{du}{dx}\right| = 0$, $\left|\frac{du}{dy}\right| = 0$ liefern die Werthe von x und y, die u zu einem Maximum oder Minimum machen.

3) Um entscheiden zu können, ob sie ein Maximum oder ob sie ein Minimum geben, substituirt man sie in d^2u. Machen sie d^2u positiv, so geben die gefundenen Werthe ein Minimum; machen sie d^2u negativ, so geben sie ein Maximum.

4) Es ist daher zu untersuchen, unter welchen Bedingungen die 4 Ausdrücke von d^2u, nämlich für $f(x \pm dx,\ y \pm dy)$ immer positiv oder immer negativ werden. Substituiren wir der Kürze halber statt der partiellen Differenzialien $\left|\frac{d^2u}{dx^2}\right|$, $\left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right|$, $\left|\frac{d^2u}{dy^2}\right|$ die Buchstaben A, B, C, so ist:

$$d^2u = A\,dx^2 \pm 2B\,dx\,dy + C\,dy^2.$$

Dieser Ausdruck ist in seinen Zeichen unbestimmt, da $\pm 2B\,dx\,dy$ entsteht, je nachdem man $(+dx, -dy)$, $(-dx, +dy)$, $(+dx, +dy)$, $(-dx, -dy)$ substituirt. Man muss daher die Gleichung so umbilden, dass die Grössen $\pm dx$, $\pm dy$ nur im Quadrat erscheinen, wodurch ihr Zeichen immer eines und dasselbe ist.

Es wird nun:

$$\frac{d^2u}{A} = dx^2 \pm 2\frac{B}{A}dx\,dy + \frac{C}{A}dy^2,$$

$$\frac{d^2u}{A} + \left(\frac{B^2}{A^2} - \frac{C}{A}\right)dy^2 = dx^2 \pm 2\frac{B}{A}dx\,dy + \frac{B^2}{A^2}dy^2$$

$$= \left(dx \pm \frac{B}{A}dy\right)^2,$$

$$\frac{d^2u}{A} = \left(dx \pm \frac{B}{A}dy\right)^2 + \left(\frac{AC}{A^2} - \frac{B^2}{A^2}\right)dy^2.$$

Das Quadrat $\left(dx \pm \frac{B}{A}dy\right)^2$ ist jederzeit positiv, man mag $dx = +$, $dx = -$, $dy = +$, $dy = -$ setzen; eben so bleibt dy^2 positiv, und d^2u bleibt positiv, wenn $\frac{AC}{A^2} - \frac{B^2}{A^2}$ positiv ist. Dieser Ausdruck bleibt aber positiv, wenn $A = +$, wenn $AC = +$, also $C = +$, und $AC > B^2$ ist.

Damit also u ein Minimum werde, müssen folgende Bedingungen erfüllt werden:

$$A = \left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| = +$$

$$C = \left|\frac{d^2u}{dy^2}\right| = +$$

$$\left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| \left|\frac{d^2u}{dy^2}\right| - \left(\left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right|\right)^2 = +$$

5) Um die Bedingung für das Maximum zu finden, untersucht man, in welchen Fällen: $(-d^2u)$ jederzeit positiv wird. Sind A und C negativ, so wird $(-d^2u) = \alpha dx^2 + B dx\,dy + \gamma dy^2$, worin $\alpha = -A$, $\gamma = -C$, und es ist nach den nämlichen Operationen, wie Oben:

$$\left(-\frac{d^2u}{\alpha}\right) = \left(dx \mp \frac{B}{\alpha} dy\right)^2 + \left(\frac{\alpha\gamma}{\alpha^2} - \frac{B^2}{\alpha^2}\right) dy^2.$$

Man mag nun der Reihe nach $dx = +$, $dx = -$, $dy = +$, $dy = -$ setzen, so ist $\left(dx \mp \frac{B}{\alpha} dy\right)^2$ jederzeit positiv, eben so auch dy^2, und es bleibt noch übrig, dass $\left(\frac{\alpha\gamma}{\alpha^2} - \frac{B^2}{\alpha^2}\right)$ positiv werde.

Dieser Ausdruck wird aber, da $\alpha = +$, $\gamma = +$ ist, jederzeit positiv, wenn $\alpha\gamma > B^2$ ist.

Daraus leiten sich für das Maximum folgende Regeln ab:

Damit $u = f(x, y)$ für $\left|\frac{du}{dx}\right| = 0$, und $\left|\frac{du}{dy}\right| = 0$ ein Maximum werde, müssen die Gleichungen stattfinden.

$$\left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| = -$$

$$\left|\frac{d^2u}{dy^2}\right| = -$$

$$\left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| \left|\frac{d^2u}{dy^2}\right| - \left(\left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right|\right)^2 = +$$

Zusatz. Findet auch nur eine der angegebenen Gleichungen für Maxima und Minima nicht statt, so geben die aus $\left|\frac{du}{dx}\right| = 0$ und $\left|\frac{du}{dy}\right| = 0$ gefundenen Werthe von x und y weder ein Maximum noch ein Minimum.

Beispiel. Es sei: $u = r^2x^2y^2 - x^4y^2 - x^2y^4$, so ist:

(1) $\left|\frac{du}{dx}\right| = 2r^2xy^2 - 4x^3y^2 - 2xy^4$,

(2) $\left|\frac{du}{dy}\right| = 2r^2x^2y - 2x^4y - 4x^2y^3$.

Setzt man diese Ausdrücke gleich Null, so wird:

(1) $r^2 = 2x^2 + y^2$,

(2) $r^2 = x^2 + 2y^2$,

und hieraus: $x = y = r\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Um entscheiden zu können, ob dieser Werth ein Maximum oder ein Minimum für u gebe, sucht man:

(3) $\left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| = 2r^2y^2 - 12x^2y^2 - 2y^4$,

(4) $\left|\frac{d^2u}{dy^2}\right| = 2r^2x^2 - 2x^4 - 12x^2y^2$,

(5) $\left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right| = 4r^2xy - 8x^3y - 8xy^3$,

Die Werthe $x = r\sqrt{\frac{1}{3}}$, $y = r\sqrt{\frac{1}{3}}$ in diese Gleichungen substituirt, geben:

(6) $\left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| = -\frac{8}{9}r^4$, also $= -$

(7) $\left|\frac{d^2u}{dy^2}\right| = -\frac{8}{9}r^4$, also $= -$

(8) $\left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right| = -\frac{4}{9}r^4$.

Die Gleichungen (6) und (7) zeigen ein Maximum an, da beide negative Werthe geben, und um entscheiden zu können, ob wirklich ein Maximum eintritt, untersucht man:

(9) $\left|\frac{d^2u}{dx^2}\right|\left|\frac{d^2u}{dy^2}\right| - \left(\left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right|\right)^2 = +\frac{16}{27}r^8$.

Da Gleichung (9) positiv ist, so tritt wirklich in der gegebenen Function u für $x = y = r\sqrt{\frac{1}{3}}$ ein Maximum ein.

Zusatz. Würde für die aus den Gleichungen $\left|\frac{du}{dx}\right| = 0$, $\left|\frac{du}{dy}\right| = 0$ gefundenen Werthe für x und y auch $d^2u = 0$, so müsste für sie auch $d^3u = 0$ werden, und dann könnte erst aus d^4u entschieden werden, ob die Function u ein Maximum oder ein Minimum sei. Diess führt jedoch zu solch verwickelten und weitläuftigen Gleichungen, dass wir sie in der allgemeinen Theorie übergehen und den singulären Untersuchungen über Maximum und Minimum überlassen können.

§. 92.

Maximum und Minimum für entwickelte Functionen mehrerer unabhängiger Variabeln.

Ist u eine Function von n unabhängig Veränderlichen: $u = f(x, y, .. z, v)$, so wird u ein Maximum oder Minimum, wenn folgende n Gleichungen stattfinden:

$$\left|\frac{du}{dx}\right| = 0, \quad \left|\frac{du}{dy}\right| = 0, .. \quad \left|\frac{du}{dz}\right| = 0, \quad \left|\frac{du}{dv}\right| = 0.$$

Diese n Gleichungen dienen zur Bestimmung der Werthe der n Variabeln, $(x, y .. z, v)$, die u zu einem Maximum oder Minimum machen.

Um dann entscheiden zu können, ob diese Werthe ein Maximum oder ob sie ein Minimum geben, substituirt man sie in d^2u. Wird d^2u unter allen Bedingungen, ob $\underline{+}\, dx$, $\underline{+}\, dy$, .. $\underline{+}\, dz$, $\underline{+}\, dv$ genommen werde, positiv, so ist u ein Minimum, ist aber d^2u negativ, so ist u ein Maximum.

Die Bedingungen, unter welchen d^2u immer das nämliche Zeichen erhält, sind den im vorhergehenden §. für zwei Veränderliche gefundenen analog; so hat man, wie bekannt, für drei Variable $u = f(x, y, z)$ (wobei die obern Zeichen für das Maximum, die untern für das Minimum gelten) folgende Bedingungs-Gleichungen:

$$\text{I.} \quad \left|\frac{du}{dx}\right| = 0, \quad \left|\frac{du}{dy}\right| = 0, \quad \left|\frac{du}{dz}\right| = 0.$$

$$\text{II.} \quad \left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| = \overline{+}, \quad \left|\frac{d^2u}{dy^2}\right| = \overline{+}, \quad \left|\frac{d^2u}{dz^2}\right| = \overline{+}.$$

$$\text{III.} \quad \left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| \cdot \left|\frac{d^2u}{dy^2}\right| - \left(\left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right|\right)^2 = +$$

$$\left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| \cdot \left|\frac{d^2u}{dz^2}\right| - \left(\left|\frac{d^2u}{dx\,dz}\right|\right)^2 = +$$

$$\left|\frac{d^2u}{dy^2}\right| \cdot \left|\frac{d^2u}{dz^2}\right| - \left(\left|\frac{d^2u}{dy\,dz}\right|\right)^2 = +$$

$$\text{IV.}\quad \left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| \cdot \left|\frac{d^2u}{dy^2}\right| \cdot \left|\frac{d^2u}{dz^2}\right| + 2\left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right| \cdot \left|\frac{d^2u}{dx\,dz}\right| \cdot \left|\frac{d^2u}{dy\,dz}\right| -$$

$$- \frac{d^2u}{dx^2}\left(\left|\frac{d^2u}{dy\,dz}\right|\right)^2 - \left|\frac{d^2u}{dy^2}\right|\left(\left|\frac{d^2u}{dx\,dz}\right|\right)^2 -$$

$$- \frac{d^2u}{dz^2}\left(\left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right|\right)^2 = \pm.$$

Zusatz. Für Functionen von 4, 5 und mehr Variable ist es zwar nicht schwierig, aber weitläuftig, die nothwendigen Bedingungs-Gleichungen herzustellen. Sie werden immer mehrere und complicirtere, und haben überdiess nur ein theoretisches Interesse.

§. 93.

Maxima und *Minima* einer Function *u*, wenn diese Function *unentwickelt* gegeben ist.

Es sei die unentwickelte Function gegeben:

$$P = f(u, x, y, \ldots z) = 0.$$

Man sucht diejenigen Werthe der unabhängigen Variabeln $x, y \ldots z$, die u zu einem Maximum oder Minimum machen.

Wird x um dx, y um dy, . . z um dz vermehrt, so geht u in $u + \Delta u$ über, und Δu wird:

$$\Delta u = du + \frac{1}{2}d^2u + \frac{1}{2.3}d^3u + \ldots$$

und (A) $$du = \left|\frac{du}{dx}\right| dx + \left|\frac{du}{dy}\right| dy + \ldots + \left|\frac{du}{dz}\right| dz.$$

Für ein Maximum oder Minimum gelten die Gleichungen:

(B) $$\left|\frac{du}{dx}\right| = 0, \quad \left|\frac{du}{dy}\right| = 0, \ldots \quad \left|\frac{du}{dz}\right| = 0.$$

Um diese Werthe zu finden, differenzirt man $P = 0$, und man erhält:

$$\left|\frac{dP}{du}\right| du + \left|\frac{dP}{dx}\right| dx + \left|\frac{dP}{dy}\right| dy + \ldots \left|\frac{dP}{dz}\right| dz = 0.$$

Substituirt man in diese Gleichung den Werth (A):

$$du = \left|\frac{du}{dx}\right| dx + \left|\frac{du}{dy}\right| dy + \ldots \left|\frac{du}{dz}\right| dz,$$

so erhält man:

$$\left(\left|\frac{dP}{du}\right| \cdot \left|\frac{du}{dx}\right| + \left|\frac{dP}{dx}\right|\right)dx + \left(\left|\frac{dP}{du}\right| \left|\frac{du}{dy}\right| + \left|\frac{dP}{dy}\right|\right)dy + \ldots$$

$$+ \ldots + \left(\left|\frac{dP}{du}\right| \cdot \left|\frac{du}{dz}\right| + \left|\frac{dP}{dz}\right|\right)dz = 0.$$

Da dx, dy, . . dz die Zunahmen der unabhängig Veränderlichen x, y, . . z sind, so sind die Coefficienten von dx, von dy und von dz einzeln gleich Null, also:

$$\left|\frac{dP}{du}\right| \left|\frac{du}{dx}\right| + \left|\frac{dP}{dx}\right| = 0, \quad \left|\frac{dP}{du}\right| \left|\frac{du}{dy}\right| + \frac{dP}{dy} = 0, \ldots.$$

$$\left|\frac{dP}{du}\right| \left|\frac{du}{dz}\right| + \frac{dP}{dz} = 0.$$

Sucht man aus diesen n Gleichungen die n Werthe (B): $\left|\frac{du}{dx}\right| = 0$, $\left|\frac{du}{dy}\right| = 0$, .. $\left|\frac{du}{dz}\right| = 0$, so erhält man folgende n Bedingungs-Gleichungen:

$$-\left|\frac{dP}{dx}\right| : \left|\frac{dP}{du}\right| = 0; \quad -\left|\frac{dP}{dy}\right| : \left|\frac{dP}{du}\right| = 0, \quad -\ldots$$

$$-\left|\frac{dP}{dz}\right| : \left|\frac{dP}{du}\right| = 0.$$

Aus diesen gefundenen n Gleichungen, deren Operationen sämmtlich ohne Schwierigkeit auszuführen sind, bestimmt man die n Werthe x, y . . z, welche die Function u zu einem Maximum oder Minimum machen.

Ob dann aber ein Maximum oder ein Minimum stattfinde, das hängt vom zweiten Differenzial d^2u ab. Die Untersuchung darüber ist dieselbe, wie in den vorhergehenden §§., da die Werthe $\left|\frac{du}{dx}\right|$, $\left|\frac{du}{dy}\right|$, . . $\left|\frac{du}{dz}\right|$ bekannt sind.

§. 94.

Maxima und Minima entwickelter Functionen zweier Variabeln $u = f(x, y)$, für welche noch eine unentwickelte Bedingungs-Gleichung $P = \varphi(x, y) = 0$ gegeben ist.

Denkt man die Bedingungs-Gleichung $P = 0$ aufgelöst, und den aus P gefundenen Werth von y in $u = f(x, y)$ substituirt,

so würde u als eine Function von nur einer Veränderlichen x erscheinen, und $du = 0$ gäbe die Werthe von x, die u zu einem Maximum oder Minimum machen. Diese Werthe in $P = 0$ substituirt, würden die entsprechenden Werthe von y geben.

Kann man aber die Bedingungs-Gleichung $P = \varphi(x, y) = 0$ nicht auflösen, so verfährt man auf folgende Weise.

1) Aus $u = f(x, y)$ folgt für ein Maximum oder Minimum:

$$(1) \quad du = \left|\frac{du}{dx}\right| dx + \left|\frac{du}{dy}\right| dy = 0.$$

Da x und y vermöge der Bedingungs-Gleichung $P = 0$ von einander abhängig sind, so sind nicht $\left|\frac{du}{dx}\right|$ und $\left|\frac{du}{dy}\right|$ einzeln gleich Null, sondern nur das ganze Differenzial du.

2) Um aus (1) die Grösse dy zu eliminiren, differenzirt man die Bedingungs-Gleichung $P = 0$ und erhält:

$$\left|\frac{dP}{dx}\right| dx + \left|\frac{dP}{dy}\right| dy = 0; \quad dy = -\left|\frac{dP}{dx}\right| dx : \left|\frac{dP}{dy}\right|$$

Diess in Gleichung (1) substituirt, giebt:

$$du = \left(\left|\frac{du}{dx}\right| - \left|\frac{du}{dy}\right| \left|\frac{dP}{dx}\right| : \left|\frac{dP}{dy}\right|\right) dx = 0,$$

also:
$$(2) \quad \left|\frac{du}{dx}\right| \left|\frac{dP}{dy}\right| - \left|\frac{du}{dy}\right| \left|\frac{dP}{dx}\right| = 0,$$

eine Gleichung, die mit der Bedingungs-Gleichung $P = 0$ verbunden, die Werthe von x und y giebt, die u zu einem Maximum oder Minimum machen.

3) Um entscheiden zu können, ob ein Maximum oder ein Minimum eintritt, differenzirt man:

$$du = \left(\left|\frac{du}{dx}\right| - \left|\frac{du}{dy}\right| \left|\frac{dP}{dx}\right| : \left|\frac{dP}{dy}\right|\right) dx.$$

Man findet das totale Differenzial d^2u, und sein positiver oder negativer Werth, nachdem die aus (2) für x und y gefundenen Werthe substituirt sind, zeigt an, ob ein Minimum oder ein Maximum stattfindet.

Zusatz. Bequemer zur Auffindung der gesuchten Werthe ist die sogenannte Multiplicatoren-Methode.

Bildet man die Gleichung (2) um:

$$\left|\frac{du}{dx}\right| : \left|\frac{dP}{dx}\right| = \left|\frac{du}{dy}\right| : \left|\frac{dP}{dy}\right|$$

und setzt jeden dieser zwei gleichen Ausdrücke $= -\alpha$, so wird:

$$\frac{du}{dx} = -\alpha\left|\frac{dP}{dx}\right|; \quad \left|\frac{du}{dy}\right| = -\alpha\left|\frac{dP}{dy}\right|.$$

oder $$\left|\frac{du}{dx}\right| + \alpha\left|\frac{dP}{dx}\right| = 0; \quad \left|\frac{du}{dy}\right| + \alpha\left|\frac{dP}{dy}\right| = 0.$$

Diese zwei Gleichungen sind aber die partiellen Differenzialien von der Function: $(u + \alpha P)$, das erstemal nach x und das zweitemal nach y differenzirt.

Daraus leitet sich folgende Regel ab:

Soll $u = f(x, y)$ ein Maximum oder Minimum sein, und soll zugleich die Bedingungs-Gleichung: $P = \varphi(x, y) = 0$ erfüllt werden, so setze man $(u + \alpha P)$ statt u, und behandle x und y als unabhängig Variable, bestimme dann $\left|\frac{d(u + \alpha P)}{dx}\right| = 0$ und $\left|\frac{d(u + \alpha P)}{dy}\right| = 0$, eliminire α aus den zwei gefundenen Differenzial-Gleichungen und suche aus der nun entstehenden Gleichung und aus $P = 0$ die Werthe x und y, die u zu einem Maximum oder Minimum machen.

Beispiel. Es sind die vier Seiten eines Vierecks gegeben; man soll die Winkel so bestimmen, dass der Inhalt ein Maximum werde.

Auflösung. Sind zwei Seiten a und b, und der von ihnen eingeschlossene Winkel x, die zwei andern Seiten: c und e und der von diesen eingeschlossene Winkel y, so ist die Bedingungs-Gleichung:

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos x = c^2 + e^2 - 2ce\cos y.$$

Der Inhalt des Vierecks ist $= \frac{1}{2}ab\sin x + \frac{1}{2}ce\sin y$.

Setzt man den doppelten Inhalt $= u$, so soll $u = ab\sin x + ce\sin y$ ein Maximum werden. Zugleich gilt die Bedingungs-Gleichung:

$$P = a^2 + b^2 - c^2 - e^2 + 2ce\cos y - 2ab\cos x = 0.$$

1) Nun ist:

$$du = ab\cos x\,dx + ce\cos y\,dy.$$

Aus $P = 0$ folgt:

$$2ab \sin x dx - 2ce \sin y dy = 0,$$

$$dy = \frac{ab \sin x}{ce \sin y} dx.$$

Diess in (1) substituirt, giebt:

$$du = \left(ab \cos x + \frac{ab \sin x \cos y}{\sin y}\right) dx = 0,$$

also: $$\sin y \cos x + \cos y \sin x = 0,$$

$$\sin (y + x) = 0, \text{ und } y + x = \pi.$$

Die Summe der beiden gegenüberliegenden Winkel des Vierecks ist demnach gleich zwei Rechten. Diess ist eine Eigenschaft des im Kreise beschriebenen Vierecks.

2) Zur Bestimmung der Winkel x und y nimmt man noch die Bedingungs-Gleichung:

$$P = a^2 + b^2 - c^2 - c^2 + 2ce \cos y - 2ab \cos x = 0$$
$$= a^2 + b^2 - c^2 - e^2 + 2ce \cos (\pi - x) - 2ab \cos x = 0,$$
$$\cos x = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - e^2}{2(ab + ce)}; \quad \cos y = \pi - \frac{a^2 + b^2 - c^2 - e^2}{2(ab + ce)}.$$

3) Diese Werthe geben ein Maximum.

Denn $du = ab\left(\cos x + \frac{\sin x \cos y}{\sin y}\right) dx$ giebt differenzirt:

$$d^2u = \left(-ab \sin x + ab \cos x \frac{\cos y}{\sin y}\right) dx^2 - ab \frac{\sin x}{\sin y^2} dx\, dy.$$

Den Werth $dy = \frac{ab \sin x}{ce \sin y} dx$ substituirt, giebt:

$$d^2u = ab\left(\frac{\cos x \cos y - \sin x \sin y}{\sin y}\right) dx^2 - \frac{a^2 b^2}{ce} \frac{\sin x^2}{\sin y^3} dx^2$$
$$= \frac{ab\, dx^2}{\sin y}\left(\cos (x + y) - \frac{ab}{ce}\left(\frac{\sin x}{\sin y}\right)^2\right)$$
$$= -\frac{ab\, dx^2}{\sin y}\left(+1 + \frac{ab}{ce}\left(\frac{\sin x}{\sin y}\right)^2\right)$$

ein Werth, der unter allen Bedingungen negativ ist, da a, b, c, e, $\sin y$ positive Grössen sind.

Zusatz. Dasselbe Problem nach der Methode der unbestimmten Multiplicatoren behandelt giebt:

$$\left|\frac{d(u+\alpha P}{dx}\right| = (ab\cos x + 2\alpha\, ab\sin x) = 0$$

$$\left|\frac{d(u+\alpha P}{dy}\right| = (ce\cos y - 2\alpha\, ce\sin y) = 0$$

Eliminirt man aus diesen zwei Gleichungen den unbestimmten Multiplicator α, so folgt die neue Gleichung:

$$ab\cos x + \frac{\cos y}{\sin y}\, ab\sin x = 0$$

$$\sin y\cos x + \cos y\sin x = 0$$

$\sin(y+x) = 0$, also $y + x = \pi$, wie Oben.

Das weitere Verfahren bleibt dann das nämliche.

§. 95.

Bestimmung der Maxima und Minima für eine Function u, die *unentwickelt* zugleich mit den Variabeln x, y gegeben ist, und für welche noch eine unentwickelte Bedingungs-Gleichung $P = \varphi(x, y) = 0$ gilt.

Wäre u entwickelt, und könnte man aus der Bedingungs-Gleichung $P = 0$ die Grösse y als Function von x geben, so würde man y in die Function u substituiren, und diese allein als Function von x haben, so dass $u = F(x)$ würde, woraus $du = 0$ leicht bestimmt werden könnte. Diese gesuchte Grösse du findet man nun vermittelst der partiellen Differenzialien.

Die Grösse u soll ein Maximum oder Minimum werden, und gegeben sind die Gleichungen:

$$Q = f(u, x, y) = 0,$$
$$P = \varphi(x, y) = 0.$$

Nun ist:

$$dQ = \left|\frac{dQ}{du}\right| du + \left|\frac{dQ}{dx}\right| dx + \left|\frac{dQ}{dy}\right| dy = 0,$$

also $$du = -\left|\frac{dQ}{dx}\right| dx : \left|\frac{dQ}{du}\right| - \left|\frac{dQ}{dy}\right| dy : \left|\frac{dQ}{du}\right|$$

und $du = 0$ (da u ein Maximum oder Minimum werden soll):

$$(\gamma)\quad du = 0 = \left|\frac{dQ}{dx}\right| dx + \left|\frac{dQ}{dy}\right| dy, \text{ und auch } dQ = 0 \quad (\delta).$$

Uebergehen wir die Gleichung (δ), so ist in (γ) die Grösse dy zu eliminiren. Diess geschieht durch Differenzirung der Bedingungs-Gleichung:

$$\left|\frac{dP}{dx}\right| dx + \left|\frac{dP}{dy}\right| dy = 0,$$

also: $$dy = - \left|\frac{dP}{dx}\right| dx : \left|\frac{dP}{dy}\right|$$

Der Werth dy substituirt, giebt:

$$du = 0 = \left|\frac{dQ}{dx}\right| \cdot \left|\frac{dP}{dy}\right| - \left|\frac{dQ}{dy}\right| \cdot \left|\frac{dP}{dx}\right| = 0.$$

Aus dieser Gleichung, in Verbindung mit der Bedingungs-Gleichung $P = 0$ werden die Werthe x und y gefunden, die u zu einem Maximum oder Minimum machen.

Die weitere Untersuchung wird dann wie in den vorhergehenden §§. geführt.

Zusatz 1. Auch hier kann man die Methode der Multiplicatoren anwenden, indem man

$$\left|\frac{dQ}{dx}\right| : \left|\frac{dP}{dx}\right| = \left|\frac{dQ}{dy}\right| : \left|\frac{dP}{dy}\right| = \alpha$$

setzt und dann genau wie im vorhergehenden §. verfährt.

Zusatz 2. Das vorhergehende Problem nach dieser Methode behandelt, giebt:

$$Q = ab \sin x + ce \sin y - u = 0,$$
$$P = a^2 + b^2 - c^2 - e^2 + 2ce \cos y - 2ab \cos x = 0.$$

Es wird:

$$\left|\frac{dQ}{dx}\right| = ab \cos x; \quad \left|\frac{dP}{dx}\right| = 2ab \sin x;$$
$$\left|\frac{dQ}{dy}\right| = ce \cos y; \quad \left|\frac{dP}{dy}\right| = -2ce \sin y,$$

und $du = 0 = \left|\frac{dQ}{dx}\right| \cdot \left|\frac{dP}{dy}\right| - \left|\frac{dQ}{dy}\right| \cdot \left|\frac{dP}{dx}\right|$ giebt:

$$-2ab\,ce \cos x \sin y - 2ab\,ce \cos y \sin x = 0,$$

oder $\sin(x + y) = 0$, $x + y = \pi$, wie Oben.

§. 96.

Maxima und Minima für Functionen von beliebig vielen Variabeln mit einer beliebigen Anzahl von Bedingungs-Gleichungen.

Es seien die Function u und n Variable $v, w, .. x, y, \eta .. z$ in einem unentwickelten Ausdruck gegeben:

$$Q = f(u, v, w .. x, y, \eta .. z) = 0,$$

und $(n - m)$ Bedingungs-Gleichungen:

$$A = \varphi(v, w .. x, y, \eta .. z) = 0,$$

$$B = \psi(v, w .. x, y, \eta ... z) = 0,$$

etc.

Ist $m = 1$, so bleibt im Ausdruck Q nur eine einzige Veränderliche v unabhängig veränderlich, alle übrigen werden vermöge der $n - 1$ Bedingungs-Gleichungen abhängig veränderlich.

Ist $m = m$, so bleiben m Variable unabhängig veränderlich. Diese m unabhängig Veränderlichen seien: $y, \eta .. z$. Alle übrigen Grössen von v bis x sind abhängig veränderlich.

Könnte man die $(n - m)$ Bedingungs-Gleichungen $A = 0$, $B = 0$ etc. auflösen, so würde man die $(n - m)$ Veränderlichen $v, w .. x$ in Q eliminiren, und es bliebe noch $Q = F(u, y, \eta .. z) = 0$, und die Grössen $y, \eta .. z$ wären unabhängig veränderlich. Für u soll nun ein Maximum oder Minimum gesucht werden.

Es ist:

$$dQ = \left|\frac{dQ}{du}\right| du + \left|\frac{dQ}{dy}\right| dy + \left|\frac{dQ}{d\eta}\right| d\eta + .. \left|\frac{dQ}{dz}\right| dz = 0$$

und $$- \left|\frac{dQ}{du}\right| du = \left|\frac{dQ}{dy}\right| dy + \left|\frac{dQ}{d\eta}\right| d\eta + .. \left|\frac{dQ}{dz}\right| dz = 0,$$

(für $du = 0$, was eintritt, da u ein Maximum oder Minimum werden soll).

Da die Grössen $y, \eta .. z$ unabhängig veränderlich sind, so folgt:

$$\left|\frac{dQ}{dy}\right| = 0, \left|\frac{dQ}{d\eta}\right| = 0, .. \left|\frac{dQ}{dz}\right| = 0.$$

Diese m Gleichungen in Verbindung mit den $(n - m)$ Bedingungs-Gleichungen: $A = 0$, $B = 0$ etc. bestimmen die Werthe der

n Grössen: v, w . . x, y, η . . z, für welche u ein Maximum oder Minimum wird.

Die Oben verlangte Elimination der Variabeln v, w . . . x gelingt durch die partielle Differenzirung.

Es ist:

$$dQ = \left|\frac{dQ}{du}\right| du + \left|\frac{dQ}{dv}\right| dv + \left|\frac{dQ}{dw}\right| dw + .. + \left|\frac{dQ}{dx}\right| dx +$$
$$+ \left|\frac{dQ}{dy}\right| dy + \left|\frac{dQ}{d\eta}\right| d\eta + .. + \left|\frac{dQ}{dz}\right| dz = 0.$$

Ausserdem geben noch die $(n - m)$ Bedingungs-Gleichungen:

$$dA = \left|\frac{dA}{dv}\right| dv + \left|\frac{dA}{dw}\right| dw + .. \left|\frac{dA}{dx}\right| dx + \left|\frac{dA}{dy}\right| dy + .. \left|\frac{dA}{dz}\right| dz = 0$$

$$dB = \left|\frac{dB}{dv}\right| dv + \left|\frac{dB}{dw}\right| dw + .. \left|\frac{dB}{dx}\right| dx + \left|\frac{dB}{dy}\right| dy + .. \left|\frac{dB}{dz}\right| dz = 0$$

u. s. w.

Diese Gleichungen sind in Bezug auf die $(n - m)$ Grössen dv, dw, . . dx sämmtlich vom ersten Grade, es können daher die Werthe dv, dw . . dx durch sie bestimmt werden. Werden nun die für dv, dw . . dx gefundenen Werthe in $dQ = 0$ substituirt, so enthält dQ nur noch die Differenzialien du, dy, $d\eta$ . . dz, und dQ wird von der Form:

$$dQ = \left|\frac{dQ}{du}\right| du + Kdy + Ld\eta + . . Mdz = 0.$$

Daraus findet man für $du = 0$, da dy, $d\eta$ . . dz sämmtlich von einander unabhängig sind: $K = 0$, $L = 0$ . . $M = 0$.

Diese m Gleichungen in Verbindung mit den $(n - m)$ Bedingungs-Gleichungen bestimmen die Werthe der n Variabeln v, w . . x, y, η . . z, welche u zu einem Maximum oder Minimum machen.

Die weitern Untersuchungen über das Zeichen des zweiten Differenzials d^2u werden dann wie in dem vorhergehenden §. fortgeführt.

Und hiemit sind alle Fälle über Maxima und Minima der Functionen erledigt.

Cap. XIII.

Fälle, in welchen die Differenzialien die Form $\alpha + \frac{\beta}{0} = \infty$ annehmen.

§. 97.

Allgemeine Uebersicht.

Es ist schon im Vorhergehenden auseinandergesetzt worden, wann und unter welchen Bedingungen die Fälle eintreten, dass einzelne oder mehrere Differenzialien der allgemeinen Reihe $(y+\Delta y)$ unendlich gross werden. Diess tritt ein, wenn bestimmte Werthe für die veränderlichen Grössen in die Reihe substituirt, der ursprünglichen Function eine Form geben, in der sie nicht mehr nach ganzen positiven Potenzen entwickelt werden kann, z. B. $\frac{1}{x}$, $log\, x$, $cotg\, x$ und dergleichen.

Das hat nichts Auffallendes. Das Gegentheil müsste vielmehr auffallen, wenn der Differenzial-Calcul die Macht hätte, Functionen nach ganzen positiven Potenzen zu entwickeln, von denen man wüsste, dass sie nicht nach ganzen positiven Potenzen entwickelt werden können. Dann würde der Differenzial-Calcul ganz gewiss falsche Resultate geben. So aber, da er diese Fälle von sich ausscheidet, zeigt er an, dass er die Macht habe, die Wahrheit unter jeder Gestalt zu geben, sei es, dass die Resultate den ihm eigenthümlichen Operationen angemessen, sei es, dass sie ihnen unangemessen, also auf andere Art zu eruiren sind. Indem er nun die letztern ausscheidet, deutet er an, dass sie nicht durch seine Operationen, sondern durch andere Operationen zu gewinnen sind.

Diess ist ein hoher Vorzug des Calculs, und es ist sehr zu bedauern, dass La Grange, wohl der tiefsinnigste Forscher und Förderer der Analysis, von diesen Fällen den unangemessenen Ausdruck gebraucht hat: „Fälle, in denen der allgemeine Calcul falsch ist“ (est en defaut).

Die ganze Sache beruht auf einem Missverständnisse von Seite der Mathematiker; der Calcul selbst hat keine Schuld daran. Geschichtlich hatte man nämlich die Differenzialien früher als die Taylor'sche und Maclaurin'sche Reihe, während systematisch die Taylor'sche Reihe hätte vorausgehen sollen. Da man nun die Differenzial-Operationen unbedingt nahm, wie sie auch wirklich unbedingt gelten, so war man nicht wenig erstaunt, als man bei ihrer Anwendung auf die Maclaurin'sche Reihe fand, dass es viele Fälle gebe, in denen die Differenzial-Operationen die gesuchten Reihen nicht liefern, und diess tritt ein, so oft ein Glied der Reihe unendlich gross, und überdiess, so oft die Reihe divergent wird.

Soll man nun auch die Differenzial-Operationen in die Grenzen einschliessen, in die man die Reihen einschliesst, indem man für diese Criterien der Möglichkeit ihrer Entwicklung und Criterien der Convergenz aufstellt? Thut man diess, so verlieren die Differenzial-Operationen den Charakter ihrer Allgemeingültigkeit und sind überall zweifelhaft, bis die nöthigen Voruntersuchungen gemacht sind; sie verlieren dadurch all ihren Werth und all ihre Bedeutung und ihre allgemeine Anwendbarkeit.

So lange man es hier nicht zu klaren Begriffen bringt, so lange man sich mit unendlichkleinen Grössen, oder mit Grenzwerthen begnügt, so lange geht auch diese Unbestimmtheit mit den andern Unbestimmtheiten hin, und man lavirt durch den Calcul, so gut man kann, indem man es nimmt, wie man es eben braucht. Braucht man die Ausdrücke ohne Voruntersuchung, wie z. B. in den allgemeinen Integral-Gleichungen, so nehmen sie auch die bedenklichsten Critiker allgemein an, ohne Bedenken und mit grossem Danke; bekommen sie aber wieder Fahrwasser der Critik, dann wird auf den Calcul losgezogen, und Einschränkung über Einschränkung gemacht. Das ist der Zustand der Wissenschaft.

Was ist nun hier zu thun? Hätte der Differenzial-Calcul nur die Aufgabe, Reihen-Entwicklungen für die Functionen zu geben, so wäre leicht geholfen, man würde ihn einschränken und den Criterien unterwerfen, die für die Reihen gelten. Aber die Reihen-Entwicklung ist nur eine ganz untergeordnete Anwendung der Differenzial-Operationen; das bei weitem Wichtigste sind die Differenzialien selbst, und die neuen Functionen, die sie geben, die Integral-Ausdrücke, zu denen sie leiten, und diese leiden keinerlei Einschränkungen, welche ohnehin bei ihnen nur illusorisch sein könnten.

Ich will die Sache durch ein Beispiel verdeutlichen, da es bei Beispielen erlaubt ist, der spätern Entwicklung vorzugreifen. Denken wir uns einen Kreis, dessen Gleichung $y^2 = 2rx - x^2$ ist, und einen Punkt in der Abscissen-Axe, für welchen die Abscisse gleich $\frac{1}{2}r$ ist. Dieser Abscisse entspricht eine reelle Ordinate des Kreises. Wird nun x um dx vermehrt, so bleibt die der Abscisse $(x + dx)$ entsprechende Ordinate $(y + \Delta y)$ reell, so lange $x + dx$ nicht grösser als $2r$ ist. Wird nun $x = \frac{1}{2}r$, $dx = 2r$ gesetzt, so muss die Ordinate $(y + \Delta y)$ imaginär werden, da der Kreis eine geschlossene Curve ist, deren grösste Abscisse gleich $2r$ sein kann. Analytisch drückt sich diess so aus, dass die Reihe für $(y + \Delta y)$, wenn hier $dx > \frac{3}{2}r$ ist, divergent wird.

Obgleich nun hier Werthe von $dx > \frac{3}{2}r$ zur Reihen-Entwicklung $(y + \Delta y)$ unbrauchbar sind, so gelten sie doch für die einzelnen Glieder der Reihe, für dy einzeln, für d^2y einzeln u. s. w. Denn wir werden sehen, dass dy die Ordinate der Tangente des Kreises für den Punkt $x = \frac{1}{2}r$ ist, und diese Tangente hat reelle Ordinaten nicht bloss für $dx = 2r$, sondern für jeden beliebigen Werth von dx. Eben so ist der Ausdruck: $dy + \frac{1}{2}d^2y$ die Ordinate der tangirenden Parabel des Kreises, und diese Parabel hat reelle Ordinaten für jeden Werth von dx. Und so verhält es sich auch mit den nachfolgenden Differenzialien.

Dass diess so sei, ist im Vorhergehenden bewiesen worden. Denn dy enthält zwei Factoren $f'x$ und dx, und $f'x$ bleibt dieselbe

Grösse, wie gross oder wie klein dx genommen werden möge, und ist $dy = f'x\,dx$ richtig für Werthe von dx, welche die Reihe Δy convergent machen, so ist es auch richtig für *alle* Werthe von dx, da durch Veränderung der Werthe von dx der Factor $f'x$ nicht verändert wird. Weil man durch die Differenzialien einzeln zu neuen Functionen kommt, z. B. von der Ordinate aus zur Subtangente, zur Subnormale, zum Krümmungshalbmesser etc., so wird man wohl auch fragen dürfen, für welche Werthe der Abscisse oder Normale diese neuen Functionen eine bestimmte Grösse haben, für welche sie gleich Null, für welche sie unendlich gross werden, so dass selbst einzelne Glieder der Reihe Δy unendlich gross sein können, während die ganze Reihe Δy endlich bleibt. In diesem Falle muss eben die untergeordnete Reihe Δy nicht aus den Differenzialien, sondern auf die gewöhnliche Art berechnet werden.

Eine zweite Schwierigkeit ist, dass es Functionen giebt, die nicht nach ganzen positiven Potenzen von dx entwickelt werden können, für die also die Differenzialien, die nur ganze Potenzen von dx haben, nicht gelten. Auch diese Schwierigkeit ist schon gelöst. Denn kann zwar $\frac{1}{x}$, $log\,x$, $cotg\,x$, etc. nicht nach ganzen Potenzen von x entwickelt werden, so kann diess doch mit $\frac{1}{x+dx}$, $log\,(x+dx)$, $cotg\,(x+dx)$ oder $\frac{1}{a+dx}$, $log\,(a+dx)$, $cotg\,(a+dx)$ geschehen, und es ist z. B. $d\,log\,x = \frac{dx}{x}$. Setzt man nun freilich $x = 0$, dann wird $d\,log\,x = \infty$, während $\Delta y = log\,dx$ eine endliche Grösse ist, die man jedoch in diesem Falle anderswie und nicht aus der Differenzial-Reihe berechnen muss.

Weit entfernt, dass diess ein Mangel des Calculs ist, ist es vielmehr der höchste Vorzug desselben.

Was wäre das für ein Calcul, der z. B. die Tangente endlich gross geben würde, wo sie wirklich unendlich gross ist, oder der den Radius Curvaturae der Maclaurin'schen Reihe zu Gefallen endlich gross gäbe, wo er wirklich unendlich wird, wie im Inflexionspunkte der Curven? Was wäre das für ein Calcul, der z. B. der tangirenden Ebene an der Spitze eines Kegels eine bestimmte Lage anwiese, wo sie doch vielleicht gar keine solche bestimmte Lage haben kann? Ein Calcul, der nicht andeuten würde, wo vorspringende

Punkte, wo Umwendungspunkte, wo Gräten der Flächen u. s. w. sind?

Man muss daher in scharfer Erkenntniss Folgendes trennen.

a) Die Differenzialien gelten einzeln ganz allgemein, für alle Werthe der in ihnen enthaltenen Grössen.

b) Werden sie für bestimmte Werthe gleich Null, oder unendlich, oder unbestimmt, so geben sie singuläre Werthe der von ihnen abhängigen Functionen, und lösen gerade dadurch Schwierigkeiten, denen man auf andere Art nicht beikommen könnte.

c) Will man sie zur Summirung von Reihen benützen (eine untergeordnete Anwendung), so muss man in:

$$\Delta y = dy + \frac{1}{2}d^2y + \frac{1}{2.3}d^3y + \ldots$$

$$\Delta y = f'x dx + \frac{1}{2}f''x dx^2 + \ldots$$

allerdings die Regeln der Convergenz der Reihen befolgen, also $f'x$ etc. und dx so nehmen, dass Δy eine endliche Summe giebt. Aber die Differenzialien werden nur zu diesem Behufe, dass man eine brauchbare Reihe habe, den Regeln der Convergenz der Reihen unterworfen, an und für sich selbst geben sie für die von ihnen einzeln abhängigen neuen Functionen ohne alle Einschränkung die richtigen Werthe.

Das Differenziren ist eine nach Regeln bestimmte Operation, gerade wie Addition, Subtraction, Multiplication, Division u. s. w. Es wird gewiss Niemand darüber im Unklaren sein, dass die Gesetze der Addition, Subtraction etc. schlechthin allgemein gelten. Und dennoch geben Reihen, die nicht convergiren, obgleich ihre Glieder nach den Gesetzen der Addition und Subtraction verbunden sind, keine brauchbaren Resultate. Wer wird nun hier sagen: die Gesetze der Addition und Subtraction gelten nur dann, wenn sie in solchen Reihen brauchbare Resultate liefern? Gewiss wird Jeder einsehen, dass dann nur die an sich allgemein richtigen Operations-Gesetze mit ihrer Anwendung auf Reihen verwechselt würden. Ganz dasselbe findet auch statt, wenn die an sich allgemein richtigen Differenzial-Operationen mit ihren Anwendungen auf Reihen verwechselt werden. La Grange hätte eben so gut einen Abschnitt der Functionen-Rechnung schreiben können, der

den Titel führte: „Fälle, in denen die Gesetze der Addition und Subtraction falsche Resultate geben“ — nur würde der Irrthum der Verwechslung weit früher aufgefallen und auch früher berichtigt worden sein.

Nach dieser Erläuterung gehen wir zu den Fällen über, in denen $dy = \infty$ wird.

§. 98.

Das Differenzial: $dy = \infty$.

Wenn das erste Differenzial einer Function einen singulären Werth, $dy = 0$ oder $dy = \infty$, erhält, so steht das immer in irgend einem Zusammenhang mit dem Maximum oder Minimum der Function y. Denn das Zeichen des ersten Differenzials entscheidet für beliebig kleine Werthe von dx für das Zeichen der ganzen Reihe Δy, und das erste Glied dy hat verschiedene Zeichen, je nachdem $\pm dx$ in $f(x)$ genommen wird. Das zweite Glied hingegen hat das nämliche Zeichen, ob $+dx$ oder ob $-dx$ genommen wird. Wird nun das erste Differenzial dy gleich Null oder gleich unendlich, so ist es ein Beweis, dass eine Unterbrechung im Wachsthum oder in der Abnahme der Function eintritt, d. h. dass ein Maximum oder ein Minimum stattfindet.

Es bildet sich daher folgende Regel:

Um über das Maximum oder Minimum einer Function entscheiden zu können, setze man $dy = 0$ und $dy = \infty$ und suche aus diesen Gleichungen die entsprechenden Werthe von x. Die Fälle für $dy = 0$ sind bereits untersucht, es bleibt noch übrig, $dy = \infty$ zu untersuchen.

Beispiel. $y = 1 - \sqrt[3]{(1-x)^2}$, also:

$$dy = \frac{2}{3} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}.$$

Die Gleichung $dy = 0$ giebt keinen Werth von x, wohl aber die Gleichung $dy = \infty$, d. h. $\sqrt[3]{(1-x)} = 0$.

Diess giebt $x = 1$.

Um nun entscheiden zu können, ob ein Maximum oder ein Minimum gefunden sei, kann man nicht zum zweiten Differenzial übergehen, weil das Zeichen des zweiten Differenzials gegen das erste Differenzial, das selber unendlich gross ist, nichts entscheidet.

Man verfährt daher, zur niedern Analysis zurückkehrend, auf folgende Weise:

Man substituirt den aus $dy = \infty$ gefundenen Werth von x in die gegebene Function y. Und dann substituirt man die zunächst grösseren und zunächst kleineren Werthe von x. Aus den Resultaten, die für y hervorgehen, entscheidet man dann, ob ein Maximum oder ein Minimum oder keines von beiden stattfindet.

In unserm Beispiele ist: $y = 1 - \sqrt[3]{(1-x)^2}$.

Für den gefundenen Werth: $x = 1$, wird $y = +1$.

Substituirt man $x < 1$, so wird $(1-x)^2$ positiv, also auch $\sqrt[3]{(1-x)^2}$ positiv, und $y = 1 - \sqrt[3]{(1-x)^2}$ wird < 1.

Substituirt man $x > 1$, so wird $(1-x)^2$ positiv, also wird auch $y = 1 - \sqrt[3]{(1-x)^2}$ kleiner als 1. Der Werth $x = 1$ giebt daher ein Maximum der Function y.

Ausserdem lernt man daraus, dass, wenn die gegebene Function die Coordinaten-Gleichung einer Curve ist, für den Werth $x = 1$ der singuläre Werth: $dy = \infty$ hervorgehe, und dass hier die Curve eine gegen die Abscissen-Axe senkrecht stehende Spitze habe, wie wir bei den geometrischen Untersuchungen sehen werden.

Zusatz. Die bei Weitem wichtigsten Momente der Werthe $dy = \infty$, $d^2y = \infty$ etc., die alle, einzeln genommen, besondere Schwierigkeiten an's Tageslicht bringen und aufhellen, ergeben sich erst bei der Anwendung auf Geometrie und Mechanik. Dort haben die Untersuchungen mehr greifbare Anhaltspunkte.

§. 99.

Weitere Angriffe gegen den Differenzial-Calcul.

Die von La Grange erhobenen Schwierigkeiten sind im Vorhergehenden gelöst. Sie entspringen daraus, dass er den Calcul und seine Anwendungen verwechselt. Der Calcul ist etwas anderes, als seine Anwendung auf Reihen-Summirung. Die Criterien der Entwicklung in Reihen und die Criterien der Convergenz treffen nicht den Calcul, sondern die Reihen. Es ist gerade so, als wenn man den Calcul mit den geometrischen Anwendungen verwechseln wollte. In der Geometrie der Linien müssen z. B. alle Differenzialien ebenfalls Linien sein, diess verlangt und giebt der Gegenstand,

auf welchen der Calcul angewendet wird. Wenn diess nun Einer verwechselte und ausspräche: der Differenzial-Calcul ist falsch in allen den Fällen, in welchen die Differenzialien nicht Linien sind, so würde er gewiss irren, und man würde ihm antworten, dass er den Calcul und seine Anwendung auf Geometrie verwechsle. Diess antwortet man auch denen, welche den Calcul und seine Anwendung auf Reihen verwechseln. Die Reihen verlangen die Bedingungen der Convergenz etc., nicht der Calcul, so wie die Geometrie und nicht der Calcul die Bedingung verlangt, dass die Differenzialien Linien (oder Flächen und Körper) sind.

Jedoch der Vorgang eines so grossen Mathematikers, wie La Grange war, hat auch Andere gereizt, und es ist fast Methode geworden, dass Jeder den Calcul meistern und an ihm zum Ritter werden will. Es ist diess eine Verwechslung des subjectiven Zustandes eines Jeden mit der objectiven Wahrheit, welche der Calcul selber ist.

Um hier nicht weitläufig zu werden, wähle ich nur ein Beispiel; ich untersuche, was der sonst so vortreffliche Cauchy in seiner zehnten Vorlesung über die Differenzial-Rechnung urgirt hat, und diess nur desswegen, weil Cauchy der hervorragendste der Mathematiker ist. Cauchy sagt am Ende seiner X. Vorlesung: „Man könnte glauben, dass die (aus dem Differenzial-Calcul hervorgehende) Maclaurin'sche Reihe:

$$f(x+dx) = fx + dfx + \frac{1}{2}d^2fx + \ldots$$

(worin, $x = 0$ gesetzt, hervorgeht)

$$f(dx) = f(0) + df(0) + \frac{1}{2}d^2f(0) + \ldots$$

wenn ihre aufeinanderfolgenden Glieder verschwinden, auch ihre Function $f(dx)$ verschwinden mache. Diese Erwartung wird nicht immer erfüllt."

Das ist unerhört, dass

$$f(dx) = f(0) + df(0) + \frac{1}{2}d^2f(0) + ..$$

eine richtig gebildete Gleichung sei, und dass dennoch, obgleich in der Reihe:

$$f0 + df0 + \frac{1}{2}d^2f0 + ..$$

alle Glieder gleich Null sind, nicht auch $f(dx)$ gleich Null sein sollte. Ist diess der Fall, dann darf man den Differenzial-Calcul

verabschieden. Cauchy liefert zwar keinen Beweis, aber er zeigt diess an einem Beispiele, und auch diess genügt.

Er setzt: $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$. Differenzirt man diess nach der Analogie von $y = e^z$, so wird $dy = e^z dz$, und jedes Glied der Reihe Δy, nämlich dy, d^2y, d^3y .., hat e^z zum Factor. Es hat daher auch in $f(x+dx) = e^{-\frac{1}{(x+dx)^2}}$ jedes Glied: fx, dfx, d^2fx, .. den Factor $e^{-\frac{1}{x^2}}$. Für $x = 0$ wird $f(x+dx) = e^{-\frac{1}{(x+dx)^2}}$ gleich $e^{-\frac{1}{dx^2}}$, und diese Grösse ist keineswegs gleich Null. Wohl aber sind alle Glieder der Reihe gleich Null. Es ist nämlich:

$$fx = e^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{0}}} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

und da alle Glieder den Factor $e^{-\frac{1}{x^2}}$ haben, so sind sie alle gleich Null. Wir erhalten daher eine Reihe, deren Glieder sämmtlich Null sind; und die Summe dieser Nullen soll gleich $e^{-\frac{1}{dx^2}}$ sein, das offenbar nicht gleich Null ist. Denn setzt man z. B. $dx = 1$, so ist $e^{-\frac{1}{1}} = \frac{1}{e} = \frac{1}{2,7\ldots}$.

Diese Schwierigkeit ist leicht zu lösen. Cauchy hat vielleicht vergessen, die Function $e^{-\frac{1}{x^2}}$ wirklich zu differenziren. Es ist aber:

$$d\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right) = \frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} dx,$$

und für $x = 0$ wird:

$$d\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right) = \frac{2\,dx}{\infty . 0} = \frac{0}{0}.$$

Cauchy übersah also, dass beim Differenziren noch der Nenner x^3 eintritt, und dass dieser für $x = 0$ ebenfalls Null wird, woraus $dfx = \frac{0}{0}$ folgt, ein Ausdruck, der unbestimmt, aber nicht nothwendig gleich Null ist. In gleicher Weise erhalten alle Glieder der dfx, d^2fx ... die Form $\frac{0}{0}$, und man erhält:

$$f(dx) = e^{-\frac{1}{dx^2}} = \frac{0}{0} + \frac{0}{0} + \frac{0}{0} + ..$$

was kein Widerspruch ist, sondern nur andeutet, dass $e^{-\frac{1}{dx^2}}$ nicht nach ganzen positiven Potenzen entwickelt werden kann, was man auch a priori einsieht.

Cauchy sagt zweitens: „Man könnte glauben, dass die Maclaurin'sche Reihe, wenn sie convergent ist, immer $f(dx)$ zur Summe habe, da

$$f(dx) = f(0) + df(0) + \frac{1}{2}d^2f(0) + \ldots$$

Das ist nicht immer der Fall."

Auch das wäre unerhört. Wenn die Reihe:

$$f(0) + df(0) + \frac{1}{2}d^2f(0) + \ldots$$

convergent ist, und eine Summe giebt, so muss $f(dx)$ diese Summe sein. Ist es auch nur in einem Beispiele anders, so ist der Differenzial-Calcul aufzugeben.

Cauchy beweist seinen Satz durch das Beispiel:

$$fx = e^{-x^2} + e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Entwickelt man diese Reihe durch Differenzirung, so findet man:

$$f(x+dx) = e^{-(x+dx)^2} + e^{-\frac{1}{(x+dx)^2}} =$$

$$= \left(e^{-x^2} + e^{-\frac{1}{x^2}}\right) - \left(2xe^{-x^2} - \frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}\right)dx + \ldots$$

Cauchy übersah hier, wie bei seinem ersten Satze, das Differenzial von $e^{-\frac{1}{x^2}}$, das er für Null nahm, während es $\frac{0}{0}$ ist. So ist es gekommen, dass er nur das Differenziale von e^{-x^2} nimmt, und am Ende

$$f(x+dx) = e^{-(x+dx)^2} + e^{-\frac{1}{(x+dx)^2}} \text{ für } x = 0$$

nur e^{-dx^2} statt $\left(e^{-dx^2} + e^{-\frac{1}{dx^2}}\right)$ findet. Es war also nichts als ein Versehen.

Nach solchen Vorgängen wäre zu wünschen, dass man mehr Ehrfurcht vor der objectiven Wahrheit des Calculs habe, und nicht sogleich, wenn man auf Schwierigkeiten stösst, die Schuld auf den Calcul schiebe.

Cap. XIV.

Functionen, die für bestimmte Werthe der Veränderlichen unter den Formen: $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0.\infty$; ∞^0 etc. erscheinen.

§. 100.

Die Form $\frac{0}{0}$ für Functionen einer Veränderlichen.

Ist eine bestimmte gebrochene Function $\frac{M}{N}$ gegeben, so können für besondere Werthe von x, z. B. $x = a$, Zähler und Nenner zugleich Null werden. Die Function erscheint dann unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$, obgleich sie selbst nicht unbestimmt ist. Ihr wahrer Werth soll gefunden werden.

Obgleich für algebraische Functionen auch der gewöhnliche Calcul Mittel genug hat, um solche Werthe $\frac{0}{0}$ bestimmen zu können, so liefert doch nur der Differenzial-Calcul die Hilfsmittel zur Bestimmung solcher Werthe für alle Functionen, welcher Art sie auch sein mögen.

1) Erscheint nämlich der Ausdruck $\frac{M}{N}$ für $x = a$ unter der Form $\frac{0}{0}$, so ist es ein Zeichen, dass Zähler und Nenner wenigstens einen Factor $(x - a)$ gemeinschaftlich haben.

Die Function ist demnach: $\frac{M}{N} = \frac{P(x-a)}{Q(x-a)}$; und denkt man sich $(x - a)$ durch Division gehoben, so ist der Werth von $\frac{M}{N}$ gleich $\frac{P}{Q}$. Diese Grösse $\frac{P}{Q}$ soll gefunden werden.

Nun ist $M = P(x-a)$; $N = Q(x-a)$, und da, wie bekannt, zu gleichen Functionen auch gleiche Differenzialien gehören, so folgt aus $M = P(x-a)$ auch $dM = Pdx + (x-a)dP$, und aus $N = Q(x-a)$ auch $dN = Qdx + (x-a)dQ$.

Für $x = a$ verschwinden die Glieder, die $(x-a)$ zum Factor haben, es wird $Pdx = dM$ und $Qdx = dN$.

Durch Division ergiebt sich der gesuchte Werth $\frac{Pdx}{Qdx} = \frac{dM}{dN}$, oder der Werth $\frac{P}{Q} = \frac{dM}{dN}$.

Daraus wird die bekannte Regel abgelesen: Um den wahren Werth $\frac{P}{Q}$ eines Ausdrucks $\frac{M}{N}$ zu finden, der für $x = a$ im Zähler und Nenner zugleich Null wird, differenzirt man Zähler und Nenner einzeln, dividirt dM durch dN, und substituirt in beiden $x = a$.

Man findet daher den wahren Werth $\frac{P}{Q}$ auch ohne dass man die Grössen P und Q kennt, schon aus den Werthen $\frac{dM}{dN}$, die man immer kennt, da M und N gegeben sind.

2) Würde aber für $x = a$ auch $\frac{dM}{dN} = \frac{0}{0}$, so wäre es ein Zeichen, dass sowohl dM als dN den Factor $(x-a)$ nochmal enthielten; man müsste daher, um den wahren Werth von $\frac{M}{N}$ zu finden, auf's Neue differenziren. Und so weiter.

3) Ueberhaupt, wenn M den Factor $(x-a)^m$ und N den Factor $(x-a)^n$ enthält, so dass $\frac{M}{N} = \frac{P(x-a)^m}{Q(x-a)^n}$ ist, so verschwinden für $x = a$ im Zähler alle Ausdrücke bis zum m^{ten} Differenzial, und eben so im Nenner bis zum n^{ten} Differenzial, d. h. man muss, um endliche Ausdrücke zu erhalten, den Zähler $m$mal und den Nenner $n$mal differenziren. Ist $m = n$, so werden Zähler und Nenner zu gleicher Zeit endliche bestimmte Grössen $\frac{P}{Q}$ und diess ist in diesem Falle der wahre Werth von $\frac{M}{N}$.

Ist $m > n$, so wird der Nenner nach der n^{ten} Differenzirung eine endliche Grösse, während der Zähler $= 0$ bleibt, und der wahre Werth von $\frac{M}{N}$ ist gleich $\frac{P \times 0}{Q} = 0$, auch ein bestimmter Werth.

Ist endlich $m < n$, so wird der Zähler nach $m$maliger Differenzirung eine endliche Grösse, während der Nenner noch Null bleibt, und es ist der Werth von $\frac{M}{N} = \frac{P}{Q \times 0} = \frac{P}{0} = \infty$ ebenfalls ein bestimmter Werth von $\frac{M}{N}$.

Es werden daher in allen Fällen, in denen eine gegebene Function $\frac{M}{N}$, Factoren von der Form $(x - a)$ im Zähler und Nenner zugleich hat, die also für $x = a$ in $\frac{0}{0}$ übergeht, bestimmte Werthe gefunden: 1) $\frac{P}{Q}$; 2) 0; 3) $\frac{1}{0} = \infty$.

Hat hingegen die Function $\frac{M}{N}$ im Zähler und Nenner Factoren von der Form $(x-a)^{\frac{\mu}{\rho}}$, $(x-a)^{\frac{\nu}{s}}$, so geht sie zwar auch in $\frac{0}{0}$ über, kann jedoch nicht durch fortgesetzte Differenzirungen ihrem Werthe nach bestimmt werden, da die Functionen, welche solche Factoren mit gebrochenen Exponenten enthalten, für $x = a$ nicht in Reihen mit ganzen postitiven Potenzen von dx entwickelt werden können. Dasselbe tritt bei Functionen ein, die überhaupt nicht nach ganzen positiven Potenzen der Veränderlichen entwickelt werden können. Für solche Fälle wird ein singuläres Verfahren nothwendig sein.

§. 101.

Die gewöhnliche Methode.

In verschiedenen Darstellungen der Differenzial-Rechnung wird der vorhergehende Satz auf folgende Art bewiesen.

Es sei $\frac{M}{N}$ eine Function, die für $x = a$ die Form $\frac{0}{0}$ annimmt.

Es wird dann:

$$\frac{M+\Delta M}{N+\Delta N} = \frac{M + dM + \frac{1}{2}d^2M + .. \frac{1}{1.2..m}d^mM + \frac{1}{1.2..m.m+1}d^{m+1}M + ..}{N + dN + \frac{1}{2}d^2N + .. \frac{1}{1.2..n}d^nN + \frac{1}{1.2..n.n+1}d^{n+1}N + ..}$$

Verschwinden nun für $x = a$ im Zähler alle Glieder bis d^mM und im Nenner bis d^nN, so wird:

$$\frac{M+\Delta M}{N+\Delta N} = \frac{\frac{1}{1.2..m}d^mM + \frac{1}{1.2..m.m+1}d^{m+1}M + ..}{\frac{1}{1.2..n}d^nN + \frac{1}{1.2..n.n+1}d^{n+1}N + ..}$$

Dividirt man im Zähler und Nenner durch dx^m, so wird:

$$\frac{M+\Delta M}{N+\Delta N} = \frac{\frac{1}{1.2..m}\frac{d^m M}{dx^m} + \frac{1}{1.2..m+1}\frac{d^{m+1}M}{dx^m} + \ldots}{\frac{1}{1.2..n}\frac{d^n N}{dx^m} + \frac{1}{1.2..n+1}\frac{d^{n+1}N}{dx^m} + \ldots}$$

Setzt man nun $dx = 0$, so wird $\Delta M = 0$, $\Delta N = 0$, alle Glieder, die dx zum Factor haben, verschwinden, und es wird:

$$\frac{M}{N} = \frac{\frac{1}{1.2..m}\frac{d^m M}{dx^m}}{\frac{1}{1.2..n}\frac{d^n N}{dx^m}} = \frac{\frac{d^m M}{dx^m}}{\frac{d^n N}{dx^n}dx^{n-m}} = \frac{\frac{d^m M}{dx^m}dx^{m-n}}{\frac{d^n N}{dx^n}}$$

ein Ausdruck, aus dem die oben bewiesenen Regeln abgeleitet werden können. Die Zahlen-Coefficienten sind weggelassen, weil sie für die Werthe 0 und ∞ nichts entscheiden.

Diese Beweisart halte ich für ungenügend und tadelnswerth. Denn setzt man $dx = 0$ (gleichgültig, ob am Anfange oder erst im Verlauf der Untersuchung), so entsteht gar keine Reihe, und der Ausdruck $\frac{d^m M}{d^n N}$ existirt gar nicht. Denn es ist illusorisch, ihn erst zu entwickeln und darauf dasjenige, was die Entwicklung möglich macht, wieder wegzunehmen, indem man $dx = 0$ setzt.

Denkt man sich aber dx nur als unendlich klein, so wird $\frac{M+\Delta M}{N+\Delta N}$ niemals gleich $\frac{M}{N}$, und $\frac{M+\Delta M}{N+\Delta N}$ giebt niemals den präcisen Werth $\frac{M}{N}$, den es doch in der That geben soll, und auch zu geben prätendirt. Auch ist es in diesem Falle nicht richtig, dass die auf $d^m M$ und $d^n N$ in den entsprechenden Reihen folgenden Glieder verschwinden. Will man also an dem präcisen Werthe von $\frac{M}{N}$ festhalten, so muss man $dx = 0$ setzen; dann hat man aber gleich vom Anfange an eine Rechnung mit Nullen, wie Euler so ehrlich war einzugestehen. Durch eine Nullen-Rechnung ist jedoch nichts zu bestimmen.

Diess ist zu tadeln, und zwar um so mehr, als man sich durch ungeeignete Beweisführung die Schwierigkeit selbst erst

geschaffen hat. Denn geht man, wie im vorhergehenden Beweise von dem Satze aus: dass gleichen Functionen gleiche Differenzialien entsprechen, so folgt aus $\frac{M}{N} = \frac{P(x-a)}{Q(x-a)}$; $\frac{dM}{dN} = \frac{Pdx + (x-a)dP}{Qdx + (x-a)dQ}$, und für $x = a$ fallen die überflüssigen Glieder $(x-a)dP$ und $(x-a)dQ$ aus, nicht weil dx unendlich klein ist, sondern weil sie den Factor $(x-a)$ enthalten. Ja dx kann in diesem Falle sogar grösser als jede gegebene noch so grosse Grösse sein, da es sich im Ausdrucke: $\frac{dM}{dN} = \frac{Pdx}{Qdx}$ durch Division hebt. Die Grösse dx kann alle Werthe haben, nur gerade nicht Null, weil man sonst $\frac{dM}{dN} = \frac{P}{Q} \times \frac{0}{0}$ hätte, woraus schlechterdings nichts hervorginge, weil es ein Zirkel im Beweis wäre.

Es war hier nothwendig, in Erinnerung zu bringen, dass man auch diese Untersuchung führen könne, ohne auf unendlich kleine Grössen zurückzukommen. Ja, lässt man sich hier auf unendlich kleine Grössen ein, die übrigens weder durch die Natur des Problems geboten sind, noch an sich einen Sinn haben, so verwickelt man sich gerade hier in unauflösliche Schwierigkeiten.

§. 102.

Beispiele.

1) $\frac{y}{z} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$.

Diese Function nimmt für $x = 1$ die Form $\frac{0}{0}$ an.

Nun ist: $dy = (n \,.\, n+1)(x^n - x^{n-1})\,dx$

$dz = -2(1-x)\,dx.$

Für $x = 1$ ist sowohl dy als dz gleich Null.

Differenzirt man noch einmal einzeln Zähler und Nenner, so wird:

$$d^2y = (n \,.\, n+1)\left(nx^{n-1} - (n-1)x^{n-2}\right)dx^2$$

$$d^2z = +2\,dx^2.$$

Für $x = 1$ wird $d^2y = (n \,.\, n+1)\,dx^2$ und $d^2z = 2\,dx^2$, also $\frac{y}{z} = \frac{d^2y}{d^2z} = \frac{n \,.\, n+1}{2}$ für $x = 1$.

2) $\frac{y}{z} = \frac{a^x - b^x}{x}$.

Für $x = 0$ wird $\frac{y}{z} = \frac{0}{0}$.

Durch Differenzirung findet man:

$$dy = (a^x \log a - b^x \log b)\, dx,$$
$$dz = dx,$$

also $\frac{y}{z} = \frac{dy}{dz} = \log a - \log b$ für $x = 0$.

3) $\frac{y}{z} = \frac{1 - \sin x + \cos x}{\sin x + \cos x - 1}$.

Für $x = \frac{1}{2}\pi$ wird $\frac{y}{z} = \frac{0}{0}$.

Durch Differenzirung findet man:

$$dy = -(\cos x + \sin x)\, dx,$$
$$dz = (\cos x - \sin x)\, dx, \text{ und}$$
$$\frac{dy}{dz} = -\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x},$$

ein Ausdruck, der für $x = \frac{1}{2}\pi$ in $+1$ übergeht, welches der Werth für die gegebene Function ist.

4) $\frac{y}{z} = \frac{x - \sin x}{x^4}$.

Für $x = 0$ wird $\frac{y}{z} = \frac{0}{0}$.

Es ist:

$\frac{dy}{dz} = \frac{1 - \cos x}{4x^3}$, welches für $x = 0$ wieder $\frac{0}{0}$ giebt;

$\frac{d^2y}{d^2z} = \frac{+ \sin x}{12x^2}$, welches für $x = 0$ wieder $\frac{0}{0}$ giebt;

$\frac{d^3y}{d^3z} = \frac{\cos x}{24x}$, welches für $x = 0$ nun $\frac{1}{0} = \infty$ giebt,

was der wahre Werth der Function: $\frac{x - \sin x}{x^4}$ für $x = 0$ ist.

Eben so ist der Werth von $\frac{x - \sin x}{1 - \cos x}$ für $x = 0$ nach zweimaliger Differenzirung gleich $\frac{0}{1} = 0$.

5) $\frac{y}{z} = \frac{tg\,\pi x - \pi x}{x^2\,tg\,\pi x}$.

Für $x = 0$ wird $\frac{y}{z} = \frac{0}{0}$.

Dieser Ausdruck entsteht aus $\frac{1}{x^2} - \frac{\pi}{x\,tg\,\pi x}$, der für $x = 0$ die Form $\frac{1}{0} - \frac{\pi}{0}$ giebt, die durch Reduction auf gleichen Nenner in $\frac{y}{z} = \frac{0}{0}$ übergeht.

Durch Differenzirung findet man:

$$dy = \left(\frac{\pi}{\cos^2 \pi x} - \pi\right) dx,$$

$$dz = \left(2x\,tg\,\pi x + \frac{x^2\pi}{\cos^2 \pi x}\right) dx.$$

Durch Reduction erfolgt:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\pi(1 - \cos^2 \pi x)}{2x \cos \pi x \,.\, \sin \pi x + x^2\pi},$$

welches für $x = 0$ in $\frac{0}{0}$ übergeht.

Nun ist:

$$d^2y = (2\pi^2 \cos \pi x \sin \pi x)\, dx^2,$$

$$d^2z = (2\cos \pi x \sin \pi x - 2x\pi \sin^2 \pi x + 2x\pi \cos^2 \pi x + 2x\pi)\, dx^2,$$

und für $x = 0$ geht wieder $\frac{d^2y}{d^2z}$ in $\frac{0}{0}$ über.

Durch nochmalige Differenzirung wird:

$$\frac{d^3y}{d^3z} = \frac{2\pi^3 \cos^2 \pi x - 2\pi^3 \sin^2 \pi x}{4\pi \cos^2 \pi x - 4\pi \sin^2 \pi x - 4x\pi^2 \sin \pi x \cos \pi x + 2\pi}$$

welches für $x = 0$ in $\frac{2\pi^3}{6\pi} = \frac{1}{3}\pi^2$ übergeht.

Diess ist der Werth der gegebenen Function für $x = 0$.

§. 103.

Die Form $\frac{\infty}{\infty}$ für Functionen einer Veränderlichen.

Werden in einer Function $\frac{y}{z}$ für bestimmte Werthe von x Zähler und Nenner zugleich unendlich gross, so tritt die Form der unbestimmten Grösse $\frac{\infty}{\infty}$ ein.

Da $\infty = \frac{1}{0}$ gesetzt werden kann, so geht $\frac{\infty}{\infty}$ in $\frac{\frac{1}{0}}{\frac{1}{0}} = \frac{0}{0}$ über,

und diese Fälle werden wie die vorhergehenden behandelt.

Beispiel. $\frac{y}{z} = \frac{3x^2}{\frac{(x^2-a^2)^2}{4r}}$.
$\frac{}{(x+a)^2}$

Für $x = -a$ wird $\frac{y}{z} = \frac{\infty}{\infty}$.

Nun ist durch leichte Reduction: $\frac{y}{z} = \frac{3x^2(x+a)^2}{4r(x^2-a^2)^2}$, welches für $x = -a$ in $\frac{0}{0}$ übergeht, und nach zweimaliger Differenzirung den Werth: $+\frac{3}{16r}$ für $x = -a$ erhält.

§. 104.

Die Form $0 \times \infty$ für Functionen einer Veränderlichen.

Die Ausdrücke von der obigen Form bringt man, da $\infty = \frac{1}{0}$, auf die Form $\frac{0}{0}$, und behandelt sie nach den vorausgehenden Regeln. Manchmal ist es auch vortheilhaft, sie durch die Substitution $0 = \frac{1}{\infty}$ auf die Form $\frac{\infty}{\infty}$ zu bringen.

Beispiele. 1) $\frac{y}{z} = (1-x)\,tg\frac{\pi x}{2}$. Dieser Ausdruck nimmt für $x = 1$, da $1 - x = 0$, und $tg\frac{\pi}{2} = \infty$ ist, die Form an: $0.\infty$.

Da $tg\frac{\pi x}{2} = \frac{1}{cotg\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$ ist, so wird:

$$\frac{y}{z} = \frac{1-x}{cotg\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = \frac{0}{0} \text{ für } x = 1.$$

Nach den gegebenen Regeln findet man den wahren Werth: $\frac{y}{z} = \frac{2}{\pi}$.

2) Die Function: $log\left(2-\frac{x}{a}\right) tg\frac{\pi x}{2a}$ giebt für $x=a$ den Werth: $0.\infty$.

Die Substitution der Cotangente statt der Tangente giebt:

$$\frac{log\left(2-\frac{x}{a}\right)}{cotg\frac{\pi x}{2a}}=\frac{0}{0} \text{ für } x=a.$$

Der wahre Werth wird wieder: $\frac{2}{\pi}$.

§. 105.

Singuläre Art, die Werthe von $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ etc. zu finden.

Die singulären Fälle treten bei Functionen dann ein, wenn sie für bestimmte Werthe von x nicht nach ganzen und positiven Potenzen von dx entwickelt werden können. Da es den Differenzialien wesentlich ist, dass sie nach ganzen und positiven Potenzen von dx fortschreiten, so ist einleuchtend, dass hier das Differenziren nicht zum gewünschten Ziele führen könne.

Bei solchen Fällen geht man zur allgemeinen Reihen-Entwicklung der niedern Analysis zurück, und substituirt, nachdem man $(x+dx)$ statt x gesetzt hat, sogleich den Werth $x=a$, entwickelt den neuen Ausdruck, und entscheidet aus der nun hervorgehenden Reihe, welchen Werth die gegebene Function für $x=a$ annimmt.

Zusatz. Alle Functionen, auch diejenigen, die den Gesetzen der Differenzial-Reihe unterworfen sind, können nach der empirischen Methode der niedern Analysis behandelt werden, und diese führt in einzelnen Fällen sogar schneller zum Ziele, als das Verfahren durch successives Differenziren. Da das Differenziren nur ein besonderer Fall der allgemeinen Reihen-Entwicklung ist, so ist einleuchtend, dass das Allgemeine auch leisten könne, was das Besondere leistet. Der Unterschied besteht nur darin, dass die allgemeine Reihen-Entwicklung bloss empirische Resultate liefert, während das Differenziren eine allgemeine und apriorische Regel giebt, was überhaupt der ganze Vorzug der Differenzial-Reihe vor der allgemeinen Reihen-Entwicklung ist. Es kann keinem

Zweifel unterliegen, dass die Methode, welche allgemeine und apriorische Regeln giebt, vorzuziehen sei, dass man also die Methode der Differenzialien überall anwenden müsse, wo sie eintreten kann, und dass man die Fälle, bei denen sie nicht eintreten kann, als singuläre Fälle zu behandeln habe.

Die allgemeine Reihen-Entwicklung giebt für eine Function von x, wenn in ihr x um dx vermehrt wird:

$$f(x+dx) = fx + Adx^r + Bdx^{r+n} + Cdx^{r+n+s} + ..$$

wo r, n, s .. auch gebrochene und negative Zahlen sein können, während die Differenzial-Reihe die Form hat:

$$f(x+dx) = fx + f'x\,dx + \frac{1}{2}f''x\,dx^2 + ..$$

worin 1, 2, 3 .. n .. nothwendig ganze positive Zahlen sind.

Ist nun eine Function $y = \frac{fx}{\varphi x}$ gegeben, und werden fx und φx für $x = a$ zugleich Null, so wird:

$$y + \Delta y \text{ gleich } \frac{f(x+dx)}{\varphi(x+dx)} = \frac{fx + Adx^r + Bdx^{r+n} + ..}{\varphi x + \alpha dx^\rho + \beta dx^{\rho+\nu} + ..}$$

oder, da $fx = 0$, $\varphi x = 0$:

$$\frac{f(x+dx)}{\varphi(x+dx)} = \frac{Adx^r + Bdx^{r+n} + ..}{\alpha dx^\rho + \beta dx^{\rho+\nu} + ..} =$$

$$= \frac{A}{\alpha}dx^{r-\rho} + Kdx^{r+n-\rho} + ...$$

Es können nun die drei Fälle eintreten, dass $r = \varrho$, dass $r > \varrho$, und dass $r < \varrho$ ist.

1) Ist $r = \varrho$, so ist $dx^{r-\rho} = 1$, und es wird:

$$y + \Delta y = \frac{f(x+dx)}{\varphi(x+dx)} = \frac{A}{\alpha} + Kdx^{r+n-\rho} + ...$$

Da nun die gegebene Function $y = \frac{fx}{\varphi x}$ das erste Glied der Reihe ist, d. h. dasjenige, das von dx unabhängig ist, so folgt, dass in diesem Falle, da $\frac{A}{\alpha}$ das von dx unabhängige Glied ist, $\frac{A}{a}$ der Werth von $\frac{fx}{\varphi x}$ ist, für $x = a$, für welches fx und φx zugleich Null werden.

2) Ist $r > \varrho$, so wird $r - \varrho = +\sigma$, und

$$\frac{f(x+dx)}{\varphi(x+dx)} = \frac{A}{\alpha}dx^\sigma + Kdx^{\sigma+n} + ..$$

In dieser Reihe ist kein von dx unabhängiges Glied vorhanden, ausser wenn man sie etwa schreibt, wie folgt:

$$\frac{f(x+dx)}{\varphi(x+dx)} = 0 + \frac{A}{\alpha} dx^{\sigma} + \ldots$$

Das von dx unabhängige erste Glied ist also gleich Null, und diess ist der Werth von $\frac{fx}{\varphi x}$ für $x = a$.

3) Ist $r < \varrho$, so vertauscht man Zähler und Nenner in der gegebenen Function $y = \frac{fx}{\varphi x}$, und es wird: $\frac{1}{y} = \frac{\varphi x}{fx}$.

Nun ist:

$$\frac{\varphi(x+dx)}{f(x+dx)} = 0 + \frac{\alpha}{A} dx^{\sigma} + L dx^{\sigma+\nu} + \ldots$$

und nach (2) ist $\frac{\varphi x}{fx} = 0$ für $x = a$.

Es ist daher $\frac{1}{y} = \frac{\varphi x}{fx} = 0$, und $y = \frac{fx}{\varphi x} = \infty$, und diess ist der Werth von $\frac{fx}{\varphi x}$ für $x = a$.

Die gegebene Function $y = \frac{fx}{\varphi x}$, die für $x = a$ in $\frac{0}{0}$ übergeht, wird daher entweder gleich $\frac{A}{\alpha}$, oder gleich Null, oder gleich Unendlich, je nachdem der niedrigste Exponent von dx im Zähler gleich, grösser oder kleiner ist als der niedrigste Exponent von dx im Nenner.

§. 106.

Beispiele.

1) Die Function $\frac{a^3 - x^3}{a^2 - x^2}$ giebt für $x = a$ nach der Methode des Differenzirens den Werth $\frac{3a}{2}$.

Nach der Reihen-Entwicklung wird:

$$\frac{a^3 - (x+dx)^3}{a^2 - (x+dx)^2} = \frac{a^3 - x^3 - 3x^2 dx - 3x dx^2 - dx^3}{a^2 - x^2 - 2x dx - dx^2}$$

und für $x = a$:

$$\frac{3x^2 dx + 3x dx^2 + dx^3}{2x dx + dx^2} = \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} dx + \ldots$$

so dass $\frac{3}{2}x = \frac{3}{2}a$ der Werth von $\frac{fx}{\varphi x}$ ist, da $\frac{3}{2}x$ das von dx unabhängige Glied der Reihe ist.

2) Die Function $\frac{(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{(x-a)^{\frac{3}{2}}}$ giebt $\frac{0}{0}$ für $x = a$.

Die Reihen-Entwicklung giebt für $x = a$:

$$\frac{\left((x+dx)^2 - a^2\right)^{\frac{3}{2}}}{(x+dx-a)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(2xdx + dx^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^{\frac{3}{2}}} = (2x)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}(2x)^{\frac{1}{2}}dx + \ldots$$

Es ist daher $(2x)^{\frac{3}{2}} = (2a)^{\frac{3}{2}}$ das von dx unabhängige Glied der Reihe, und giebt den Werth der gegebenen Function für $x = a$.

3) $\frac{(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{(x-a)^{\frac{2}{3}}}$. Diese Function geht für $x = a$ in

$$\frac{(2x\,dx + dx^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^{\frac{2}{3}}} = (2x)^{\frac{3}{2}} dx^{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}} + \ldots$$

über. Es existirt daher kein von dx unabhängiges Glied der Reihe, und da $\frac{3}{2} > \frac{2}{3}$, so ist der Werth der gegebenen Function gleich Null.

4) Die Function $\frac{(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{(x-a)^{\frac{3}{2}}}$ geht in $(2x)^{\frac{3}{2}} dx^{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}} + \ldots$ über, und da $\frac{3}{2} > \frac{2}{3}$, so ist der Werth der Function für $x = a$ unendlich gross.

5) Die Function $(1-x)\,tg\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ geht für $x = 1$ in die Form $0 \,.\, \infty$ über.

Nun ist: $(1-x)\,tg\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \frac{1-x}{cotg\,\frac{\pi x}{2}} = \frac{0}{0}$, und:

$$\frac{1-(x+dx)}{cotg\,\frac{\pi}{2}(x+dx)} = \frac{-dx}{cotg\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi dx}{2}\right)} = \frac{dx}{tg\left(\frac{\pi dx}{2}\right)} =$$

$$= \frac{dx}{\frac{\pi dx}{2} + \frac{1}{3}\frac{\pi^3 dx^3}{8} + \ldots} = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{6}\pi^2 dx^2 - \ldots$$

so dass $\frac{2}{\pi}$, das von dx unabhängige Glied der Reihe, den Werth der gegebenen Function für $x = 1$ giebt.

§. 107.

Eine andere allgemeine Methode der Berechnung der Werthe $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ etc.

Oefter tritt der Fall ein, dass eine Function, die für bestimmte Werthe $x = a$ etc. die Form $\frac{\infty}{\infty}$ annimmt, auch wenn sie auf $\frac{0}{0}$ gebracht wird, dennoch unbestimmt bleibt, selbst wenn sie beliebig oft differenzirt wird. Diess tritt dann ein, wenn die Function nicht nach Differenzialien entwickelt werden kann.

In diesem Falle wendet man folgende combinirte Methode an.

Ist $y = \frac{fx}{\varphi x} = \frac{\infty}{\infty}$, so setzt man $y = \frac{\frac{1}{\varphi x}}{\frac{1}{fx}} = \frac{0}{0}$, und differenzirt.

Dann entsteht: $\frac{\frac{d(\varphi x)}{(\varphi x)^2}}{\frac{d(fx)}{(fx)^2}} = \frac{(fx)^2\, d(\varphi x)}{(\varphi x)^2\, d(fx)}$.

Für $x = a$ soll dieser Ausdruck gleich $\frac{fx}{\varphi x}$ sein.

Verbindet man diese Ausdrücke, indem man $\frac{fx}{\varphi x} = \frac{(fx)^2\, d(\varphi x)}{(\varphi x)^2\, d(fx)}$ setzt, so wird $\frac{fx}{\varphi x} = \frac{d(fx)}{d(\varphi x)}$.

Daraus leitet sich die Regel ab: Wenn für $x = a$ eine Function im Zähler und Nenner zugleich unendlich wird, so differenzirt man ohne weitere Veränderung den Zähler einzeln und den Nenner einzeln, gerade als ob die Function die Form $\frac{0}{0}$ hätte, substituirt $x = a$ und sucht daraus den Werth der gegebenen Function.

Beispiele. 1) Es sei $\frac{\log x}{x}$ gegeben. — Man sieht a priori ein, dass dieser Ausdruck um so kleiner wird, je grösser x wird, weil die Zahlen schneller zunehmen als ihre Logarithmen. Für $x = \infty$ wird also der Ausdruck gleich Null.

Substituirt man $x = \infty$, so wird $\frac{log\, x}{x} = \frac{\infty}{\infty}$.

Bringt man diess auf die Form $\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{log\, x}} = \frac{0}{0}$, so wird durch Differenziren $\frac{(log\, x)^2}{x}$, also für $x = \infty$ wieder $\frac{\infty}{\infty}$.

Auch durch wiederholtes Differenziren kann diese Function nicht bestimmt werden.

Verfährt man aber nach der zweiten Methode, so wird $\frac{log\, x}{x} = \frac{d(log\, x)}{dx} = \frac{1}{x}$, und für $x = \infty$ selber gleich Null, welches sein wahrer Werth ist.

Eben so giebt $\frac{log\, x}{x^n}$ den Werth $\frac{1}{nx^n}$, und wird für $x = \infty$, selber gleich Null.

2) Gegeben ist: $\frac{log\frac{1}{x}}{cotg\, x}$, das für $x = 0$ die Form $\frac{\infty}{\infty}$ annimmt.

Nun ist $\frac{d\left(log\frac{1}{x}\right)}{d(cotg\, x)} = \frac{sin^2 x}{x}$, das für $x = 0$ die Form $\frac{0}{0}$ annimmt.

Durch wiederholtes Differenziren wird $\frac{d(sin^2 x)}{dx} = 2sin\, x\, cos\, x$, das für $x = 0$ den Werth Null giebt.

3) $tg\, x\, log\frac{1}{x}$. Dieser Ausdruck geht für $x = 0$ in die Form $0 . \infty$ über. Substituirt man $tg\, x = \frac{1}{cotg\, x}$, so geht die Function in $\frac{log\left(\frac{1}{x}\right)}{cotg\, x}$ über, und giebt, wie im Vorhergehenden, den Werth Null.

4) Nun behandeln wir noch das Beispiel von Cauchy, dessen am Schlusse des vorhergehenden Cap. gedacht wurde, nämlich die Function: $\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}$.

Diese wird für $x = 0$ von der Form $\frac{0}{0}$, oder wenn man schreibt $\frac{1}{x^3 e^{\frac{1}{x^2}}}$, von der Form: $\frac{1}{0 . \infty}$.

Differenzirt man in $\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}$ Zähler und Nenner einzeln, so wird $d\left(\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}\right) = \frac{2}{3}\frac{e^{\frac{1}{-x^2}}}{x^5}$, und für $x=0$ wieder $\frac{0}{0}$.

Es ist einleuchtend, dass man nach diesem Verfahren niemals zu einem bestimmten Werthe kommt, da $e^{-\frac{1}{x^2}}$ immer im Zähler bleibt, und die Potenzen von x im Nenner immer grösser werden.

Verfährt man nach der zweiten Methode und schreibt: $\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} = \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{e^{x^2}}}$, welches für $x=0$ die Form $\frac{\infty}{\infty}$ annimmt, so wird:

$\frac{d\left(\frac{1}{x^3}\right)}{d\left(e^{\frac{1}{x^2}}\right)} = \frac{3}{2xe^{\frac{1}{x^2}}}$, und durch wiederholte Differenzirung $\frac{3}{4}\frac{x}{e^{\frac{1}{x^2}}}$, welches für $x=0$ den Werth $\frac{0}{\infty} = 0$ giebt.

Ueberhaupt giebt $\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n} = \frac{\frac{1}{x^n}}{e^{\frac{1}{x^2}}}$ durch Differenziren im Zähler und Nenner den Werth: $\frac{n}{2}\frac{\frac{1}{x^{n-2}}}{e^{\frac{1}{x^2}}}$.

Es nimmt also der Exponent n in x^n immer um 2 ab, und verschwindet durch fortgesetztes Differenziren, oder wird negativ, so dass der letzte *endliche* Werth von $\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n}$ immer gleich Null ist.

Cauchy hat also zwar Recht, wenn er behauptet, dass die Entwicklung von $z = e^{-\frac{1}{x^2}}$, wenn x um dx vermehrt wird:

$$z + \Delta z = e^{-\frac{1}{(x+dx)^2}} = z + dz + \frac{1}{2}d^2z + \frac{1}{2.3}d^3z + \ldots$$

nur Glieder gebe, die für $x = 0$ die Form $\frac{0}{0} = 0$ annehmen, so dass $e^{-\frac{1}{dx^2}} = (0+0+0+0+..)$ werde. Allein dass darum $e^{-\frac{1}{dx^2}} = 0$ werde, das folgt nicht. Denn die aufeinanderfolgenden Differenzialien: dz, d^2z, d^3z.. d^nz, enthalten im Nenner immer höhere Potenzen von x und für das Glied $n = \infty$ ebenfalls x^∞. Für $n = \infty$ wird aber $\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n}$ nicht $= 0$, sondern bleibt unbestimmt, da durch Differenziren im Zähler und Nenner $\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n}$ zwar in die Form $\frac{n}{2}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{n-2}}$ übergeht, dieser Ausdruck aber für $n = \infty$ selbst wieder $\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{\infty-2}} = \frac{\infty}{2}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^\infty}$, d. h. unbestimmt bleibt.

Und dadurch ist bewiesen, dass $e^{-\frac{1}{dx^2}}$ durch die Differenzial-Reihe nicht bestimmt werden kann, was so viel sagen will, als dass $e^{-\frac{1}{dx^2}}$ nicht nach ganzen positiven Potenzen von dx entwickelt werden kann, was richtig ist, da es nach positiven Potenzen von $(dx)^{-2}$, also nach $(dx)^{-2}$, $(dx)^{-4}$ etc. entwickelt wird; diess sind aber negative Potenzen.

§. 108.

Functionen von der Form 0^∞, ∞^0 etc.

Sind Functionen gegeben, die für bestimmte Werthe von x die obigen Formen annehmen, so sucht man sie auf das Schema: $0.\infty$ oder $\infty.0$ zu bringen, was auch vermittelst der Exponential-Grössen gelingt. Ist diess geschehen, so behandelt man sie nach den vorausgehenden Regeln.

Ist allgemein eine Function $fx^{\varphi x}$ gegeben, die für $x = 0$ eine der obigen Formen annimmt, so setzt man die identische Gleichung: $fx = e^{log(fx)}$, und es wird: $fx^{\varphi x} = e^{\varphi x\, log\, fx}$.

Nun bestimmt man den Exponenten $\varphi x\, log(fx)$, der entweder Null, oder unendlich gross, oder eine endliche Grösse wird, so

dass $fx^{\varphi x} = e^0$ oder e^∞, oder e^a wird, in jedem Falle also ein bestimmter Ausdruck.

Beispiele. 1) Für $x = 0$ wird $\left(\frac{1}{x}\right)^{tg\,x} = \infty^0$.

Man bestimmt also $tg\,x\,log\left(\frac{1}{x}\right)$. Diess giebt für $x = 0$ die Form $0.\infty$ und den Werth 0, wie Oben gefunden wurde. Es ist daher $\left(\frac{1}{x}\right)^{tg\,x}$ für $x = 0$ gleich $e^0 = 1$, welches der wahre Werth ist.

2) Der Ausdruck: $(cotg\,x)^{\frac{1}{\frac{1}{2}\pi - x}}$ wird für $x = \frac{1}{2}\pi$ gleich $0^{\frac{1}{0}} = 0^\infty$.

Nun ist:

$$cotg\,x = e^{log\,(cotg\,x)} \quad \text{und} \quad (cotg\,x)^{\frac{1}{\frac{1}{2}\pi - x}} = e^{\frac{1}{\frac{1}{2}\pi - x}\,.\,log\,cotg\,x}.$$

Für $x = \frac{1}{2}\pi$ wird: $\frac{log\,cotg\,x}{\frac{1}{2}\pi - x} = \frac{0}{0}$, und durch Differenziren:

$$d\,log\,(cotg\,x) = -\frac{dx}{cotg\,x\,sin^2 x}$$

$$d\left(\frac{1}{2}\pi - x\right) = -\,dx,$$

also:
$$\frac{log\,(cotg\,x)}{\frac{1}{2}\pi - x} = \frac{1}{cotg\,x\,sin^2 x}.$$

Für $x = \frac{1}{2}\pi$ wird obiger Ausdruck $= \frac{1}{0} = \infty$, welches sein wahrer Werth ist.

Cap. XV.

Auflösung der Gleichungen mit Hilfe der Differenzialien.

§. 109.

Grenzwerthe der Wurzeln einer Gleichung.

Da die reellen Wurzeln der Gleichungen bei weitem die wichtigsten sind, so werden wir uns bei diesen Untersuchungen auf sie beschränken.

Die zu lösende Aufgabe zerfällt in zwei Theile. Der erste umfasst die Bestimmung der Grenzen, zwischen welchen je eine reelle Wurzel einer Gleichung liegt; der zweite giebt die Formeln, nach welchen diese reellen Wurzeln berechnet werden können. Beide Theile erfordern die Anwendung von Differenzialien.

Durch Fouriers Leistungen, denen sich der Lehrsatz von Sturm und die Arbeiten von Cauchy, Poisson, Stern und Andern anschliessen, können die Aufgaben des ersten Theils als hinlänglich gelöst betrachtet werden. Der Gebrauch, der hier von Differenzialien gemacht wird, beschränkt sich auf die abgeleiteten Functionen, d. h. auf die Differenzialien der Gleichung, die durch ihre Zeichenwechsel entscheiden, ob zwischen zwei Werthen, $x = \alpha$ und $x = \beta$, je eine Wurzel der Gleichung liege. Das Uebrige fällt den algebraischen Betrachtungen und Operationen anheim, die hier die Hauptsache sind. Eine vollständige Behandlung derselben würde einen Umfang gewinnen, der wohl der Algebra, aber nicht dem Differenzial-Calcul angemessen wäre. Aus diesem Grunde, und weil doch alles Wesentliche dieser Sache den algebraischen Betrachtungen anheimfällt, übergehen wir die Bestimmung der Grenzwerthe der Wurzeln einer Gleichung, und verweisen auf

Fourier und die Oben genannten Mathematiker. Wir setzen die Resultate voraus, die bei der Bestimmung der Grenzwerthe der Wurzeln einer Gleichung gefunden werden.

Man untersucht daher zuerst eine Gleichung, ob sie nicht zwei oder mehrere gleiche Wurzeln habe. Ist diess der Fall, so wird die Gleichung auf eine solche reducirt, die keine gleichen Wurzeln mehr hat. Das Verfahren, das dabei angewendet wird, ist bekannt.

Dann sucht man die Grenzen $x = \alpha$, $x = \beta$, zwischen welchen je eine Wurzel der Gleichung liegt, und man versichert sich, dass zwischen diesen Grenzen nur eine Wurzel liege. Sind α und β so beschaffen, dass zwischen ihnen mehrere verschiedene Wurzeln liegen, so zieht man die Grenzen enger, und fährt damit fort, bis man endlich auf zwei Werthe $x = \varkappa$ und $x = \lambda$ kommt, zwischen welchen nur je eine Wurzel der Gleichung liegt.

Ist diese Vorarbeit beendigt, dann beginnt die zweite Aufgabe, nämlich die Bestimmung der Wurzeln x selbst, die so genau ermittelt werden müssen, als es die Natur des jedesmaligen Problems verlangt.

§. 110.

Allgemeine Reihe für die Wurzeln einer Gleichung.

Die Wurzeln der Gleichungen können durch unendliche Reihen gegeben werden, und die ganze Aufgabe kommt strenggenommen auf eine Umkehrung der Reihen zurück. Sind Gleichungen gegeben, wie:

$$y = a + bx + cx^2 + \ldots rx^n,$$

oder: $$y = (e^x + e^{-x}) \cos x - 2 \sin x, \text{ etc.},$$

so soll x, d. h. die Wurzel nach aufsteigenden Potenzen von y gefunden werden:

$$x = A + By + Cy^2 + Dy^3 + \ldots$$

und die Wurzel x wird wirklich gefunden, wenn die ihr entsprechende Reihe nur einen bestimmten Werth giebt, d. h. wenn sie convergirt. Diese Methode ist längst bekannt, und ist von La Grange und Anderen angewendet worden.

Sie führt jedoch selten zum Ziele, und auch dann, wenn es geschieht, nur wie durch einen Zufall. Man ist bei ihr von dem

gegebenen Werthe y abhängig, und dann kann es sich treffen, dass die Reihe nicht convergirt; denn die Grösse y braucht nur so beschaffen zu sein, dass sie den Bedingungen der Convergenz der Reihen nicht entspricht. Dann nützt es nichts, die Wurzel x in einer nach y entwickelten Reihe zu haben, da man den Werth dieser Reihe selbst nicht bestimmen kann. Hat aber die Gleichung etwa gar keine reelle Wurzel, dann mag y so klein sein, wie immer, es kann doch kein reeller Werth von x gefunden werden, weil keiner existirt, d. h. die Reihe:

$$x = A + By + Cy^2 + \ldots$$

kann dennoch nimmermehr convergiren.

Ueberhaupt tritt bei dieser Methode, wie bei allen analogen Verfahrungsweisen, das ein, was bei der Quadratur des Kreises, oder bei der Cardan'schen Formel für algebraische Gleichungen des dritten Grads etc. eintritt. Man merkt am Ende, dass man etwas Unmögliches verlangt. Eine algebraische Gleichung des n^{ten} Grades hat n Wurzeln, und man verlangt eine allgemeine Reihe, die *eine* Wurzel geben soll. Eine transcendente Gleichung hat unendlich viele Wurzeln, und man verlangt eine allgemeine Reihe, die gerade eine dieser Wurzeln geben soll. Welche von diesen Wurzeln soll denn einen Vorzug haben? Wäre eine solche Reihe wahrhaft allgemein, so müsste sie alle Wurzeln zugleich geben, dann wäre sie aber unbestimmt, und könnte nicht convergiren, und die Folge wäre, dass sie auch nicht einmal eine einzige Wurzel zu geben im Stande wäre. Giebt sie dennoch eine Wurzel, wie sich in einzelnen Beispielen zeigt, so ist diess Zufall, wie die nachfolgenden Untersuchungen nachweisen werden.

§. 111.

Specielle Reihen für die Wurzeln einer Gleichung.

Anders gestaltet sich die Sache, wenn man nicht eine allgemeine Reihe, sondern wenn man specielle Reihen für jede einzelne Wurzel einer Gleichung verlangt. Sind z. B. vorausgehend die Grenzen: $x = \alpha$ und $x = \beta$, richtig bestimmt, so liegt zwischen ihnen nur eine Wurzel, und es ist kein Widerspruch, dass eine specielle Reihe nur einen Werth liefert, den

sie auch jederzeit liefert, da sie convergent wird, wenn die Grenzen $x = \alpha$ und $x = \beta$ richtig bestimmt sind.

Andrerseits tritt auch nicht der Widerspruch ein, dass eine Gleichung, die etwa n Wurzeln haben soll, in der entwickelten Reihe nur eine liefert. Denn sie liefert wirklich n Wurzeln in n speciellen Reihen, eine Wurzel zwischen den Grenzen $x = \alpha$ und $x = \beta$, eine zweite zwischen den Grenzen $x = \gamma$ und $x = \delta$ u. s. w., die n^{te} Wurzel zwischen den Grenzen der n^{ten} Wurzel $x = \mu$ und $x = \nu$. Man findet so viele specielle Reihen, als es überhaupt reelle Wurzeln einer Gleichung giebt, und diess ist den Gesetzen der Gleichungen vollkommen entsprechend.

Zusatz. Ist die Grösse y so gegeben, dass sie zufällig einer Wurzel zwischen zwei Grenzwerthen $x = \alpha$ und $x = \beta$ entspricht, dann giebt die scheinbar universelle Reihe den einzigen Werth von x, der zwischen den Werthen α und β liegt, etwa zwischen $\alpha = 0$ und $\beta = +b$. Aus diesem Grunde ist Oben bemerkt worden, dass, wenn die allgemeine Reihe dennoch eine brauchbare Wurzel liefert, dieses nur zufällig sei. Sie ist in diesem Falle die specielle Reihe für den Grenzwerth $x = 0$. Und man kann daraus nicht schliessen, dass eine solche Gleichung nur diese einzige Wurzel habe. Denn hat sie noch eine Wurzel zwischen den Werthen $x = \lambda$ und $x = \mu$, so giebt die für diese Grenzwerthe entwickelte Reihe eine zweite Wurzel u. s. w.

§. 112.

Vorbereitung für die Ableitung dieser speciellen Reihen.

Die Ableitung dieser Reihen ist ausserordentlich leicht. In der Voruntersuchung bestimmt man den Näherungswerth einer Wurzel, substituirt ihn in die gegebene Gleichung und findet daraus y. Ist diess geschehen, so entwickelt man die Wurzel x nach aufsteigenden Potenzen von y. Hat die Gleichung einen zweiten Werth, so sucht man den zweiten Näherungswerth, substituirt ihn, bestimmt daraus y, und sucht nun x als zweiten Werth in der nach y entwickelten Reihe. Und so fährt man fort, bis man alle Wurzeln der Gleichung gefunden hat.

Beispiel 1. Gegeben ist die algebraische Gleichung:

$$x^3 - 8x^2 + 8 = 0.$$

Die drei Wurzeln dieser Gleichung liegen zwischen folgenden Grenzwerthen:

1) zwischen: $+1$ und $+2$;
2) zwischen: $+7$ und $+8$;
3) zwischen: 0 und -1.

1) Man substituirt nun $x = 1$, und es wird die Gleichung gleich 1.

Man verwandelt die gegebene Gleichung in:

$$(x^3 - 8x^2 + 7) + 1 = 0$$
$$x^3 - 8x^2 + 7 = -1 = +y.$$

Dadurch ist das erste y bestimmt.

2) Man substituirt den zweiten Näherungswerth $x = 8$ in die gegebene Gleichung: $x^3 - 8x^2 + 8 = 0$, und man erhält: $x^3 - 8x^2 + 8$ für $x = 8$ den Werth 8.

Darum zerlegt man $x^3 - 8x^2 + 8 = 0$ in

$$(x^3 - 8x^2) + 8 = 0$$
$$x^3 - 8x^2 = -8 = +y,$$

also $y = -8$ für den zweiten Werth.

3) Man substituirt den dritten Näherungswerth $x = -1$. Dann giebt $x^3 - 8x^2 + 8$ den Werth (-1). Die gegebene Gleichung zerlegt man in:

$$(x^3 - 8x^2 + 9) - 1 = 0$$
$$x^3 - 8x^2 + 9 = 1 = y,$$

also $y = 1$ als der dritten Wurzel der Gleichung entsprechend.

Beispiel 2. Gegeben ist die transcendente Gleichung:

$$(e^x + e^{-x}) \cos x + 2 = 0.$$

Die Voruntersuchung zeigt, dass eine Wurzel dieser Gleichung zwischen $x = 1{,}8$ und $x = 1{,}9$ liegt.

Substituirt man den Werth $x = 1{,}9$, oder im Bogen ausgedrückt: $= 108^0\,51'\,43''$, so wird:

$$e^x = 6{,}6858948$$
$$e^{-x} = 0{,}1495689$$
$$e^x + e^{-x} = 6{,}8354637,$$

und $$(e^x + e^{-x}) \cos x = -2{,}209829.$$

Die gegebene Gleichung: $(e^x + e^{-x}) \cos x + 2 = 0$ wird daher zerlegt in:

$$\Big((e^x + e^{-x}) \cos x + 2{,}209829\Big) - 0{,}209829 = 0$$

$$(e^x + e^{-x}) \cos x + 2{,}209829 = 0{,}209829 = y,$$

und der Werth $x = 1{,}9$ ist eine Wurzel der neuen Gleichung: $(e^x + e^{-x}) \cos x + 2{,}209829 = 0$, wenn von ihr die Werthe nicht weiter als bis zur 7^{ten} Dezimalstelle verlangt werden.

Aus diesen Beispielen leuchtet ein, dass wenn eine Gleichung $fx = 0$ gegeben ist, diese immer in $(Fx - y) = 0$ zerlegt werden könne, so dass ein Näherungswerth von x in der gegebenen Gleichung $fx = 0$ ein wahrer Werth von x in der veränderten Gleichung $Fx = 0$ wird. Ist α ein Näherungswerth von x, so wird y beliebig klein, um so kleiner, je näher die Grenzen der Wurzeln gezogen werden, die Reihe wird convergent und giebt dann den wirklichen Werth von x für die gegebene Gleichung $fx = 0$.

§. 113.

Ableitung der gesuchten Reihen.

Aus dem Vorhergehenden ist einleuchtend, dass jede gegebene Gleichung $fx = 0$, in $Fx - y = 0$ zerlegt werden kann, und dass ein Näherungswerth der Gleichung $fx = 0$, nämlich $x = a$ eine Wurzel der neuen Gleichung Fx wird, in welchem Falle Fx und y einzeln gleich Null werden, da $Fx = y$ ist. Die Grösse y wird um so kleiner, je näher die Grenzen des Näherungswerthes gezogen sind. Man ist nicht von der Grösse y abhängig, denn diese ist nicht gegeben, man hat es vielmehr in seiner Macht, durch Zerlegung der gegebenen Gleichung die Grösse y so zu gestalten, wie sie am brauchbarsten ist.

Nun sei:

$$x = A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4 + \ldots$$

so wird für $x = a$ die Reihe, da y gleich Null wird:

$$a = A + 0 +,$$

also $A = a = \alpha$.

Nun wird die Reihe:

$$\frac{x - \alpha}{y} = B + Cy + Dy^2 + Ey^3 + \ldots;$$

für $x = a$ fallen alle Glieder bis auf B aus, und es wird:

$$B = \frac{x - a}{y} = \frac{0}{0}.$$

Sucht man diesen Werth durch Differenzirung, so wird:

$$B = \frac{dx}{dy} = \frac{dx}{dFa};$$

wofür man auch $\frac{dx}{F'a} = (\beta)$ schreiben kann.

Die Reihe wird nun:

$$\frac{x - a - \beta y}{y^2} = C + Dy + Ey^2 + \ldots$$

Für $x = a$ wird $y = 0$, es fallen alle Glieder ausser C aus, und es wird:

$$C = \frac{x - a - \beta y}{y^2} = \frac{0}{0}.$$

Sucht man C durch Differenzirung, so wird $C = \frac{dx - \beta dy}{2y\,dy}$, welches wieder für $x = a$, da $dx = \beta dy$ ist, die Form $\frac{0}{0}$ annimmt.

Durch nochmalige Differenzirung findet man:

$$C = \frac{-\beta d^2y}{2(dy)^2 + 2y\,d^2y},$$

welches für $x = a$ in

$$C = \frac{-\beta d^2y}{2(dy)^2} = -\frac{\beta F''a}{2(F'a)^2} = (\gamma)$$

übergeht.

Auf dieselbe Art wird nach dreimaliger Differenzirung von Zähler und Nenner:

$$D = \frac{-\beta d^3y - 6\gamma dy\,d^2y}{2.3(dy)^3} = \delta.$$

U. s. w.

Es ist daher:

$$x = \alpha + \beta\left(= \frac{dx}{dy}\right)y + \gamma = \left(-\frac{\beta d^2y}{2(dy)^2}\right)y^2 + \\ + \delta = \left(\frac{-\beta d^3y - 6\gamma\,dy\,d^2y}{2.3\,dy^3}\right)y^3 + \\ + \varepsilon(= \ldots.)y^4 + \ldots$$

Die obigen Ausdrücke können auch geschrieben werden:

$$\beta = \frac{dx}{dy};\ \gamma = \frac{-\beta d^2y}{d^2(y^2)};\ \delta = \frac{-\beta d^3y - \gamma d^3(y^2)}{d^3(y^3)} \text{ etc.,}$$

vorausgesetzt, dass man nach vollzogener Differenzirung den Werth $x = a$ substituirt, und alle Grössen, die $y = Fa$ zum Factor haben, da $y = 0$ ist, weglässt. Bezeichnet man in dieser Hinsicht die Grösse $y = Fa$ durch F, so wird die Formel:

$$x = \alpha + \beta\left(= \frac{dx}{dF}\right)y + \gamma\left(= \frac{-\beta d^2F}{d^2F^2}\right)y^2 +$$

$$+ \delta\left(= \frac{-\beta d^3F - \gamma d^3F^2}{d^3F^3}\right)y^3 +$$

$$+ \varepsilon\left(= \frac{-\beta d^4F^1 - \gamma d^4F^2 - \delta d^4F^3}{d^4F^4}\right)y^4 + \ldots$$

eine Reihe, in welcher das Fortschreitungsgesetz augenblicklich deutlich wird.

Diess Gesetz gilt allgemein. Der Gang des Beweises ist folgender:

1) Für die Bestimmung jedes nachfolgenden Coefficienten werden alle vorhergehenden Glieder auf die Seite von x gesetzt, so dass für die Bestimmung des Coefficienten M die Reihe wird:

$$x - \alpha - \beta y - \gamma y^2 - \ldots - \lambda y^{n-2} = My^{n-1} + Ny^n + Py^{n+1} + \ldots$$

2) Es wird durch y^{n-1} dividirt, und $x = a$ substituirt, dadurch wird $y = 0$ und es fallen die Glieder $Ny + Py^2 + \ldots$ aus, so dass

$$M = \frac{x - \alpha - \beta y - \gamma y^2 - \ldots - \lambda y^{n-2}}{y^{n-1}} = \frac{0}{0}.$$

Bleiben in diesem Ausdrucke Zähler und Nenner nach $(n-2)$ maligen Differenzirungen einzeln gleich Null, so muss zur $(n-1)$ Differenzirung fortgegangen werden, und es wird:

$$M = \frac{-\beta d^{n-1}y - \gamma d^{n-1}y^2 - \ldots - \lambda d^{n-1}y^{n-2}}{d^{n-1}y^{n-1}} = \mu,$$

so dass:

$$\mu d^{n-1}y^{n-1} = -\beta d^{n-1}y - \gamma d^{n-1}y^2 - \ldots - \lambda d^{n-1}y^{n-2}.$$

3) Es gelte nun das Fortschreitungsgesetz für den Coefficienten μ (wie es für die Coefficienten β, γ, δ . . gilt), so ist zu beweisen, dass es auch allgemein für den Coefficienten N gilt.

4) Es ist:

$$N = \frac{x - \alpha - \beta y - \gamma y^2 - \ldots - \lambda y^{n-2} - \mu y^{n-1}}{y^n}$$

und $x = a$ substituirt, giebt: $N = \frac{0}{0}$.

Durch die erste Differenzirung erhält man:

$$\frac{dx - \beta dy + 0\ldots}{d(y^n)} = \frac{0}{0},$$

da $dx = -\beta dy$, und $d(y^n) = ny^{n-1}dy$ ist.

Durch die zweite Differenzirung erhält man:

$$\frac{-\beta d^2y - \gamma d^2(y^2) + 0\ldots}{d^2(y^n)} = \frac{0}{0}.$$

Durch dreimalige Differenzirung erhält man:

$$\frac{-\beta d^3y - \gamma d^3(y^2) - \delta d^3(y^3) - 0\ldots}{d^3(y^n)} = \frac{0}{0}.$$

Ueberhaupt bleibt der Nenner bis zum n^{ten} Differenzial gleich Null, da er fortwährend y zum Coefficienten hat, und erst im n^{ten} Differenzial ein Glied von der Form: $n\,.\,n-\ldots n-2\ldots2\,.\,1\,dy^n$ enthält, welches nicht mehr Null ist. — Ebenso bleibt der Zähler noch im $(n-1)^{ten}$ Differenziale gleich Null; denn es wird:

$$-\beta d^{n-1}y - \gamma d^{n-1}(y^2) - \ldots - \lambda d^{n-1}(y^{n-2}) - \mu d^{n-1}(y^{n-1}),$$

ein Ausdruck, der nach (2) noch gleich Null ist.

5) Erst wenn zur n^{ten} Differenzirung fortgeschritten wird, wird der Nenner $d^n(y^n)$, und für $x = a$, also für $y = 0$ gleich: $n\,.\,n-1\,.\,n-2\ldots2\,.\,1\,(dy)^n$, ein Ausdruck, der nicht mehr gleich Null ist, so dass

$$N = \frac{-\beta d^n y - \gamma d^n(y^2) - \ldots - \lambda d^n(y^{n-2}) - \mu d^n(y^{n-1})}{d^n(y^n)} = \nu,$$

ein endlicher Ausdruck ist, da kein Glied des Zählers unendlich gross sein kann. Auch kann die Reihe nicht abbrechen, d. h. es können nicht alle Glieder des Zählers gleich Null werden, ausser für algebraische Gleichungen des ersten Grades von der Form $x - a = 0$, also $x = a$. Denn schon für Gleichungen des zweiten Grades wird das letzte Glied: $\mu d^n(y^{n-1}) = \mu d^n(fx^{2n-2})$, und schon $d^n(x^{2n-2})$ wird nicht identisch gleich Null.

Dadurch ist das Fortschreitungsgesetz der Reihe allgemein bewiesen.

Zusatz 1. Die Convergenz der obigen Reihe hängt davon ab, dass $\frac{y}{dy} < 1$ d. h. dass y kleiner als der Zwischenraum zwischen einer Wurzel der Gleichung und einer zweiten ihr zunächst liegenden wird. Diess ist jederzeit durch die Voruntersuchung bereits geleistet. Die Grösse y kann durch Zusammenziehung der Grenzen einer Wurzel beliebig klein gemacht werden, während dy nahezu denselben Werth behält, so dass $\frac{y}{dy}$ beliebig klein gemacht werden kann. Die Formel würde nur in dem Fall illusorisch, wenn mit y zugleich auch dy gleich Null würde. Diess kann dann eintreten, wenn eine Gleichung zwei oder mehrere gleiche Wurzeln hat. Allein es ist das erste Geschäft der Voruntersuchung einer Gleichung, dass man die gleichen Wurzeln ermittelt und eliminirt, so dass bei der Anwendung der Reihe jener Fall (dass $dy = 0$ wird) nicht eintreten kann.

Bei der wirklichen Berechnung nimmt man dann so viele Glieder, als nothwendig sind, um die geforderte Anzahl der Dezimalstellen sicher zu stellen. Gewöhnlich genügen zu diesem Zwecke schon die drei ersten Glieder der Reihe.

Zusatz 2. Ist eine Gleichung $fx = 0$ gegeben, so sollte durch Umkehrung der Gleichung strenggenommen x als Function von Null gegeben werden, $x = \varphi(0)$. Diese Function von Null ist unbestimmt, was auch der Forderung entspricht, dass für x so viele Werthe gefunden werden sollen, als die Gleichung: $fx = 0$ Wurzeln hat.

Transformirt man die Gleichung $fx = 0$ in $Fx = y$, so wird, wenn α ein Näherungswerth ist:

$$x = \alpha + \varphi(y).$$

In dem Falle, dass α eine Wurzel von der gegebenen Gleichung ist, wird $\varphi(y) = \varphi(0) = 0$, und man erhält: $x = \alpha$. Auf dieselbe Art findet man $x = \beta + \varphi(0)$ oder $x = \beta$, wenn β eine zweite Wurzel ist. U. s. w.

Man findet demnach so viele Werthe, als die Gleichung Wurzeln hat, und wird y hinlänglich klein gemacht, so wird auch $x = \alpha + \varphi y$ ein hinlänglich genäherter Werth der Wurzel. Und diess gilt von allen übrigen Wurzeln.

§. 114.

Beispiele.

1) Gegeben ist die Gleichung:

$$x^3 - 8x^2 + 8 = 0.$$

Diess Beispiel wählen wir nur zur Verdeutlichung der Formel. — Wir haben Oben die Näherungswerthe gefunden:

$$x = 1;\ x = 8;\ x = -1.$$

1) Für den Werth $x = 1$ zerlegt sich die Gleichung in:

$$x^3 - 8x^2 + 7 = -1.$$

Es ist daher:

$$y = -1,\ y = F = x^3 - 8x^2 + 7;$$

$$\frac{dy}{dx} = F' = 3x^2 - 16x;\ \text{für } x = 1,\ dy = -13;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F'' = 6x - 16;\ \text{für } x = 1,\ d^2y = -10;$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = F''' = 6;\ d^4y = 0.\ \text{U. s. w.}$$

Nun ist die Wurzel der gegebenen Gleichung:

$$x = \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \ldots$$

Man findet:

$$\alpha = 1;\ \beta = \frac{dx}{dy} = -\frac{1}{13} = -0{,}07692;$$

$$\gamma = -\frac{\beta d^2y}{2(dy)^2} = -\frac{10}{2.13^3} = -0{,}00227;$$

$$\delta = -\frac{\beta d^3y}{6dy^3} - \frac{\gamma d^2y}{dy^2} = -\frac{1}{13^4} - \frac{50}{13^5} = -0{,}00015.$$

Schliesst man mit diesem Gliede die Reihe, so hat man vier Dezimalstellen genau, und es ist, da $y = -1$:

$$x = \alpha - \beta + \gamma - \delta,$$
$$x = 1 + 0{,}07692 - 0{,}00227 + 0{,}00015,$$
$$x = 1{,}0748.$$

2) Zweiter Werth. Für den Näherungswerth $x = 8$ zerlegt sich die Gleichung in:

$$x^3 - 8x^2 = -8 = y.$$

Es wird daher $y = -8$; $dy = 3x^2 - 16x = 64$; $d^2y = 32$; $d^3y = 6$; $d^4y = 0$; also:

$$\beta = \frac{dx}{dy} = +\frac{1}{64},\quad \gamma = -\frac{1}{4.64^2},\quad \delta = \frac{7}{64^4},$$

und: $$x = \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + ..$$

$$x = 8 - \frac{8}{64} - \frac{64}{4.64^2} - 7.\frac{8^3}{64^4}$$

$$= 8 - 0{,}125 - 0{,}0039 - 0{,}00021 = 7{,}8708.$$

3) Dritter Werth. Für $x = -1$ zerlegt sich die Gleichung in:

$$x^3 - 8x^2 + 9 = 1 = y,$$

also: $y = 1$; $dy = 3x^2 - 16x = +19$; $d^2y = 6x - 16 = -22$; $d^3y = +6$; $d^4y = 0$.

Es ist daher:

$$\beta = \frac{dx}{dy} = +\frac{1}{19};\quad \gamma = +\frac{11}{19^3};\quad \delta = -\frac{1}{19^4} + \frac{11.22}{19^5}.$$

Demnach: $$x = \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + ..$$

$$x = -1 + 0{,}0526316$$
$$+ 0{,}0016038$$
$$+ 0{,}0000968 - 0{,}0000076$$
$$x = -0{,}9456.$$

Beispiel 2. Gegeben ist die transcendente Gleichung:

$$(e^x + e^{-x})\cos x + 2 = 0.$$

Diese Gleichung kommt in der Theorie der Schwingungen elastischer Stäbe vor, und sie wird von Poisson in seinem Werke über die Mechanik, und von Stern in der Abhandlung über transcendente Gleichungen behandelt.

Wir haben Oben einen Näherungswerth:

$$x = 1{,}9 = 108^0 51' 43'',$$

und für diesen Näherungswerth $y = +0{,}209829$ gefunden.

Nun ist:

$$dy = (e^x - e^{-x})\cos x dx - (e^x + e^{-x})\sin x dx$$
$$d^2y = -2(e^x - e^{-x})\sin x dx^2$$
$$d^3y = -2(e^x - e^{-x})\cos x dx^3 - 2(e^x + e^{-x})\sin x dx^3$$

u. s. w.,

so dass man immer nur die nämlichen Werthe: $(e^x + e^{-x})$, $(e^x - e^{-x})$, $\sin x$ und $\cos x$ zu berechnen hat.

Berechnet man dy mit Hilfe der Logarithmen, so ist:

$$log\,(e^x - e^{-x}) = log\,6{,}5363259 = 0{,}8153337$$
$$log\,(e^x + e^{-x}) = log\,6{,}8354637 = 0{,}8347679$$
$$log\,cos\,x = 9{,}5095909;\quad log\,sin\,x = 9{,}9760289.$$

Demnach:

$$\frac{dy}{dx} = -\,2{,}113122 - 6{,}468401 = -\,8{,}581523 = \beta$$

und $\beta y = -\,0{,}0244512.$

Ferner ist: $d^2y = 2\,(e^x - e^{-x})\,sin\,x\,dx^2,$

und: $$\gamma y^2 = \frac{-\,\beta d^2y}{2\,(dy)^2} = \frac{-\,\beta(e^x - e^{-x})\,sin\,x\,.\,y^2}{(dy)^2},$$

und abgesehen vom Zeichen:

$$log\,(\gamma y^2) = 2\,log\,y + log\,(e^x - e^{-x}) + log\,sin\,x - 3\,log\,dy$$
$$= 0{,}6437352 - 2 + 0{,}815337 + 9{,}9760289 - 2{,}8006929$$
$$= 0{,}6344009 - 4,$$

so dass $\gamma y^2 = 0{,}0004309.$

Da β und d^2y negativ sind, so muss γy^2 negativ genommen werden.

Der Werth x ist demnach:

$$x = \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \ldots$$
$$= 1{,}9 - 0{,}0244512 - 0{,}0004309$$
$$x = 1{,}87511,$$

ein Werth, der bis zur fünften Dezimalstelle genau ist. Berechnet man noch das Glied δy^3, so erhält man einen bis zur siebenten Dezimalstelle richtigen Werth u. s. f. Stern findet: $x = 1{,}8756$, und Poisson: 1,87511, so dass der von Poisson gefundene Werth richtiger ist. Auch ist die von Poisson befolgte Methode besser, als die von Stern angewendete.

Beispiel 3. Es sei die, auch von Gauss in seiner Theoria motus corp. coel. behandelte Gleichung gegeben:

$$x - e\,sin\,x - M = 0$$

Diese Gleichung ist die Endgleichung des Kepler'schen Problems, und giebt die excentrische Anomalie x aus der mittleren Anomalie M.

Man überzeugt sich leicht, dass der Näherungswerth dieser Gleichung zwischen M und zwischen $M \pm e$ liegt, je nachdem $sin\,M$ positiv oder negativ ist.

Es sei nun: $e = 14^{\circ}3'20''$

$$M = 332^{\circ}28'54''77$$

gegeben, so liegt der Näherungswerth zwischen 332° und 318°.

Substituirt man einen beliebigen Werth α, der zwischen $\alpha = 332^{\circ}$ und $\alpha = 318^{\circ}$ liegt, also etwa $\alpha = 324^{\circ}$, $\alpha = 325^{\circ}$, $\alpha = 326^{\circ}$ etc., so findet man den wahren Werth x aus der Reihe.

Wählen wir mit Gauss den Näherungswerth $\alpha = 326^{\circ}$, und setzen wir den Radius r gleich $206264''47$ (in Secunden des Bogens) so wird $e = 14^{\circ}3'20''$ gleich $50600''$, und es ist:

$$e \sin 326^{\circ} = -7^{\circ}51'35''17,$$

also: $x - e \sin x - M = 0$

$$326^{\circ} + 7^{\circ}51'35''17 - (332^{\circ}28',54''77 - y) = 0.$$

Demnach: $y = -1^{\circ}22'40''40 = -4960''40.$

Die Gleichung $y = x - e \sin x - M$ giebt durch Differenzirung:

$$dy = (1 - e \cos x)\, dx,$$

$$d^2y = + e \sin x\, dx^2, \text{ u. s. w.}$$

Nun ist: $$\beta = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{1 - e \cos 326^{\circ}},$$

$$= -4960''40$$

und: $$y\beta = \frac{-4960''40}{1 - e \cos 326^{\circ}} = -6226''78 = -1^{\circ}43'46''78.$$

Ferner ist: $$\gamma = \frac{-d^2y\, dx}{2(dy)^3} = \frac{-e \sin 326^{\circ}}{2(1 - \cos 326^{\circ})^3},$$

und: $$\gamma y^2 = + 16''185.$$

Berechnet man noch das nachfolgende Glied, so giebt es einen Werth von nur einem Zehntheil einer Secunde, so dass es vernachlässigt werden kann.

Die Wurzel x ist also:

$$x = 326^{\circ} - 1^{\circ}43'46''78 + 16''185$$

$$x = 324^{\circ}16'29''4.$$

Zusatz. Bei der Berechnung des Werthes $(1 - e \cos x)$ muss man sich erinnern, dass 1 der Radius ist, also gleich $206264'',67$ gesetzt wird. So findet man im obigen Beispiele:

$$e \cos 34^{\circ} = 41949'',3,$$

also: $$1 - e \cos 34^{\circ} = 164315'',37.$$

Dieser Werth wiederholt sich im zweiten, dritten und in den folgenden Gliedern.

Beispiel 4. Es sei die (auch von Poisson und Stern behandelte) unendliche Reihe gegeben:

$$0 = 1 - x + \frac{x^2}{(1.2)^2} - \frac{x^3}{(1.2.3)^2} + \frac{x^4}{(1.2.3.4)^2} - ..$$

Man soll die entsprechenden Werthe von x suchen. Algebraische Betrachtungen zeigen, dass einer dieser Werthe zwischen 1 und 2 liege. Nimmt man den Näherungswerth $\alpha = 1{,}4$, und substituirt ihn in die Reihe, so wird: $y = -0{,}0200779$.

Nun ist:

$$\frac{dy}{dx} = -1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2.2.3} + \frac{x^3}{4(2.3)^2} - \frac{x^4}{5(2.3.4)^2} + ..$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2} - \frac{x}{2.3} + \frac{x^2}{3.4.2^2} - \frac{x^3}{4.5.2^2.3^2} + ..$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{1}{2.3} + \frac{x}{2.3.4} - \frac{x^2}{3.4.5.2^2} + .. \text{ etc.}$$

und für $x = 1{,}4$:

$$\frac{dy}{dx} = -0{,}44551; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = +0{,}30390; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = -0{,}11589;$$

und $\beta y = +0{,}04506; \quad \gamma y^2 = +0{,}00069; \quad \delta y^3 = -0{,}00001;$

so dass x gleich wird:

$$x = \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + .. = 1{,}44574.$$

Poisson findet: $x = 1{,}4457$, Stern: $x = 1{,}4458$. Will man noch das Glied εy^4 berechnen, in welchem Falle man aber auch y, dy, d^2y.. auf mehr Dezimalstellen berechnen muss, so findet man den Werth bis zu 8 Dezimalstellen genau.

Zusatz. Nach diesem Verfahren findet man die Wurzeln der Gleichungen und Reihen in einem Zuge, während man nach den andern Verfahrungsweisen nur successiv Dezimalstelle um Dezimalstelle berechnet und jedesmal den neuen Werth in die gegebene Gleichung substituirt, um den neuen Rest y zu bestimmen. — Die gefundene Reihe bietet bei den wirklichen Berechnungen keine Schwierigkeit dar, und erscheint complicirter als sie wirklich ist. Es wiederholen sich nämlich in den nachfolgenden Coefficienten die bereits in dem früheren gefundenen Werthe von $F'x$, so dass, wenn diese einmal gefunden sind, die Berechnung sehr einfach von Statten geht.

§. 115.

Reihen für Urfunctionen.

Man kann diese Methode auch zur Herstellung der Reihen für Urfunctionen anwenden, und die so gefundenen Reihen sind allgemeiner, als die aus der Maclaurin'schen Formel abgeleiteten.

Beispiel 1. Gegeben ist: $log\, x = z$.

Ist α ein Werth, der nahezu gleich x ist, so wird $log\, x - log\, \alpha = z - log\, \alpha$ eine kleine Zahl. Setzt man diese gleich y, so hat man die Gleichung $log\, x - log\, \alpha = y$; für $x = \alpha$ wird $y = 0$, und es tritt die Bedingung unserer Reihe ein.

Nun ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = +\frac{2}{x^3}, \quad \text{u. s. w.}$$

und es werden für $x = \alpha$:

$$\beta = \alpha, \quad \gamma = \frac{\alpha}{2}, \quad \delta = \frac{\alpha}{2.3}, \quad \text{u. s. w.}$$

so dass:

$$x = \alpha + \alpha y + \frac{\alpha y^2}{2} + \frac{\alpha y^3}{2.3} + \ldots$$

$$x = \alpha + \alpha(log\, x - log\, \alpha) + \frac{\alpha}{2}(log\, x - log\, \alpha)^2 + \frac{\alpha}{2.3}(log\, x - log\, \alpha)^3 + \ldots$$

eine viel convergentere Formel, als die gewöhnlich gebrauchte, die für den speciellen Werth $\alpha = 1$ hervorgeht:

$$x = 1 + log\, x + \frac{1}{2} log\, x^2 + \frac{1}{2.3} log\, x^3 + \ldots$$

Beispiel 2. Es sei gegeben: $e^x = z$.

Es soll x (der Logarithmus) durch z ausgedrückt werden.

Da $e^x - e^\alpha = z - e^\alpha = y$, und für $x = \alpha$ die Gleichung $e^x - e^\alpha = y$ beiderseitig gleich Null wird, so kann x nach aufsteigenden Potenzen von y ausgedrückt werden.

Es wird $\frac{dy}{dx} = e^x$; $\frac{d^2y}{dx^2} = e^x$ etc., also:

$$\beta = \frac{1}{e^x}, \quad \gamma = \frac{1}{2(e^x)^2}, \quad \delta = \frac{1}{3(e^x)^3} \quad \text{u. s. w.,}$$

so dass:

$$x = \alpha + \frac{y}{e^\alpha} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{e^\alpha}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{y}{e^\alpha}\right)^3 - \ldots$$

$$x = \alpha + \left(\frac{z - e^\alpha}{e^\alpha}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{z - e^\alpha}{e^\alpha}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{z - e^\alpha}{e^\alpha}\right)^3 - \ldots$$

$$x = \alpha + \left(\frac{e^x - e^\alpha}{e^\alpha}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{e^x - e^\alpha}{e^\alpha}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{e^x - e^\alpha}{e^\alpha}\right)^3 - \ldots$$

eine ebenfalls viel convergentere Reihe, als die specielle, die für $\alpha = 0$ hervorgeht:

$$x = (z-1) - \frac{1}{2}(z-1)^2 + \frac{1}{3}(z-1)^3 - \ldots$$

Beispiel 3. Es sei gegeben: $\sin x = z$.

Man bildet aus $\sin x - \sin \alpha = z - \sin \alpha$ folgende Reihe:

$$x = \alpha + \left(\frac{\sin x - \sin \alpha}{\cos \alpha}\right) + \frac{1}{2}\frac{\sin \alpha (\sin x - \sin \alpha)^2}{\cos \alpha^3} +$$

$$+ \frac{1}{2.3}\left(\frac{(\sin x - \sin \alpha)^3}{\cos \alpha^3} + \frac{3 \sin \alpha^2 (\sin x - \sin \alpha)^3}{\cos \alpha^5}\right) + \ldots$$

aus welcher, für den Werth $\alpha = 0$, die gewöhnliche und specielle Reihe hervorgeht:

$$x = \sin x + \frac{1}{2.3}\sin x^3 + \ldots$$

U. s. w.

Zusatz. Vertauscht man in dieser Formel den Näherungswerth α mit einer beliebigen Veränderlichen v, d. h. nimmt man nicht mehr Rücksicht auf den Näherungswerth, sondern nur noch auf das allgemeine Gesetz der Reihen, so erhält man:

(1) $$x = v + v(\log x - \log v) + \frac{v}{2}(\log x - \log v)^2 +$$
$$+ \frac{v}{2.3}(\log x - \log v)^3 + \ldots$$

(2) $$x = v + \left(\frac{e^x - e^v}{e^v}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{e^x - e^v}{e^v}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{e^x - e^v}{e^v}\right)^3 - \ldots$$

(3) $$x = v + \left(\frac{\sin x - \sin v}{\cos v}\right) + \frac{1}{2}\frac{\sin v (\sin x - \sin v)^2}{\cos v^3} +$$
$$+ \frac{1}{2.3}\left(\frac{(\sin x - \sin v)^3}{\cos v^3} + \frac{3 \sin v^2 (\sin x - \sin v)^3}{\cos v^5}\right) + \ldots$$

etc. etc.,

so dass man jede Grösse x durch ihre Functionen und durch beliebige Functionen anderer Veränderlichen ausdrücken kann, wodurch die reichste Quelle für Formeln aller Art geöffnet wird.

Diese Reihen sind weit allgemeiner, als die Taylor'schen und Maclaurin'schen; denn sie geben so viele Werthe der Grösse x, als in der gegebenen Function Wurzeln enthalten sind. Denn gerade so viele Näherungswerthe v können in die Reihen substituirt werden, die eben so oft convergent werden.

§. 116.

Weitere allgemeine Reihen für Werthe einer gegebenen Gleichung.

Um die Begriffe zu fixiren, schliesse ich hier an die früheren Formeln und Beispiele an. Wir haben z. B. die Gleichung $x^3 - 8x^2 + 8 = 0$ für den Näherungswerth $x = 1$ so abgeändert, dass wir $x^3 - 8x^2 + (7 + 1) = 0$, $x^3 - 8x^2 + 7 + y = 0$ gesetzt haben. Die ganze Veränderung bestand darin, dass wir das letzte Glied der Gleichung zerlegt hatten. Diess geht auch bei Gleichungen an, die kein von x unabhängiges Glied haben, z. B. $e^x - \sin x = 0$, indem man sich diess Glied durch Null ergänzt denkt, und $e^x - \sin x + 0 = 0$; $e^x - \sin x + (\alpha - y) = 0$ schreibt. Allein gerade so, wie wir im obigen Beispiele das letzte Glied 8 zerlegt haben, können wir auch jedes andere Glied z. B. x^3, oder $-8x^2$ zerlegen und es gehen für den Näherungswerth $x = 1$ folgende Gleichungen hervor:

$$(x^3 - 8x^2 + 7) + 1 = 0,$$
$$(x^3 - 9x^2 + 8) + 1x^2 = 0,$$
$$(x^3 - mx^3 - 8x^2 + 8) + mx^3 = 0,$$

und für die drei eingeschlossenen Gleichungen, wenn man $m = 1$ setzt,

$$x^3 - 8x^2 + 7; \quad x^3 - 9x^2 + 8; \quad -8x^2 + 8;$$

ist der Näherungswerth $x = 1$ eine wahre Wurzel, welche die eingeschlossenen Gleichungen zu Null macht.

Ebenso kann man jede transcendente Gleichung verschieden zerlegen.

Es sei z. B. gegeben: $x - e \sin x - M = 0$, so kann man sie zerlegen in:

(1) $\Big(x - e\sin x - (M - k)\Big) - k = 0,$

(2) $\Big(x - (e+\varrho)\sin x - M\Big) + \varrho\sin x = 0,$

(3) $(x - mx - e\sin x - M) + mx = 0,$

(4) $(x + \varkappa x^{\nu} - e\sin x - M) - \varkappa x^{\nu} = 0,$

etc. etc.

Setzt man nun:

in (1) den ausgeschlossenen Werth: $-k$,
in (2) den ausgeschlossenen Werth: $+\varrho\sin x$,
in (3) den ausgeschlossenen Werth: $+mx$,
in (4) den ausgeschlossenen Werth: $-\varkappa x^{\nu}$

beziehungsweise $=-y$, $=-y\sin x$, $=-xy$, $=-x^{\nu}y$, und bezeichnet man den Coefficienten von y allgemein durch φx, so kann jede Gleichung $fx=0$ zerlegt werden in $Fx - y\varphi x = 0$, so dass man die Wurzeln der neuen Gleichung Fx bereits kennt, für welche Wurzeln dann die Grösse $y\varphi x$ ebenfalls gleich Null wird. Unsere erste Formel ist demnach nur ein besonderer Fall dieser allgemeinen Formel, indem in ihr $\varphi x = 1$ genommen wurde.

Man soll nun x, eine Wurzel der gegebenen Gleichung: $fx=0$ nach aufsteigenden Potenzen von y entwickeln.

§. 117.

Entwicklung der Reihe.

Die geforderte Reihe ist sehr leicht abzuleiten. Denn da $Fx - y\varphi x = 0$, so ist $y = \dfrac{Fx}{\varphi x} = \Psi x$, also $\Psi x - y = 0$, und diess giebt nach der ersten Reihe, indem man Ψ statt F substituirt:

$$x = \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \varepsilon y^4 + \ldots,$$

und in analoger Bezeichnungsweise:

$$x = \alpha + \beta\left(=\frac{dx}{d\Psi}\right)y + \gamma\left(=\frac{-\beta d^2\Psi}{d^2\Psi^2}\right)y^2 +$$
$$+\delta\left(=\frac{-\beta d^3\Psi - \gamma d^3\Psi^2}{d^3\Psi^3}\right)y^3 +$$
$$+\varepsilon\left(=\frac{-\beta d^4\Psi - \gamma d^4\Psi^2 - \delta d^4\Psi^3}{d^4\Psi^4}\right)y^4 + \ldots$$

so dass in $d\Psi$, $d^2\Psi \ldots d^2\Psi^2 \ldots d^4\Psi^4 \ldots$ alle Grössen, welche nach der Substitution $x=\alpha$ verschwinden, als weggelassen gedacht werden.

Zusatz. Bei der wirklichen Differenzirung wird, da $\Psi = \frac{Fx}{\varphi x}$ ist:

$$d\Psi = \frac{F'x}{\varphi x} - \frac{Fx}{\varphi x^2}\varphi' x,$$

und, da Fx für $x = \alpha$ verschwindet:

$$d\Psi = \frac{F'x}{\varphi x}.$$

Eben so wird, wenn $F'x$, $\varphi' x$ die ersten, $F''x$, $\varphi'' x$ die zweiten Differenzialien ausdrücken:

$$d^2\Psi = \frac{F''x}{\varphi x} - \frac{2F'x\,\varphi' x}{(\varphi x)^2}$$

$$d^3\Psi = \frac{(\varphi x)^2 F'''x - 3\varphi x\,\varphi' x\,F''x - 3\varphi x\,\varphi'' x\,F'x + 6(\varphi' x)^2 F'x}{(\varphi x)^3}$$

u. s. w.

wo man auch der Kürze halber überall statt Fx, φx etc. setzen kann: F, F', F'' .. φ, φ', φ'' ..., wodurch die Formel gedrungener und übersichtlicher erscheint.

Für $\varphi x = 1$ werden $\varphi' x$, $\varphi'' x$ etc. sämmtlich gleich Null, und die neue Formel kommt auf die frühere zurück.

§. 118.

Beispiele.

Bei der wirklichen Berechnung der Wurzeln einer Gleichung oder Reihe gewinnt man durch diese Formel im Vergleich zur ersten wenig oder gar nichts. Wenn auch y kleiner wird, so wird φx um so grösser. Um jedoch die Anwendung der Formel zu zeigen, wollen wir auf die früheren Beispiele zurückkommen.

1) Gegeben sei die Gleichung: $x^3 - 8x^2 + 8 = 0$:

Für einen Näherungswerth, z. B. $x = 8$, zerlegt man z. B. das erste Glied x^3 in:

$$\left(\frac{63}{64}x^3 - 8x^2 + 8\right) + \frac{1}{64}x^3 = 0,$$

und 8 ist eine Wurzel der eingeklammerten Gleichung.

Es ist demnach $y\varphi x = -\frac{1}{64}x^3$, also $y = -\frac{1}{64}$, $\varphi x = x^3$.

Nun ist: $Fx = \frac{63}{64}x^3 - 8x^2 + 8,$

$$F'x = \frac{3\,.\,63}{64}x^2 - 16x,$$

und für $x = 8$: $F'x = 61$,

$$F''x = \frac{6 \,.\, 63}{64} x - 16,$$

und für $x = 8$: $F''x = \frac{250}{8}$.

Ferner ist: $\varphi x = x^3$, für $x = 8$: $\varphi x = 8^3$,

$$\varphi' x = 3x^2, \text{ für } x = 8: \varphi' x = 3 \,.\, 8^2,$$
$$\varphi'' x = 6x, \text{ für } x = 8: \varphi'' x = 6 \,.\, 8.$$

Die Wurzel der gegebenen Gleichung wird nun:

$$x = \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \ldots$$

$$\beta = \frac{dx}{d\Psi} = \frac{\varphi x}{F'x} = \frac{8^3}{61},$$

und $$\beta y = -\frac{8^3}{61 \,.\, 64} = -\frac{8}{61} = -0{,}13114 \ldots$$

$$\gamma = -\frac{\beta d^2\Psi}{2 (d\Psi)^2} = +\frac{55 \,.\, 8^7}{(61)^4},$$

und $$\gamma y^2 = \frac{55 \,.\, 8^7}{(61)^4} \cdot \frac{1}{8^4} = \frac{55 \,.\, 8^3}{(61)^4} = +0{,}00203.$$

Schliesst man mit diesem Gliede die Rechnung, so hat man die Wurzel auf 4 Dezimalstellen genau und man findet: $x = 7{,}8708$, wie Oben.

2) Gegeben ist: $x - e \sin x - M = 0$.

Es sei wieder: $e = 14^\circ 3' 20''$

$$M = 332^\circ 28' 54'',77,$$

und $\alpha = 326^\circ$ ein Näherungswerth.

Es soll nun die Reihe für $\varphi x = \sin x$ entwickelt werden. In diesem Falle muss man das zweite Glied der Gleichung $-e \sin x$ zerlegen.

Nun ist, wie Oben, für $\alpha = 326^\circ$ die Gleichung:

$$x - e \sin x - M = 0,$$
$$326^\circ + 7^\circ 51' 35''17 - 332^\circ 28' 54''77 = 1^\circ 22' 40''40,$$

also: $326^\circ + 7^\circ 51' 35''17 - 1^\circ 22' 40''40 - 332^\circ 28' 54''77 = 0$,

daher: $x - e \sin x \pm y \sin x - M = \pm y \sin x$, und es ist:

$$\pm y \sin x = -1^\circ 22' 40''40 = -4960'',40,$$

also: $$\pm y = \frac{-4960''40}{\sin 326^\circ} = +8869''3.$$

Die Gleichung wird daher:

$$x - (e - y)\sin x - M = +y\sin x$$

und:
$$x - (e + y)\sin x - M = -y\sin x,$$

oder, da $e - y = 41730'' = k$,
$e + y = 59469'' = \lambda$:

(1) $x - k\sin x - M = y\sin x,$

(2) $x - \lambda\sin x - M = -y\sin x.$

Man kann nun nach (1) oder (2) die Wurzel x berechnen. In beiden Fällen erhält man eine weniger convergente Reihe, als man erhalten hätte, wenn man statt $e\sin x$ den Werth M zerlegt haben würde.

Berechnet man die Wurzel, so ist: $\varphi x = \sin 326^\circ$,

$Fx = x - k\sin x - M$, oder $Fx = x - \lambda\sin x - M$,

daher: $F'x = 1 - k\cos x$, oder $F'x = 1 - \lambda\cos x$,

$\varphi x = \sin x$, $\varphi' x = \cos x$, $\varphi'' x = -\sin x$ etc.

Substituirt man diese Werthe in die allgemeine Formel, so hat die Berechnung keine weitere Schwierigkeit.

§. 119.

Entwicklung dieser Reihen für die Urfunctionen.

Die allgemeine Reihe bis zum dritten Glied ist:

$$x = \alpha + \frac{\varphi x}{F'x}y + \left(\frac{\varphi' x\,\varphi x}{(F'x)^2} - \frac{F''x\,\varphi x^2}{2(F'x)^3}\right)y^2 + \ldots$$

1) Gegeben sei: $\log x = z$.

Es ist $(1+y)\log x - z = y\log x$, und, $(1+y) = k$ gesetzt, $k\log x - z = y\log x$; und ist α eine Wurzel der Gleichung: $k\log x - z = 0$, so wird x in nachfolgender Reihe gefunden.

Da $\varphi x = \log x$, $\varphi' x = \frac{1}{x}$ etc.,

$$Fx = k\log x - z,\quad F'x = \frac{k}{x},\quad F''x = -\frac{k}{x^2}\text{ etc.}$$

ist, so wird:

$$x = \alpha + \frac{\alpha\log\alpha}{k}y + \frac{\alpha\log\alpha}{k^2}\left(1 + \frac{\log\alpha}{2}\right)y^2 + \ldots$$

oder:

$$x = v + v\log v\,.\,\frac{y}{1+y} + v\log v\left(1 + \frac{\log v}{2}\right)\frac{y^2}{(1+y)^2} + \ldots$$

Beispiel zur Verdeutlichung. Es werde die Zahl gesucht, die zum natürlichen Logarithmus 3 gehört. —

Da $log\,nat.\,20 = 2{,}995732\,..$ ist, so substituirt man $\alpha = v = 20$, und man hat:

$$(1 + y)\,.\,2{,}995732 - 3 = 0,$$

also:
$$(1 + y) = \frac{3}{2{,}995732} = 1{,}0014\,.. = k,$$

und $y = 0{,}0014\,..$

also:

$$x = 20 + 20\,.\,2{,}99\,..\frac{0{,}0014\,..}{1{,}0014} + 20\,.\,2{,}99\,..\left(1 + \frac{2{,}99\,..}{2}\right).\left(\frac{0{,}0014}{1{,}0014}\right)^2 + ..$$

Diese Werthe addirt, geben die Zahl, deren natürlicher Logarithmus gleich 3 ist.

2) Gegeben ist: $e^x = z$.

Man setze $(1+y)\,e^x - z = ye^x$; $ke^x - z = ye^x$, so ist:

$$\varphi x = e^x,\quad \varphi' x = e^x \text{ etc.},$$
$$Fx = ke^x - z,\quad F'x = ke^x,\quad F''x = ke^x \text{ etc.},$$

also:
$$x = \alpha + \frac{y}{k} + \frac{1}{2}\frac{y^2}{k^2} + \cdots$$

$$x = \alpha + \frac{y}{1+y} + \frac{1}{2}\frac{y^2}{(1+y)^2} + \cdots$$

3) Gegeben ist: $sin\,x = z$.

Es ist: $(1+y)\,sin\,x - z = y\,sin\,x$, $k\,sin\,x - z = y\,sin\,x$, also:

$$\varphi x = sin\,x,\quad \varphi' x = cos\,x \text{ etc.}$$
$$Fx = k\,sin\,x - z,\quad F'x = k\,cos\,x,\quad F''x = -k\,sin\,x \text{ etc.},$$

also, wenn man den Näherungswerth v und $k = (1+y)$ substituirt:

$$x = v + \frac{sin\,v}{cos\,v}\cdot\frac{y}{1+y} + \left(\frac{sin\,v}{cos\,v} + \frac{sin\,v^3}{2\,cos\,v^3}\right)\frac{y^2}{(1+y)^2} + \cdots$$

Auf gleiche Weise lassen sich ganz allgemeine Reihen für die übrigen Urfunctionen entwickeln. Ich bemerke auch hier, dass diese Reihen eben so oft convergent werden, als v ein Näherungswerth der Functionen: $log\,x = z$, $e^x = z$, $sin\,x = z$ etc. ist, dass also die Reihen nicht bloss eine, sondern die sämmtlichen Wurzeln der Functionen liefern, wenn der Reihe nach die sämmtlichen Näherungswerthe, seien sie nun reelle oder complexe Grössen, substituirt werden.

Zusatz. Es ist einleuchtend, dass in gleicher Weise, wie für die einfachen Functionen: $log\,x$, e^x, $sin\,x$ etc., auch für die

zusammengesetzten, z. B. $e^x log\, x$, $\frac{e^x}{sin\, x}$ etc., Reihen nach beliebigen Veränderlichen entwickelt werden können. Das Verfahren ist das nämliche, wie bei den einfachen Functionen.

§. 120.

Andere Schreibart dieser Reihen.

Führt man die Bezeichnungen ein: F statt Fa, F' statt $F'a$ etc., eben so φ statt $\varphi x = \varphi\alpha$, φ' statt $\varphi'\alpha$ etc., so können die zwei allgemeinen Umkehrungsformeln auch auf folgende Art geschrieben werden.

1) Statt der ersten Formel:

$$x = \alpha + \beta\left(= \frac{dx}{dy}\right)y + \gamma\left(= \frac{-\beta d^2y}{2\,(dy)^2}\right)y^2 +$$
$$+ \delta = \left(\frac{-\beta d^3y - \gamma d^3y^2}{2.3\,dy^3}\right)y^3 + \ldots$$

kann geschrieben werden:

$$x = \alpha + \frac{1}{F'}y + \frac{1}{F'}d\left(\frac{1}{F'}\right)\frac{y^2}{2} +$$
$$(A) \qquad + \left(\frac{1}{F'}d\left(\frac{1}{F'}d\left(\frac{1}{F'}\right)\right)\right)\frac{y^3}{2.3} + \ldots$$

eine Formel, die in sehr eleganter Gestalt erscheint, und deren Fortschreitungsgesetz sogleich in die Augen springt.

2) Statt der zweiten Formel:

$$x = \alpha + \beta\left(= \frac{dx}{d\Psi}y\right) + \gamma\left(= \frac{-\beta d^2\Psi}{d^2\Psi^2}\right)y^2 + \ldots$$

kann geschrieben werden, da $\Psi = \frac{Fx}{\varphi x} = \frac{F}{\varphi}$:

$$x = \alpha + \frac{\varphi}{F'}y + \frac{1}{F'}d\left(\frac{\varphi^2}{F'}\right)\frac{y^2}{2} +$$
$$(B) \qquad + \left(\frac{1}{F'}d\left(\frac{1}{F'}d\left(\frac{\varphi^3}{F'}\right)\right)\right)\frac{y^3}{2.3} + \ldots$$

eine ebenfalls sehr elegante und übersichtliche Formel.

Da im Vorhergehenden die Allgemeingültigkeit dieser Formeln bewiesen worden ist, so gelten sie auch in dieser Schreibart ganz allgemein für jedes Glied.

Zusatz 1. Wir bemerken, dass sich ganz analoge Formeln bei der Vertauschung der unabhängigen Veränderlichen ergeben haben.

Zusatz 2. So einfach und schön diese Formeln erscheinen, so sind doch für wirkliche Berechnungen und Reihen-Entwicklungen die ursprünglichen Formeln vorzuziehen, da sie die Operationen ausgeführt enthalten, die in den letzteren nur angedeutet sind. Dem Umstande, dass sie die auszuführenden Operationen bloss andeuten, verdanken sie auch ihr einfaches und elegantes Aussehen.

§. 121.

Reihen, die nach zwei oder mehreren Veränderlichen geordnet sind.

Es hält nicht schwer, eine in einer Gleichung oder Reihe gegebene Grösse nach aufsteigenden Potenzen mehrerer Veränderlichen zu entwickeln.

Um die Begriffe zu fixiren, wähle ich eines der früheren Beispiele.

Ist die Gleichung gegeben:

$$x^3 - 8x^2 + 8 = 0,$$

so kann man die beiden Glieder: x^3, $8x^2$, oder alle drei: x^3, $8x^2$, 8, zerlegen.

1) Zerlegt man die Gleichung für den Näherungswerth: $\alpha = 8$ etwa in:

$$\frac{65}{64}x^3 - \frac{66}{8}x^2 + 8 = \frac{1}{64}x^3 - \frac{2}{8}x^2,$$

so ist $\alpha = 8$ eine Wurzel der neuen Gleichung:

$$F = \frac{65}{64}x^3 - \frac{66}{8}x^2 + 8,$$

und es wird: $F = yx^3 + zx^2$,

oder allgemein: $F = y\varphi x + z\psi x$.

Werden mehrere Glieder einer Gleichung zerlegt, so geht die neue allgemeine Gleichung hervor

$$F = y\varphi x + z\psi x + v\vartheta x + \ldots$$

2) Bei wirklichen Problemen sind die neuen Veränderlichen $y, z, v..$ Functionen von einander, und zwar von der Form: $z = \varkappa y$, $v = \lambda y$ etc. Substituirt man diese, so erhält man:

$$F = y(\varphi x + \varkappa\psi x + \lambda\vartheta x + ..),$$

welches wieder auf die frühere Form: $F = y\Phi x$ zurückkommt, und nach dieser entwickelt werden muss.

Im gegebenen Falle ist:

$$y = \frac{F}{\Phi x} = \Psi x \quad \text{und} \quad \Phi x = \varphi x + \varkappa\psi x + \lambda\vartheta x + ..$$

dessen Differenzial keine Schwierigkeit hat, da $\varkappa, \lambda, ..$ constante Grössen sind.

3) Im angeführten Beispiel ist:

$$y\varphi x = \frac{1}{64}x^3; \quad z\psi x = -\frac{16}{64}x^2,$$

also: $y = \frac{1}{64}$, $16y = -z$; $\varphi x = x^3$, $\psi x = x^2$,

$$\Phi x = x^3 - 16x^2; \quad \Phi' x = 3x^2 - 32x, \text{ etc.},$$

$$F = \frac{65}{64}x^3 - \frac{66}{8}x^2 + 8,$$

$$F' = \frac{65}{64} \cdot 3x^2 - \frac{66}{8} \cdot 2x,$$

$$F'' = \frac{65}{64} \cdot 6x - \frac{132}{8} \text{ u. s. w.}$$

Für den Näherungswerth $x = 8$ wird:

$$F = 0, \quad F' = 63, \quad F'' = \frac{258}{8}, ..$$

$$\Phi x = -8^3, \quad \Phi' x = -8^2, ..$$

also: $$x = \alpha + \frac{\Phi x}{F'}y + \left(\frac{\Phi x\,\Phi' x}{(F')^2} - \frac{F''(\Phi x)^2}{2(F')^3}\right)y^2 + ..$$

$$x = 8 - \frac{8}{63} + \frac{(504 - 1022)}{63^3} + ..$$

$x = 7{,}870\ldots$, wie Oben.

Zusatz 1. Will man die Reihe ausdrücklich in der Form haben, dass $y, z, v..$ in ihr erscheinen, dann substituirt man in

$$\Phi x = \varphi x + \varkappa\psi x + \lambda\vartheta x + ..$$

die Werthe $\varkappa = \frac{z}{y}$, $\lambda = \frac{v}{y}$ etc. und substituirt überall in Φx,

$\Phi' x$, $\Phi'' x$ die gefundenen Werthe statt $\varkappa$, λ u. s. w. Die Formel wird aber dadurch weder einfacher noch übersichtlicher.

Zusatz 2. Es ist einleuchtend, dass die Reihe eben so gut nach aufsteigenden Potenzen von z, v .. wie nach aufsteigenden Potenzen von y entwickelt werden kann. Will man die Reihe z. B. nach aufsteigenden Potenzen von z entwickeln, so substituirt man $y = \mu z$, $v = \nu z$, .. und bildet durch Ausscheidung des Factors z die Gleichung:

$$F = z(\mu \varphi x + \psi x + \nu \vartheta x + ..) = z \Phi x.$$

Auf dieselbe Art verfährt man, wenn man die Reihe nach aufsteigenden Potenzen einer andern Veränderlichen entwickeln will.

§. 122.

Die Euler'sche Formel.

Die Formel (A) des vorhergehenden §. 120 ist die Euler'sche Formel, die derselbe nur in anderer Bezeichnung und Ableitung gegeben hat.

Seine Ableitung ist folgende:

Es sei u eine Function von x, und $u = 0$, so ist $fx = 0$, eine Gleichung oder Reihe, in welcher die Grösse x bestimmte Wurzeln hat. Ist nun a ein Näherungswerth einer Wurzel, so wird, wenn a statt x in der Function u substituirt wird, u eine kleine Grösse. Die wahre Wurzel, die u zu Null macht, sei $a + h$. Substituirt man statt x den Werth $x + h$ in die Gleichung u, so erhält man nach dem Taylor'schen Satze:

$$u + \Delta u = u + \frac{du}{da}\frac{h}{1} + \frac{d^2u}{da^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{da^3}\frac{h^3}{1.2.3} + .. = 0.$$

Denkt man sich nun umgekehrt x als Function von u, d. h. denkt man sich die Gleichung aufgelöst, so hat man $x = \psi u$, und vermehrt man u um die Grösse g, so erhält man:

$$x + \Delta x = x + \frac{dx}{du}\frac{g}{1} + \frac{d^2x}{du^2} \cdot \frac{g^2}{1.2} + \frac{d^3x}{du^3}\frac{g^3}{1.2.3} + ..$$

Setzt man ferner $g = -u$, dann wird:

$$x + \Delta x = \psi(u + g) = \psi(u - u),$$

d. h. $(x + \Delta x)$ wird die Grösse, die der Function $u = 0$ entspricht, d. h. eine Wurzel der gegebenen Gleichung. Bezeichnet man diess

$(x+\Delta x)$ mit x' und mit x den Näherungswerth der Gleichung $u=0$; setzt man ferner in obige Formel $-u$ statt g, so wird die Wurzel

$$x' = x - \frac{dx}{du}\frac{u}{1} + \frac{d^2x}{du^2}\frac{u^2}{1.2} - \frac{d^3x}{du^3}\frac{u^3}{1.2.3} + \ldots$$

Nun ist $\frac{dx}{du}$ (welches man nicht kennt, da $x=\psi u$ nicht gegeben ist) gleich $\frac{1}{\frac{du}{dx}}$ und $\frac{du}{dx}$ kennt man, da $u=0$ die gegebene Gleichung ist. Daraus folgt:

$$\frac{d^2x}{du^2} = \frac{1}{du}d\left(\frac{1}{\frac{du}{dx}}\right)$$

$$\frac{d^3x}{du^3} = \frac{1}{du}d\left(\frac{d^2x}{du^2}\right) = \frac{1}{du}d\left(\frac{1}{du}d\frac{1}{\frac{du}{dx}}\right)$$

u. s. w.

Bezeichnet man für den Näherungswerth $x=\alpha$ die Gleichung u mit F, $\frac{du}{dx}$ mit F', so wird:

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{F'};\quad \frac{d^2x}{du^2} = \frac{1}{F'}d\left(\frac{1}{F'}\right)$$

$$\frac{d^3x}{du^3} = \frac{1}{F'}\left(d\left(\frac{1}{F'}d\left(\frac{1}{F}\right)\right)\right) \text{ etc.,}$$

und die Euler'sche Formel wird:

$$x' = a - \frac{1}{F'}u + \frac{1}{F'}d\left(\frac{1}{F'}\right)\frac{u^2}{1.2} - \frac{1}{F'}d\left(\frac{1}{F'}d\frac{1}{F'}\right)\frac{u^3}{1.2.3} + \ldots$$

eine Formel, die mit der Oben gegebenen ganz übereinstimmt, wenn man $-y$ statt u substituirt.

Zusatz. Wie man leicht einsieht, ist die Euler'sche Formel noch unentwickelter, als

$$x' = a + \frac{1}{F'}y + \frac{1}{F}d\left(\frac{1}{F'}\right)\frac{y^2}{1.2} + \ldots$$

und selbst diese muss erst noch entwickelt werden, wenn sie zur Berechnung tauglich sein soll.

§. 123.

Die Formel von Paoli.

Paoli hat die nämliche Formel nur unter anderer Bezeichnung gegeben. Setzt man nämlich in der Euler'schen Formel $\frac{dx}{du} = \frac{1}{du} = -A$, was also dasselbe ist, wie $-\frac{1}{F'}$ so geht sie in folgende über:

$$x' = a + \frac{A}{1}u + \frac{AdA}{1.2.da}u^2 + \frac{Ad(AdA)}{1.2.3\,da^3}u^3 + \ldots$$

Zusatz. Um einem möglichen Missverständnisse vorzubeugen, bemerke ich, dass die beiden Formeln, die Euler'sche und die Paoli'sche, nur statt unserer Formel (A) gelten, d. h. dass sie nur statt der ersten Art der Zerlegung einer Gleichung, in welcher ein von x unabhängiges Glied M in $(N - y)$ zerlegt wird, gelten, dass sie aber nicht gelten für die allgemeine Form (B), in welcher auch die von x abhängigen Glieder zerlegt werden. Sie gelten also, wenn die Gleichung $fx = 0$ gegeben ist, für die Form $(Fx - Fa) = y$, nicht aber für die allgemeine Form: $(Fx - Fa) = y\varphi x + z\psi x + v\vartheta x + \ldots$ Sie sind daher nur specielle Fälle der allgemeinen Form, und zwar ist für sie $y = y$, $\varphi x = 1$, $z = 0$, $v = 0 \ldots$ Diess bemerke ich, weil für diese Formeln wohl die Grössen z, $v \ldots$, nicht aber die Grössen ψx, $\vartheta x \ldots$ gleich Null sind, Verwechslungen, die in diesem Gebiet, in welchem nicht gerade die grösste Klarheit herrscht, nur allzu leicht vorkommen.

Cap. XVI.

Fortsetzung der vorhergehenden Untersuchung. Die Umkehrungs-Reihen von La Place und La Grange. Allgemeine Maclaurin'sche Umkehrungs-Reihe.

§. 124.

Bestimmung einer *beliebigen* Function der Wurzeln einer gegebenen Gleichung oder Reihe.

Im vorhergehenden Capitel haben wir die Wurzeln x einer gegebenen Gleichung $Fx = 0$ bestimmt. Wir haben dabei einen doppelten Weg eingeschlagen, einmal, indem wir in $Fx = 0$ nur das von x unabhängige Glied M in: $N - y$ (wobei M auch gleich Null sein kann) zerlegten, und das anderemal, indem wir $Fx = 0$ in $\Phi x - \Phi a - y\varphi x - z\psi x - v\vartheta x \ldots = 0$, zerlegten, worin wir aber der Kürze halber $\Phi x - \Phi a$ gleich $Fx - Fa$ gesetzt hatten.

Suchen wir nun anstatt x sogleich eine Function von x, etwa den Logarithmus, oder den Sinus, oder was immer für eine einfache oder zusammengesetzte Function, so kommen wir in das Gebiet, in welchem sich die La Grange'schen und La Place'schen Umkehrungsformeln bewegen.

Des leichteren Eingangs willen schlagen wir wieder den doppelten Weg ein, indem wir zuerst $fx = 0$ in $Fx + k - y = 0$ zerlegen.

Sucht man statt der Wurzel x irgend eine Function dieser Wurzel, die wir allgemein mit ψx bezeichnen, so wird:

$$\psi x = A + By + Cy^2 + Dy^3 + \ldots$$

Substituirt man den Näherungswerth $x = a$, so wird wie in der Beweisführung des vorhergehenden Capitels $y = 0$, und wir erhalten:

$$\psi a = A = \alpha.$$

Nun ist: $\dfrac{\psi x - \alpha}{y} = B + Cy + Dy^2 + ..$

für $x = a$ wird: $B = \dfrac{\psi x - \alpha}{y} = \dfrac{0}{0}$

also: $B = \dfrac{d(\psi x)}{dy} = \dfrac{\psi' x}{F'} = \beta.$

Sofort ist:

$$\frac{\psi x - \alpha - \beta y}{y^2} = C + Dy + Ey^2 + ..$$

für $x = 0$ wird: $C = \dfrac{\psi x - \alpha - \beta y}{y^2} = \dfrac{0}{0}$,

und nach zweimaliger Differenzirung:

$$C = \frac{d^2\psi - \beta d^2 y}{d^2(y^2)} = \gamma,$$

ein symbolischer Ausdruck, in welchem nach vollzogener Substitution von $x = a$ die Glieder weggeworfen werden, die noch y zum Factor haben, so dass namentlich $d^2(y^2)$ in $2(dy)^2 = 2F'$ übergeht.

In gleicher Weise wird in der nämlichen Beweisführung, wie bei der Formel (A) des vorhergehenden Cap.:

$$D = \frac{d^3\psi - \beta d^3 y - \gamma d^3 y^2}{d^3 y^3} = \delta,$$

und allgemein:

$$N = \frac{d^n\psi - \beta d^n y - \gamma d^n y^2 - .. \mu d^n y^{n-1}}{d^n y^n} = \nu,$$

eine Formel, die von der früheren in nichts verschieden ist, als dass ψx, (ψ), statt x gesetzt ist, und dass $d^2\psi$, $d^3\psi$ etc. stehen bleiben, während d^2x, d^3x etc. wegfallen, da x als die unabhängige Variable in $fx = 0$ genommen ist. Sucht man übrigens die zweite oder dritte Potenz etc. der Wurzel, so dass $\psi x = x^2$, $= x^3$ .., so fallen auch hier in den nachfolgenden Gliedern die höheren Differenzialien von ψx weg. Nicht so, wenn man Wurzeln oder transcendente Functionen der Wurzel x sucht, indem $d^\kappa\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$, $d^\kappa(\log x)$ etc. niemals gleich Null werden können.

Die Formel ist daher:

$$(A)\quad \psi x = \psi a + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \ldots \nu y^n + \ldots,$$

und statt β, γ .. ν werden die in der Ableitung gefundenen Werthe substituirt.

Zusatz 1. Es hält nicht schwer, auch dieser Formel eine andere Gestalt zu geben, und zwar in doppelter Hinsicht. Damit sie für wirkliche Rechnungen brauchbar werde, müssen die symbolischen Ausdrücke vollends durch Operations-Ausdrücke ersetzt werden; soll sie aber einfach und elegant erscheinen, so müssen ihre Ausdrücke durch noch allgemeinere, also auch einfachere Symbole gegeben werden.

In Bezug auf Brauchbarkeit zu wirklichen Rechnungen wird:

$$\beta = \frac{\psi'}{F'} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{d^2\psi - \beta d^2 y}{d^2(y^2)} = \frac{d^2\psi - \frac{d\psi}{dF} d^2F}{2(dF)^2}.$$

In Bezug auf Eleganz wird aber: $\beta = \frac{\psi'}{F'}$ **und:**

$$\gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{dF} d\left(\frac{1}{dF} d(\psi)\right)\right) \quad \text{oder} \quad \gamma y^2 = \frac{1}{F'} d\left(\frac{\psi'}{F'}\right)\frac{y^2}{2}.$$

In Bezug auf Brauchbarkeit wird:

$$\delta = \frac{d^3\psi - \beta d^3 y - \gamma d^3(y^2)}{d^3 y^2} = \frac{d^3\psi - \frac{d\psi}{dF} d^3F - 6\gamma\, dy\, d^2y}{2.3\,(dy)^3} =$$

$$= \frac{d^3\psi - \frac{d\psi}{dF} d^3F - 3\left(\frac{d^2\psi}{dF} - \frac{d\psi}{dF^2} d^2F\right) d^2F}{2.3.(dF)^3}.$$

In Bezug auf Eleganz wird:

$$\delta = \frac{1}{2.3}\left(\frac{1}{F'} d \frac{1}{F'} d\left(\frac{\psi'}{F'}\right)\right) \quad \text{U. s. w.}$$

Die Formel wird daher in kurzen Symbolen geschrieben:

$$\psi x = \psi a + \frac{\psi'}{F'} y + \frac{1}{F'} d\left(\frac{\psi'}{F'}\right)\frac{y^2}{2} +$$

$$+ \frac{1}{F'} d\left(\frac{1}{F'} d \frac{\psi'}{F'}\right)\frac{y^3}{2.3} + \ldots$$

Zusatz 2. Auch diese Formel hat Paoli aufgestellt. Sie ist nach seiner Oben berührten Bezeichnungsart geschrieben:

$$\psi x = \psi + A\psi' u + \frac{Ad(A\psi')}{1.2.dx} u^2 + \frac{Ad\left(Ad(A\psi')\right)}{1.2.3\,dx^2} u^3 + \ldots$$

§. 125.

Weitere Ausführung dieser Reihen.

Die Oben gefundene Formel ist die bei Weitem brauchbarste für wirkliche Berechnung der Wurzeln einer Gleichung.

1) Sie ist, wenn die Symbole durch Operationen ersetzt werden, folgende:

$$\psi x = \psi a + \frac{\psi'}{F'} y + \frac{1}{2}\left(\frac{\psi'' x}{F'^2} - \frac{\psi' F''}{F'^3}\right) y^2 + \ldots$$

In den meisten Fällen wird es genügen, bloss diese ersten Glieder zu berechnen, denn man erhält durch sie Werthe, die hinreichend genau sind, wenn a wirklich ein Näherungswerth von x ist.

2) Da man meistens mit Logarithmen rechnet, so ist es der Mühe werth, diese Formel für den Fall, dass $\psi x = log\, x$ gesetzt wird, auszuführen.

Ist $\psi x = log\, x$, so ist $\psi' = \frac{Adx}{x}$, $\psi'' = -\frac{Adx^2}{x^2}$. Die Grösse A hängt von der Basis des künstlichen Logarithmen-Systems ab, und ist für die Basis 10 gleich $\frac{1}{2{,}302585} = 0{,}43429\ldots$

Die Reihe wird demnach:

$$log\, x = log\, a + \frac{A}{aF'a}\left(y - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{aF'a} + \frac{F''a}{(F'a)^2}\right) y^2 + \ldots\right)$$

Beispiel. Wählen wir wieder das Kepler'sche Problem:

$$x - e\, sin\, x - M = 0,$$

und nehmen wir für e und M die nämlichen Werthe, wie im vorhergehenden Capitel, so wird für $a = 326^0 = 1173600''$ wieder $y = -4960''40$.

Eben so wird wieder: $\frac{y}{F'a} = -6226''78$.

Nun ist, wenn wir bloss die ersten zwei Glieder nehmen:

$$\log x = \log a + \frac{A}{aF'a} y$$

$$= \log 1173600'' - \frac{6226''78 \,.\, A}{a}$$

$$= \log 1173600'' - \frac{6226''78}{1173600'' \,.\, 2{,}302585}$$

$$= 6{,}0695201 - 0{,}0023042$$

$$\log x = 6{,}0672159; \quad x = 1167390''$$

$$x = 324°16'30''.$$

Der Werth x ist also schon beim zweiten Gliede bis auf Zehntheile von Secunden genau.

3) Nichts hindert, für ψx irgend eine andere Function zu setzen, und die Formel darnach auszuführen.

Beispiel. Im Kepler'schen Probleme:

$$x - e \sin x - M = 0$$

ist die Grösse x nur eine Hilfsgrösse, und es sollte unmittelbar die wahre Anomalie v gefunden werden.

Die beiden Veränderlichen x und v sind durch die Gleichung verbunden:

$$tg \frac{1}{2} x = tg \frac{1}{2} v \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}.$$

Man setzt daher, da man doch mit Logarithmen rechnet:

$$\psi x = \log tg \frac{1}{2} x,$$

denn diesen Ausdruck braucht man, um v finden zu können.

Setzt man wieder den Näherungswerth $x = a$, so wird:

$$\log tg \frac{1}{2} x = \log tg \frac{1}{2} a + \frac{\psi'}{F'} y + \frac{1}{2} \left(\frac{\psi''}{F'^2} - \frac{\psi' F''}{F'^3} \right) y^2 + \ldots$$

Nun ist:

$$\psi' dx = d\psi = \frac{A d\left(tg \frac{1}{2} x \right)}{tg \frac{1}{2} x} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{A dx}{\cos^2 \left(\frac{1}{2} x \right) tg \frac{1}{2} x} = \frac{A dx}{2 \cos \frac{1}{2} x \,.\, \sin \frac{1}{2} x} = \frac{A dx}{\sin x}.$$

und für $x = a$: $\psi' = \frac{A}{\sin a}$.

Dann ist: $\psi'' = -\frac{A\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{A}{tg\,x\,\sin x}$,

und für $x = a$: $\psi'' = -\frac{A}{tg\,a\,\sin a}$; u. s. w.

Ferner ist: $F' = (1 - e\cos a)$;

$F'' = e\sin a$, etc.

Demnach:

$$log\,tg\frac{1}{2}x = log\,tg\frac{1}{2}a + \frac{A}{\sin a(1 - e\cos a)}y -$$

$$-\frac{1}{2}A\left(\frac{1}{tg\,a\,\sin a(1 - e\cos a)^2} + \frac{e}{(1 - e\cos a)^3}\right)y^2 + ..$$

4) Will man sogleich und unmittelbar $tg\frac{1}{2}v$ finden, so setzt man:

$$\psi x = tg\frac{1}{2}v = \sqrt{\left(\frac{1+e}{1-e}\right)}tg\frac{1}{2}x,$$

oder auch: $\psi x = log\sqrt{\left(\frac{1+e}{1-e}\right)} + log\,tg\frac{1}{2}x.$

Entwickelt man darnach die Reihe, so findet man unmittelbar $log\,tg\frac{1}{2}v$, und daraus v.

5) Will man v, ohne erst $tg\frac{1}{2}v$ zu haben, finden, so substituirt man:

$$\psi x = v = 2\,arc.\,tg\left(= \sqrt{\left(\frac{1+e}{1-e}\right)}tg\frac{1}{2}x\right),$$

und sucht man, um eine ganz schnell convergirende Reihe zu erhalten, $log\,v$, so wird:

$$\psi x = log\,2 + log\,arc.\,tg\left(= \sqrt{\left(\frac{1+e}{1-e}\right)}tg\frac{1}{2}x\right).$$

Daraus werden ψ' und ψ'' bestimmt. Die Werthe F', F'' .. bleiben die nämlichen, wie in der ersten Formel.

§. 126.

Allgemeine Reihe.

1) Fassen wir nun die Aufgabe von dem allgemeinsten Gesichtspunkte auf, so dass die Gleichung $f(x) = 0$ in folgende zerlegt gedacht wird:

$$Fx = y\varphi x + z\vartheta x + ..,$$

welche sich wieder, wie im vorhergehenden Capitel auf $F(x) = y\Phi x$ bringen lässt, so soll eine Function der Wurzel x, also ψx nach aufsteigenden Potenzen von y entwickelt werden.

Da $\frac{F(x)}{\Phi x} = y$, so wird, $\frac{F(x)}{\Phi x} = \Psi x$ gesetzt, $\Psi x = y$, und nach dem Vorhergehenden:

$$\psi x = \psi a + \frac{\psi'}{\Psi'} y + \frac{1}{2}\left(\frac{\psi''}{(\Psi')^2} - \frac{\psi' \Psi''}{(\Psi')^3}\right) y^2 + \cdots$$

Wird $\Psi = \frac{F(x)}{\Phi x}$ substituirt, und wird daraus Ψ', Ψ'' .. durch Differenzirung gesucht, so erhält man ψx nach aufsteigenden Potenzen von y und von Ausdrücken, die von den Functionen Fx und Φx abhängen.

2) Es ist für $x = a$:

$$\Psi' = \frac{F'}{\Phi}, \quad \Psi'' = \frac{F''}{\Phi} - \frac{2F'\Phi'}{\Phi^2}, \text{ u. s. w.}$$

Diese Werthe in ψx substituirt, geben:

$$\psi x = \psi a + \frac{\Phi\psi'}{F'} y +$$

$$(B) \quad + \frac{1}{2}\left(\frac{\psi''\Phi^2}{F'^2} - \frac{\psi'(F''\Phi^2 - 2F'\Phi'\Phi)}{F'^3}\right) y^2 + \cdots$$

Zusatz. Ersetzt man die Operationen durch einfache Symbole, so wird die Reihe sehr elegant; allein bei der wirklichen Berechnung braucht man nicht die Symbole, sondern die Operationen.

§. 127.

Das Theorem von La Grange.

Setzt man in obiger Formel den sehr speciellen Fall, dass $F = x - a$, also $F' = 1$, $F'' = 0$ etc. und $y = 1$ ist, so erhält man die La Grange'sche Umkehrungsformel, die zu ihrer Zeit Epoche gemacht hat.

In diesem Falle wird:

$$\psi x = \psi a + \Phi\psi' + \frac{1}{2}(\psi''\Phi^2 + 2\psi'\Phi'\Phi) + \ldots,$$

eine Formel, die in Symbolen geschrieben werden kann:

$$\psi x = \psi a + \Phi\psi' + \frac{d(\Phi^2\psi')}{1.2.dx} + \frac{d^2(\Phi^3\psi')}{1.2.3\,dx^2} + \cdots$$

Diese Formel ist sehr elegant; aber für die Berechnung der Wurzeln einer Gleichung wird sie Niemand wählen, da man es jederzeit in seiner Macht hat, y kleiner als 1 zu machen, so dass jede andere Formel schneller convergirt, als die La Grange'sche. Auch wird die Zerlegung, welche die La Grange'sche Formel voraussetzt, damit $x - a = Fx$ herauskommt, in unzählig vielen Fällen gar nicht zum Ziele führen.

Denn hat man z. B. die Gleichung:

$$x^3 - 8x^2 + 15 = 0,$$

so muss verwandelt werden:

$$x - 15 = x^3 - 8x^2 + x,$$

$$x - a = \varphi x,$$

wo $\varphi x = x^3 - 8x^2 + x$ ist, und es wird sehr zweifelhaft bleiben, ob die gegebene Grösse 15 ein Näherungswerth der Gleichung $x^3 - 8x^2 + 15 = 0$ ist.

Nicht wegen der Bestimmung der Wurzeln einer Gleichung war die La Grange'sche Formel Epoche machend, sondern als Umkehrungsformel, da sie unabhängig von jedem Näherungswerthe aus der Function

$$x - a - \varphi x = 0$$

die Grösse ψx in einer nach den Differenzialien von ψx und φx geordneten Reihe giebt, und dadurch mittelbar auch die Gleichungen auflöst, wenn die gegebene Grösse a zufällig ein Näherungswerth von $x - a - \varphi x = 0$ ist, wie z. B. in

$$x + 8 - (-x^3 + 8x^2 + x) = x^3 - 8x^2 + 8 = 0.$$

Ueberdiess ergab sich daraus ein ausserordentlich merkwürdiges Resultat. Die La Grange'sche Formel für ψx ist eine schlechthin allgemeine, wenigstens wird sie dafür gehalten; sie giebt aber doch, wenn eine Gleichung mehrere Wurzeln hat, nur eine Wurzel (was an der Allgemeinheit der Reihe ψx zweifeln lässt); und was das Allermerkwürdigste ist, sie giebt in der einen Wurzel, die aus ψx hervorgeht, gerade die kleinste Wurzel der Gleichung, was sehr willkommen ist, da man sehr häufig, und bei transcendenten Functionen fast immer, nur die kleinste Wurzel braucht.

Diese schönen Resultate beweist La Grange mit einem Aufwande von Analysis, der so recht zeigt, welch ausserordentlich reiche Hilfsmittel diesem grossen Analysten zu Gebote standen, und wie er sich mit Leichtigkeit in den complicirtesten Rechnungen

bewegte, die ihm vielleicht bis jetzt noch Niemand im Ernste nachgerechnet hat.

§. 128.

Prüfung des La Grange'schen Theorems.

Dass in der Beweisführung von La Grange irgendwo ein Fehlschluss versteckt liegen müsse, ist a priori gewiss; denn eine Reihe, die statt der n Wurzeln einer Gleichung nur eine Wurzel giebt, ist nicht eine allgemeine, sondern eine specielle Reihe für einen speciellen Näherungswerth, und ist dieser Näherungswerth nicht ein Näherungswerth der kleinsten Wurzel einer Gleichung, so kann auch die La Grange'sche Reihe nicht die kleinste Wurzel geben.

Es bleibt daher übrig, den verborgenen Irrthum aufzusuchen.

I. La Grange erprobt zuerst seine Reihe an den Gleichungen des zweiten Grades, bei welchen die allgemeine Probe leicht ist. — Ist die Gleichung:

$$\alpha - \beta x + \gamma x^2 = 0$$

gegeben, und sucht man eine Wurzel x, indem man $\psi x = x$ setzt, so wird: $\alpha - \beta x + \gamma x^2 = 0$ nach der Form: $x - a - \varphi x = 0$, folgende:

$$x - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\beta} x^2 = 0, \quad \text{also} \quad \varphi x = \frac{\gamma}{\beta} x^2.$$

Die La Grange'sche Reihe:

$$\psi x = \psi(a) + \varphi a \psi' a + \frac{1}{2} d\left((\varphi a)^2 \psi' a\right) + \ldots$$

giebt dann, wenn man $\frac{\alpha}{\beta}$ statt x substituirt, da $\psi x = x$, $\psi' x = 1$, $\psi'' x = 0 \ldots$ ist:

$$x = \frac{\alpha}{\beta}\left(1 + \frac{\alpha\gamma}{\beta^2} + 2\frac{\alpha^2\gamma^2}{\beta^4} + \ldots\right)$$

Löst man aber die Gleichung:

$$\gamma x^2 - \beta x + \alpha = 0, \quad x^2 - \frac{\beta}{\gamma} x + \frac{\alpha}{\gamma} = 0$$

nach der gewöhnlichen Methode auf, so findet man:

$$x = \frac{\beta}{2\gamma}\left(1 \pm \sqrt{\left(1 - \frac{4\alpha\gamma}{\beta^2}\right)}\right),$$

oder: $$x = \frac{\beta}{2\gamma} \pm \frac{\beta}{2\gamma}\left(1 - \frac{2\alpha\gamma}{\beta^2} - \frac{2\alpha^2\gamma^2}{\beta^4} - \frac{4\alpha^3\gamma^3}{\beta^6} \ldots\right)$$

Nimmt man nun das untere Zeichen (—), welches die kleinere Wurzel giebt, so wird:

$$x = \frac{\alpha}{\beta}\left(1 + \frac{\alpha\gamma}{\beta^2} + 2\frac{\alpha^2\gamma^2}{\beta^4} + ..\right)$$

gerade die Reihe, die man aus ψx gefunden hat.

Es sei gegeben: $x^2 + 8x - 9 = 0$, so wird:

$$x + 4 = \pm 5.$$

Nimmt man das untere Zeichen (—), so erhält man $x = -9$, welches die kleinste Wurzel ist, wegen des Zeichens (—), obgleich sie numerisch die grösste ist.

Nimmt man das obere Zeichen (+), so erhält man $x = 1$, welches zwar numerisch die kleinste Wurzel ist, aber doch grösser als die Wurzel $x = -9$, da $1 > -9$ ist.

Man muss also, damit die La Grange'sche Reihe hervorgehe, immer das Zeichen nehmen, welches das Glied $\left(\frac{\beta}{2\gamma} \pm \frac{\beta}{2\gamma}\right)$ aufhebt. Ist β negativ, so findet man in der Reihe:

$$x = \frac{\alpha}{\beta}(1 + ...)$$

allerdings die numerisch grösste Wurzel.

Sehen wir hier genauer zu, so ist $\frac{\alpha}{\beta}$ das von x unabhängige Glied der Gleichung:

$$x - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\beta}x^2 = 0$$

Der *Werth*, der am Ende statt x in die Reihe substituirt wird, ist also nichts anderes, als ein Näherungswerth, nur mit dem Unterschiede, dass er in der Gleichung selbst gegeben, und aus diesem Grunde meistens unbrauchbar ist, und die La Grange'sche Reihe ist nicht eine allgemeine Umkehrungsreihe, sondern eine specielle, für den Näherungswerth $x = \frac{\alpha}{\beta}$ oder in: $x - a - \varphi x = 0$ für den Näherungswerth $x = a$.

II. Der Werth, den sie giebt, ist auch nicht durch sich selbst die kleinste Wurzel der Gleichung, und wo die kleinste Wurzel erscheint, da ist es zufällig, d. h. der Näherungswerth $\frac{\alpha}{\beta}$ liegt dann der kleinsten Wurzel näher, als der grössten.

Bei den Gleichungen des zweiten Grades von der Form:

$$x^2 - \frac{\beta}{\gamma}x + \frac{\alpha}{\gamma} = 0,$$

ist $\frac{\alpha}{\beta}$ kleiner als $\frac{\beta}{\gamma}$, so dass die Wurzeln reell sind; denn in diesem Falle muss in: $\sqrt{1-\frac{4\alpha\gamma}{\beta^2}}$ sein: $\beta^2 > 4\alpha\gamma$, $\frac{\beta}{\gamma} > \frac{4\alpha}{\beta}$, also um so mehr $\frac{\beta}{\gamma} > \frac{\alpha}{\beta}$, oder (der Näherungswerth): $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\beta}{\gamma}$.

Sind jedoch die Werthe imaginär, so kann man durch die La Grange'sche Reihe eben so gut die grösste Wurzel finden, die man dann freilich nicht berechnen kann, weil die Reihen in diesem Falle divergent sind.

Also der Umstand, dass bei den reellen Wurzeln der Gleichungen des zweiten Grades zufällig das eintritt, was La Grange will, hat ihn in Irrthum geführt. Denn was bei den reellen Wurzeln der Gleichungen des zweiten Grades zufällig eintritt, das ist nicht nothwendiges Gesetz für die höhern algebraischen und transcendenten Gleichungen.

III. Nur in dem Falle, dass $\frac{\alpha}{\beta}$ gleich Null ist, dass man also nach entwickelter Reihe den Werth $x = 0$ substituirt (was im Maclaurin'schen Lehrsatze geschieht), findet man *nothwendig* die kleinste Wurzel; denn wird $x = 0$ als Näherungswerth genommen, dann ist immer die Wurzel, die zum Näherungswerth $x = 0$ gehört, diejenige Wurzel, die zunächst an Null liegt, und diess ist, kürzer ausgedrückt, die kleinste Wurzel. Diess ist auch der kurze Beweis für die schwer begriffene Thatsache, dass die Maclaurin'sche Reihe immer nur eine Wurzel und zwar die kleinste Wurzel liefert, worüber man sich vielfach den Kopf zerbrochen hat. Der Grund ist, weil in ihr der Näherungswerth $x = 0$ substituirt wird, so dass die Maclaurin'sche Reihe auch nur als eine specielle Reihe für den Näherungswerth $x = 0$ erscheint.

IV. Die Wahrheit im La Grange'schen Theoreme ist also kurz folgende:

Ist die Gleichung $x - a - \varphi x = 0$ gegeben, so ist

1) die Reihe:

$$\psi x = \psi a + \ldots$$

nicht die (unmögliche) allgemeine, sondern eine specielle Reihe für den gegebenen Näherungswerth $x = a$.

2) Liegt dieser Näherungswerth der kleinsten Wurzel der Gleichung näher, als einer andern Wurzel derselben, so giebt die Reihe ψx die kleinste Wurzel; in jedem andern Falle giebt sie eine andere Wurzel (im Falle sie convergent ist) und zwar diejenige Wurzel, welche dem Näherungswerthe a am nächsten liegt.

3) Ist $a = 0$, also die Gleichung: $x - \varphi x = 0$ gegeben, was der ganz specielle Fall der Maclaurin'schen Reihe ist, dann giebt ψx jedesmal die Function der kleinsten Wurzel.

4) Der Umstand, dass die Gleichung $x - a - \varphi x = 0$ in ψx nur eine Wurzel, und nicht alle giebt, kann uns nicht mehr befremden; die Reihe ist nämlich eine specielle, und giebt für einen speciellen Näherungswerth nur eine Wurzel. Nichts hindert jedoch, auch die übrigen Näherungswerthe zu substituiren, wodurch man in ψx so viele Wurzeln findet, als man Näherungswerthe statt x substituirt hat.

§. 129.

Die *La Place*'sche Umkehrungs-Reihe.

Etwas allgemeiner, als die La Grange'sche, aber doch weniger allgemein, als unsere Oben entwickelte Reihe, ist die La Place'sche, in der Form:

$$x - F(a + y\varphi x) = 0,$$

z. B.: $x - (a + y\varphi x)^2 = 0$, $x - m(a + y\varphi x) = 0$,

$x - log(a + y\varphi x) = 0$, etc.

La Place lehrt nun, wie man aus diesen Gleichungen irgend eine Function x, die wir durch ψx bezeichnen wollen, finden könne.

Seine Formel ist allgemeiner, als die La Grange'sche, denn in dieser letztern ist $F = 1$, und $y = 1$; aber sie ist doch weniger allgemein, als unsere obige Formel, denn La Place setzt nach vollzogener Entwicklung die Grösse $y = 0$, so dass offenbar und unwillkührlich, d. h. ohne dass es La Place will, der blosse Näherungswerth $x = Fa$ in der Formel substituirt wird. Das ist offenbar nur ein specieller Fall; denn es kann nicht bloss ein Näherungswerth $x = Fa$ (der sogar in den meisten Fällen ganz unbrauchbar sein kann), sondern es können so viele brauchbare

Näherungswerthe substituirt werden, als die Gleichung oder Reihe Wurzeln hat.

Die La Place'sche Umkehrungsreihe weiter zu untersuchen, lohnt sich hier nicht der Mühe. Im Ganzen gelten für sie dieselben Grenzmarken, wie für die La Grange'sche Reihe.

Wie wenig Klarheit übrigens über die La Place'sche (und La Grange'sche) Reihe verbreitet ist, zeigt ein Beispiel, bei welchem die La Place'sche Reihe ein falsches Resultat giebt.

Es ist (La Croix, tom. I. pag. 314.) die Function:

$$(x - \alpha)^2 - y^2(\beta + \gamma x)^2 = 0,$$

wo der La Place'sche Näherungswerth, $x = \alpha$ die Reihe giebt:

$$x = \alpha + (\alpha\gamma + \beta)\gamma y^2 + (\alpha\gamma + \beta)\gamma^3 y^4 + \ldots,$$

die dem algebraischen Werthe, der aus:

$$x - \alpha = \pm y(\beta + \gamma x), \quad x = \frac{\alpha \pm \beta y}{1 \mp \gamma y}$$

gefunden wird, widerspricht.

Der Grund, warum die La Place'sche Reihe divergirt, ist, weil der Werth α, den die Reihe, ohne dass man es merkt und weiss, als Näherungswerth fordert, kein Näherungswerth ist, sondern als arithmetisches Mittel zwischen den beiden Werthen für $\pm y$ liegt. Uebrigens sollte die La Place'sche Reihe, da $(x - \alpha)$ in der 2^{ten} Potenz vorkommt, also $Fx = (x - \alpha)^2$ ist, und $F'x = 2(x - \alpha)$ für $x = \alpha$ selber gleich Null ist, alle Glieder unendlich gross machen, da $F'x$ im Nenner vorkommt. Diess wird auch a priori eingesehen, da die Reihe zu gleicher Zeit die Werthe $+y$ und $-y$ liefern soll, was unmöglich ist. Es müssten daher zuerst die gleichen Wurzeln weggeschafft werden.

§. 130.

Die allgemeine *Maclaurin*'sche Reihe.

Es kann Keinem mehr zweifelhaft sein, dass die Maclaurin'sche, La Grange'sche, La Place'sche und die Oben entwickelten Reihen (A) und (B) in eine und dieselbe Kategorie gehören, und dass sie sich nur in Bezug auf Allgemeinheit unterscheiden. Handelt es sich nur um Reihen für Urfunctionen, so fällt die Reihe von La Grange, als zu speciell, aus; handelt es sich um zusammengesetzte Functionen und Gleichungen, so fällt die Maclaurin'sche

Reihe als unbrauchbar aus. Aber die La Place'sche Reihe, so wie die Reihen (A) und (B) umfassen alle Fälle.

Schränkt man die Frage auf die Reihe der Urfunctionen ein, so sind die Gleichungen, von denen Maclaurin ausgeht, $y = e^x$, $y = \sin x$ etc. nur specielle Fälle der Gleichung von La Place, $x = a + y\varphi x$, indem man die Maclaurin'schen Gleichungen erhält, wenn man $a = 0$, und für φx passende Functionen substituirt, z. B.

$$\varphi x = \frac{x}{e^x} = \frac{x}{\sin x} \text{ u. s. w.}$$

Aus Formel (A) und (B) folgt nun, dass man für Urfunctionen ganz beliebige Functionen ψx mit Einführung von ganz beliebigen Constanten entwickeln kann, wodurch die Reihen von solcher Allgemeinheit werden, dass schlechterdings alle möglichen Reihen von Urfunctionen nur als ganz specielle Fälle der Reihe (B) erscheinen. Ich finde es daher passend, diese Reihe (B) in ihrer Einschränkung auf die Urfunctionen die schlechthin allgemeine Maclaurin'sche Reihe zu nennen.

1) Hat man z. B. $e^x = y$, so kann man sie umbilden

in $e^x - e^a = y - e^a$,

in $(1 + \varkappa) e^x - e^a = y + \varkappa e^x - e^a$,

in $(1 + \varkappa) e^x + fx - e^a = y + \varkappa e^x + fx - e^a$,

u. s. w.

Bleibt man z. B. bei:

$$(1 + \varkappa) e^x - e^a = y + \varkappa e^x - e^a$$
$$= (y - e^a) + \varkappa e^x = \mathfrak{z} + \varkappa e^x = \mathfrak{z}(1 + \lambda e^x),$$

so ist: $Fx = (1 + \varkappa) e^x - e^a$, $\Phi x = (1 + \lambda e^x)$, $\mathfrak{z} = y$,

und man findet nun ψx nach aufsteigenden Potenzen von $\mathfrak{z}$, d. h. von $(y - e^a) = e^x - e^a$. Ist a ein Näherungswerth, so kann $\mathfrak{z}$ beliebig klein gemacht werden. — Setzt man dann $\psi x = x$, $a = 0$, $fx = 0$, $\varkappa = 0$, wodurch auch $\lambda = 0$ wird, so geht die gewöhnliche Maclaurin'sche Reihe hervor:

$$x = (y - 1) - \frac{1}{2}(y - 1)^2 + \ldots$$

2) Oder hat man z. B. $\sin x = y$, so kann man sie beliebig umbilden in: $\sin x - \sin a = y - \sin a$,

in: $(1 + \varkappa) \sin x - \sin a = y + \varkappa \sin x - \sin a$ u. s. w.

Bleibt man z. B. bei $\sin x - \sin a = y - \sin a = z$, so kann man aus $\sin x - \sin a = z$ eine Function von x, z. B. $\sin \mu x$ nach aufsteigenden Potenzen von $z = (\sin x - \sin a)$ entwickeln.

In diesem Falle ist:

$$\psi x = \sin \mu x, \quad \Phi x = 1, \quad Fx = \sin x - \sin a,$$

also:

$$\psi' x = \mu \cos \mu x, \quad \psi'' x = -\mu^2 \sin \mu x, \quad \psi''' = -\mu^3 \cos \mu x,$$

u. s. w.

$$\Phi' = 0, \quad \Phi'' = 0, \text{ u. s. w.}$$

$$F'x = \cos x, \quad F''x = -\sin x, \quad F'''x = -\cos x, \text{ u. s. w.,}$$

und die Formel wird:

$$\psi x = \psi a + \frac{\psi'}{F'} z + \gamma z^2 + \ldots$$

oder, da $z = \sin x - \sin a$ ist, nach gehöriger Substitution:

$$\sin \mu x = \sin \mu a + \frac{\mu \cos \mu a}{\cos a} (\sin x - \sin a) +$$
$$+ \frac{1}{2} \frac{\mu \cos \mu a \sin a - \mu^2 \sin \mu a \cos a}{(\cos a)^3} (\sin x - \sin a)^2 +$$
$$+ \frac{1}{2.3} \frac{-\mu^3 \cos \mu a + \mu \cos \mu a - 3(..)}{(\cos a)^5} (\sin x - \sin a)^3 +$$
$$+ \ldots$$

Für $a = 0$ fallen alle Glieder, die $\sin a$, $\sin \mu a$ enthalten (also die im dritten Gliede angedeuteten), weg, und $\cos \mu a$, $\cos a$ werden gleich 1.

Es ist daher:

$$\sin \mu x = \mu \sin x - \frac{(\mu^3 - \mu) \sin x^3}{2.3} + \ldots$$

die bekannte, aber höchst specielle Reihe für vielfache Sinusse in Reihen nach aufsteigenden Potenzen des einfachen Sinus.

Wir beschränken uns auf die allgemeine Formel, da die Anwendung auf alle Urfunctionen billig den betreffenden singulären Untersuchungen überlassen werden kann.

Es stellt sich übrigens das merkwürdige Resultat heraus, dass jede Grösse und jede Function jeder Grösse durch beliebige Functionen beliebig anderer Grössen gegeben werden könne, so dass

es möglich ist, alle Grössen durch alle Grössen ihrer Art auszudrücken. Sind die bestimmenden Grössen Näherungswerthe der zu bestimmenden Grössen, so werden die Reihen convergent; sind sie aber nicht Näherungswerthe, so werden die Reihen divergent, und repräsentiren die imaginären Werthe der zu bestimmenden Grössen.

§. 131.

Elimination der unbestimmten Functionen.

Im Vorhergehenden sind die Anwendungen des Differenzial-Calculs auf die Analysis gegeben. Von andern Anwendungen, die man hie und da trifft, ist es zweifelhaft, ob sie an ihrer rechten Stelle sind.

Wie alles Weitergehende in der Analysis, so hängt auch fast das ganze Gebiet der Algebra von dem Differenzial-Calcul ab. Was sie vor dem Differenzial-Calcul behandelt, das ist mehr eine Vorbereitung, als eine wirkliche Lösung. Allein wenn man diess Alles in den Differenzial-Calcul ziehen wollte, so würde dieser selbst zur Algebra erweitert. Diess muss daher füglich der Algebra überlassen werden.

Eine andere Anwendung der Differenzialien ist z. B. die Elimination der unbestimmten Functionen.

Hat man z. B. $z = f(ax + by)$ (1), und setzt man $ax + by = w$ (2), so wird:

$$z = fw, \text{ und } dz = \frac{dfw}{dw} dw.$$

Nimmt man die partiellen Differenzialien, so ist:

$$\left|\frac{dz}{dx}\right| dx = \frac{dfw}{dw} \left|\frac{dw}{dx}\right| dx,$$

$$\left|\frac{dz}{dy}\right| dy = \frac{dfw}{dw} \left|\frac{dw}{dy}\right| dy,$$

und eben so ist aus (2):

$$\left|\frac{dw}{dx}\right| = a, \quad \left|\frac{dw}{dy}\right| = b.$$

Substituirt man diese Werthe, so ist:

$$\left|\frac{dz}{dx}\right| = \frac{dfw}{dw} \times a; \quad \left|\frac{dz}{dy}\right| = \frac{dfw}{dw} \times b,$$

und eliminirt man aus den zwei letzteren Gleichungen den Ausdruck: $\frac{dfw}{dw}$, so wird:

$$b\left|\frac{dz}{dx}\right| - a\left|\frac{dz}{dy}\right| = 0,$$

eine Gleichung, die ganz allgemein gilt, wie auch immer die Function von z, d. h. $f(ax+by)$, beschaffen sein möge, ob

$$f(ax+by) = (ax+by)^n,$$

oder: $$f(ax+by) = log\,(ax+by),$$

$$= sin\,\frac{1}{ax+by} \text{ etc.}$$

Die Gleichung:

$$b\left|\frac{dz}{dx}\right| - a\left|\frac{dz}{dy}\right| = 0$$

ist daher ein allgemeines Criterium, um entscheiden zu können, ob ein gegebener Differenzial-Ausdruck eine Function von z, d. h. ob $z = f(ax+by)$ sein könne oder nicht.

Beispiel. Gesetzt, man wüsste nicht, dass

$$a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2$$

eine Function (die zweite Potenz) von $(ax+by)$ sei, so würde man

$$a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 = z$$

setzen, und die partiellen Differenzialien bilden:

$$\left|\frac{dz}{dx}\right| = 2a^2x + 2aby; \quad \left|\frac{dz}{dy}\right| = 2abx + 2b^2y.$$

Diese Werthe in die Gleichung

$$b\left|\frac{dz}{dx}\right| - a\left|\frac{dz}{dy}\right| = 0$$

substituirt, machen sie identisch gleich Null, und zeigen, dass:

$$a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2$$

wirklich eine Function von $(ax+by)$ ist. In der That ist auch:

$$a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 = (ax+by)^2.$$

Aehnliche Untersuchungen können auf beliebige Formen von Functionen beliebiger Veränderlicher erweitert werden, und sie

sind, wie man leicht einsieht, von höchster Wichtigkeit, aber nicht für den Differenzial-Calcul, sondern für den Integral-Calcul; denn in diesem handelt es sich darum, zu untersuchen, ob einer gegebenen Differenzial-Gleichung eine Function allgemein entspreche oder nicht, d. h. ob sie ohne vorhergehende Substitution einer bestimmten Function integrirt werden könne oder nicht.

Im Differenzial-Calcul haben derlei Untersuchungen kein rechtes Ziel und auch nicht die gehörigen Anhaltspunkte des Verständnisses, sie fallen daher dem Integral-Calcul zu, und bilden eine fruchtbare Voruntersuchung über die Möglichkeit der Integration gegebener Differenzial-Gleichungen.

Und hiemit schliessen wir die Anwendung der Differenzial-Operationen auf die Analysis.

§. 132.

Schlussbemerkung.

Indem wir diesen Gegenstand verlassen, bleibt noch übrig, zu erinnern, dass alle Aufgaben und Auflösungen durchgeführt werden konnten, ohne dass auf unendlich kleine Grössen von Differenzialien zurückgegangen werden musste.

Im Gegentheile können die Differenzialien gerade bei diesen Untersuchungen jeden beliebigen Werth haben, da sie sich im Zähler und Nenner durch Division heben; sie können alle Werthe haben, nur nicht den Werth $dx = \infty$ oder $dx = 0$, weil die Werthe $\frac{\infty}{\infty}$ oder $\frac{0}{0}$ unbestimmt bleiben, wenn sie nicht erst durch Differenzirung bestimmt werden. Und den Zirkel wird man doch nicht machen wollen, dass man durch Differenzialien, die selbst nur Null sein sollen (wie offen Euler, und versteckt die Andern sagen), also dass man durch $\frac{0}{0}$ die analytischen Ausdrücke $\frac{0}{0}$ zu bestimmen unternimmt. Also gerade bei diesen Untersuchungen müssen die Differenzialien als endliche und beliebig grosse Grössen genommen werden.

Ich sehe wohl ein, dass alle diese Erinnerungen im Gange einer einmal befestigten Theorie überflüssig sind. Denn wie würde es

sich wohl ausnehmen, wenn man bei jedem Abschnitte der Analysis erinnern wollte, dass die Gesetze der Addition und Subtraction, der Multiplication und Division etc. schlechthin allgemein gelten, wie gross oder wie klein die Grössen sein mögen, mit denen operirt wird?

Gerade so wird es künftig auch mit den Differenzial-Operationen gehalten werden. Aber gegenwärtig, wo noch eine durch zweihundertjährigen Fleiss dicht und immer dichter gewobene Binde die Augen zudeckt, gegenwärtig wird es entschuldigt werden können, wenn Schichte um Schichte behutsam abgelöst wird.

VIERTE ABTHEILUNG.

ANWENDUNG DES DIFFERENZIAL-CALCULS AUF GEOMETRIE.

Cap. XVII.

Die geradlinigen Coordinaten der ebenen Curven und ihre Differenzialien.

§. 133.

Vorerinnerung.

Indem wir zur Anwendung des Differenzial-Calculs auf Geometrie übergehen, sind wir an den Punkt gelangt, wo es sich zeigen muss, ob die Differenzialien als vollkommen bestimmte endliche Grössen nachgewiesen werden können oder nicht. In der blossen Analysis können wir in Bezug auf die Reihe:

$$\Delta y = dy + \frac{1}{2}d^2y + \frac{1}{2.3}d^3y + \frac{1}{2.3.4}d^4y + \ldots$$

nur sagen, dass Δy die ganze Zunahme, dy das erste Glied der Zunahme, $\frac{1}{2}d^2y$ das zweite Glied der Zunahme u. s. w. sei. Denn da die analytischen Functionen schlechthin allgemein sind, so kann auch nur schlechthin Allgemeines von ihnen ausgesagt werden. Aber in der Anwendung auf Geometrie zeigen sich besondere Functionen der Coordinaten, der Tangenten, des Bogens, der Fläche etc., und von diesen kann auch Besonderes ausgesagt werden. Es muss sich also zeigen, welche besonderen Grössen die ersten, zweiten, dritten und die folgenden Differenzialien der Coordinaten, des Bogens, der Fläche u. s. w. sind.

Der bessern Uebersichtlichkeit willen machen wir drei Abtheilungen, und behandeln einzeln a) die Curven in der Ebene, b) die krummen Oberflächen, c) die Curven von doppelter Krümmung, d. h. die Curven im Raume.

Für diese Untersuchungen sind gerade Linie und Kreis elementar, d. h. es wird für sie geometrisch nichts vorausgesetzt, als die von der geraden Linie und von dem Kreise abhängigen Lehrsätze.

§. 134.

Ebene Curven und ihre Gleichungen.

Die bei den Curven vorkommenden Bestimmungen sind hauptsächlich folgende:

1) Die geradlinigen Coordinaten-Gleichungen;
2) die Polar-Coordinaten-Gleichungen;
3) die Tangenten und Normalen;
4) die Krümmungshalbmesser, und die von diesen abhängigen Evoluten und Evolventen;
5) die Länge des Bogens von einem gegebenen Punkte an bis zu einem andern, wenn eine gerade Linie oder ein Kreisbogen als Längen-Einheit gegeben ist, Rectification;
6) der Flächeninhalt, sei es, dass er von der Curve selbst, oder von der Curve und mehreren geraden Linien oder andern Curven begrenzt ist, Quadratur;
7) der Inhalt der krummen Oberfläche, die durch die Umdrehung der Curve um eine gerade Linie erzeugt wird, Quadratur der Oberfläche;
8) der cubische Inhalt dieses von der Oberfläche allein, oder von der Oberfläche, von Ebenen oder andern Flächen begrenzten Rotationskörpers, Cubatur.

Ausser diesen giebt es noch mehrere Bestimmungen der Curven; die angeführten sind jedoch die hauptsächlich elementaren und allgemeinen, daher wir sie auch vorzugsweise betrachten werden. — Die singulären Punkte, die Asymptoten etc. sind wohl von den allgemeinen Gleichungen abhängig, aber es können nicht auch umgekehrt die allgemeinen Gleichungen durch sie bestimmt werden.

Alle die Oben angeführten Bestimmungen sind in der Curve zugleich und auf einen Schlag gegeben; die Aufgabe ist, die Gleichungen zu finden, durch die ihre gegenseitige Abhängigkeit bestimmt wird.

Die Wissenschaft setzt uns in den Stand, aus einer dieser Bestimmungen jede andere abzuleiten, und absolut gesprochen, ist es gleichgültig, von welcher ausgegangen wird. Jedoch ist der eine Weg kürzer und leichter, der andere länger und schwieriger, und es ist die rechte Wahl, die hier das Rechte findet, d. h. den Weg, der der kürzeste und leichteste zugleich ist. Es ist Resultat der wissenschaftlichen Erfahrung, dass die Oben verzeichnete Aufeinanderfolge der Bestimmungen der Curven die verlangten Vortheile im vorzüglichen Maasse darbietet.

Da wir nicht die analytische Geometrie, sondern die Anwendung des Differenzial-Calculs auf Geometrie zu behandeln haben, so sind wir gezwungen, uns auf die allgemeinsten Formeln einzuschränken.

§. 135.

Erläuterung.

Jede Curve hat ein bestimmtes Gesetz, nach welchem sie gebildet ist, und dieses Gesetz kann durch eine Function zwischen der Abscisse x und der Ordinate y ausgedrückt werden. Andern Werthen der Abscisse x entsprechen auch andere Werthe der Ordinate y und umgekehrt, so dass in den Functionen der Curven die Abscissen und Ordinaten als von einander abhängige Grössen erscheinen.

Wir schränken uns bei diesen Untersuchungen auf die rechtwinkligen Ordinaten ein, da diess der Allgemeinheit der Resultate keinen Eintrag thut.

Es sei $y = fx$ als rechtwinklige Coordinaten-Gleichung zwischen der Ordinate und Abscisse einer Curve gegeben. (Wenn die Coordinaten-Gleichung verwickelt gegeben ist, $f(x, y) = 0$, so weiss man aus den früheren Formeln, dass diese gerade so leicht differenzirt wird, als wenn sie entwickelt gegeben wäre.)

Bezeichnet y die Ordinate und x die entsprechende Abscisse, und wird x um eine beliebig grosse constante gerade Linie dx vermehrt, so geht y in $(y + \Delta y)$ über, und $(y + \Delta y)$ ist die Ordinate, die der Abscisse $(x + dx)$ entspricht. Ist z. B. die Gleichung gegeben: $y = \sqrt{px}$, und wird x um dx, z. B. $= 3p$ vermehrt,

so wird: $y + \Delta y = \sqrt{p(x + 3p}$ und $\Delta y = \sqrt{\big(p(x + 3p)\big)} - \sqrt{(px)}$.
Für einen beliebigen Werth von x, z. B. $x = p$, wird:

$$\Delta y = \sqrt{4p^2} - \sqrt{p^2} = p.$$

Die Grösse Δy ist also eine ganz bestimmte endliche Grösse, und zwar in dem Falle, dass y die Ordinate einer Curve ist, selbst eine gerade Linie; d. h. $(y + \Delta y)$ ist die Ordinate, die zum Punkte $x = (p + 3p)$ gehört. Die Grösse Δy ist also immer durch die Gleichung der Curve selbst bestimmt, und es ist zu ihrer Bestimmung keine andere Gleichung oder Operation nothwendig.

Nun weiss man aus der Analysis, dass:

$$\Delta y = dy + \frac{1}{2} d^2y + \frac{1}{2.3} d^3y + \ldots$$

ist, und dass die Glieder dy, $\frac{1}{2}d^2y$, $\frac{1}{2.3}d^3y$, ... nach apriorischen Regeln unterschieden und jederzeit berechnet werden können.

Es bietet sich nun folgende Frage dar: Da man weiss, was Δy für jeden Werth von dx ist, so sollte man doch untersuchen, was denn die Differenzialien: dy, d^2y, d^3y u. s. w. einzeln und für sich sind. Sie müssen doch auch Grössen und zwar Linien sein, da ihre Summe die Linie Δy (im obigen Falle die Linie p) giebt. Man darf doch wenigstens Muth fassen, und irgend ein leichtes Beispiel berechnen.

Und wird wohl die Beantwortung dieser Frage schwierig sein? Nicht im Geringsten; man braucht nur Muth zu haben.

§. 136.

Die Differenzialien der Coordinaten.

Fig. 1.

Ist für eine Curve cm die Coordinaten-Gleichung $y = fx$ gegeben, und wird die dem Punkte c entsprechende Abscisse x um eine beliebig grosse Linie $dx = b\beta$ vermehrt, so ist $y + \Delta y = \beta m$, und, wenn $c\alpha$ parallel mit $b\beta$ gezogen wird, $\Delta y = m\alpha$.

Bezeichnet nun für den Punkt c der Curve

die Linie $c1$ die tangirende Parabel erster Ordnung, d. h. die tangirende gerade Linie, von der Gleichung:

$$\eta' = \alpha' + \beta' x,$$

die Linie $c2$ die tangirende Parabel zweiter Ordnung von der Gleichung:

$$\eta'' = \alpha'' + \beta'' x + \gamma'' x^2,$$

die Linie $c3$ die tangirende Parabel dritter Ordnung von der Gleichung:

$$\eta''' = \alpha''' + \beta''' x + \gamma''' x^2 + \delta''' x^3$$

u. s. w., Parabeln, die, wie man weiss, und wie Unten weiter gezeigt werden wird, sämmtlich auf's Leichteste bestimmt und construirt werden können, so ist:

$\Delta y = m\alpha$, Verlängerung der Ordinate zur Curve;

$dy = \alpha v$, der Theil der Linie Δy, der zwischen α und zwischen v, dem Durchschnittspunkt der Tangente $c1$, liegt, Verlängerung der Ordinate zur Tangente;

$\frac{1}{2} d^2y = vr$, der Theil der Linie Δy, der zwischen v und r, den Durchschnittspunkten der tangirenden Parabeln erster und zweiter Ordnung, liegt;

$\frac{1}{2.3} d^3y = ro$, der Theil von Δy, der zwischen r und o, den Durchschnittspunkten der tangirenden Parabeln zweiter und dritter Ordnung, liegt;

$\frac{1}{2.3.4} d^4y = on$, der Theil von Δy, der zwischen den Durchschnittspunkten der Parabeln dritter und vierter Ordnung, liegt,

und so weiter, so gross oder so klein auch dx genommen werden möge.

Die Summe (oder theilweise Differenz):

$$\alpha v + vr + ro + on + \ldots$$

giebt dann genau die Linie $\Delta y = \alpha m$ (wenn überhaupt eine Summe möglich ist, d. h. wenn die Reihe Δy innerhalb der Grenzen der Convergenz eingeschlossen ist, Grenzen, die übrigens jederzeit für unendlich viele endliche Werthe von dx gelten).

Wer nun hier die Differenzialien der Ordinate mit Augen sieht, wird vielleicht glauben, dass der Beweis dieser Lehrsätze sehr

schwierig ist. Nicht im Geringsten; er ist im Gegentheile sehr leicht, leichter als die Beweise vieler Lehrsätze Euklids.

§. 137.

Erstes Differenzial der Ordinate.

Lehrsatz 1. Das erste Differenzial dy ist gleich αv, gleich der Verlängerung der Ordinate bis zur Tangente, wie wir uns der Kürze halber ausdrücken werden.

a) Analytischer Beweis. Ist $y = fx$ gegeben, so ist:

$$y + \Delta y = y + dy + \frac{1}{2}d^2y + \frac{1}{2.3}d^3y + \ldots$$

Nehmen wir nun eine gerade Linie von der Gleichung:

$$\eta' = \alpha' + \beta' x,$$

(die mit der Curve den gleichen Anfangspunkt der Abscisse, also auch die gleiche Abscisse x hat). Wird diese Abscisse der geraden Linie um dieselbe gleichgrosse Grösse dx vermehrt, um welche die Abscisse der Curve vermehrt wird, so ist:

$$\eta' + \Delta\eta' = \eta' + d\eta',$$

und mit dem Gliede $d\eta'$ ist die Reihe für die gerade Linie geschlossen, da sie die veränderliche x nur in der ersten Potenz enthält. Für die gerade Linie, und für sie allein, ist daher $\Delta\eta' = d\eta'$.

Nun ist:

$$y + \Delta y = y + dy + \frac{1}{2}d^2y + \frac{1}{2.3}d^3y + \ldots$$
$$\eta' + \Delta\eta' = \eta' + d\eta'$$

oder:

$$(y - \eta') + (\Delta y - \Delta\eta') = (y - \eta') + (dy - d\eta') + \frac{1}{2}d^2y + \frac{1}{2.3}d^3y + \ldots$$

Soll nun die Linie $\eta' = \alpha' + \beta' x$ die Tangente der Curve sein, so muss

1) $y = \eta'$ sein, d. h. Curve und gerade Linie müssen den Punkt (x, y) gemeinschaftlich haben.

2) Es muss

$$\Delta y - \Delta y' = (dy - dy') + \frac{1}{2}d^2y + \frac{1}{2.3}d^3y + \ldots$$

für beliebig kleine Werthe von dx kleiner sein, als für jede andere gerade Linie. Denn $(\Delta y - \Delta\eta')$ ist die Differenz der nachfolgenden Ordinaten der Curve und der geraden Linie. Da nun

zwischen der Curve und der Tangente keine andere gerade Linie mehr gezogen werden kann, so muss für die Tangente der Werth $\Delta y - \Delta\eta'$ ein Kleinstes sein. Denn gäbe es eine andere gerade Linie, welche den Werth: $\Delta y - \Delta\eta'$ noch kleiner machte, so wäre diese die Tangente.

Damit aber:

$$\Delta y - \Delta\eta' = (dy - d\eta') + \frac{1}{2}d^2y + \ldots$$

ein Kleinstes werde, muss in der Reihe dasjenige Glied verschwinden, welches dx in der ersten Potenz enthält, d. h. es muss $(dy - d\eta') = 0$, oder $dy = d\eta'$ sein. Denn wäre $dy \lessgtr dy'$, so wäre $dy - d\eta' = \pm \mu dx$, und die Reihe wäre:

$$\Delta y - \Delta\eta' = \pm \mu dx + \frac{1}{2}d^2y + \frac{1}{2.3}d^3\eta + \ldots$$

und sie bliebe für beliebig kleine Werthe von dx immer grösser als die Reihe:

$$\Delta y - \Delta\eta = \frac{1}{2}d^2y + \frac{1}{2.3}d^3y + \frac{1}{2.3.4}d^4y + \ldots,$$

da Abth. I. Cap. II. bewiesen worden ist, dass jedes vorhergehende Glied der Reihe:

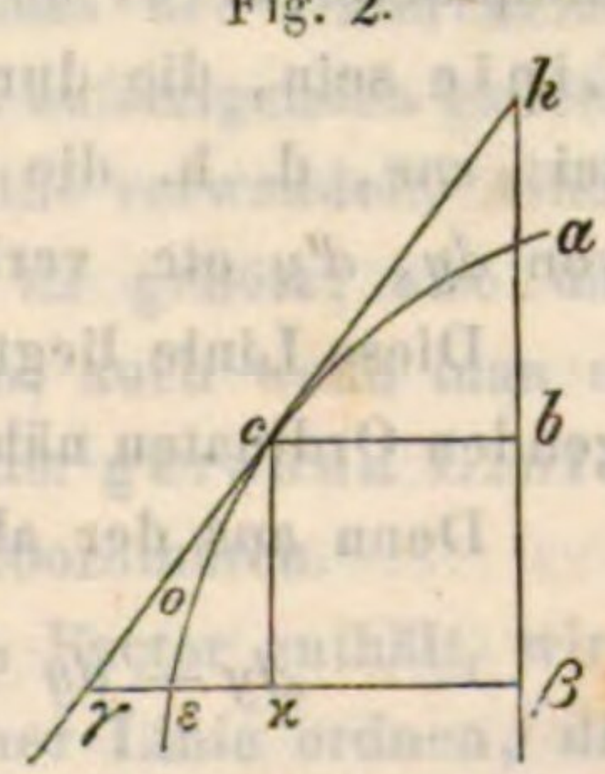
$$adx + bdx^2 + cdx^3 + \ldots$$

für beliebig kleine Werthe von dx grösser ist, als die Summe aller nachfolgenden Glieder, und dass auch ein aliquoter Theil jedes vorhergehenden Gliedes grösser bleibt, als die Summe aller nachfolgenden Glieder.

Ist aber $dy = d\eta'$, so ist, weil $d\eta' = \Delta\eta'$, auch $dy = \Delta\eta'$, d. h. das erste Differenzial der Ordinate der Curve ist gleich $\Delta\eta' =$ der Zunahme der nachfolgenden Ordinate der Tangente, d. h. = der Verlängerung der Ordinate zur Tangente.

b) Synthetischer Beweis. Ist die Curve $ac o\varepsilon$ gegeben, $hb\beta$ die Abscissen-Linie, und wird die Abscisse für den Punkt c, nämlich ab um $b\beta = dx$ vermehrt ($b\beta$ mag so gross oder so klein wie immer genommen werden), so ist $dy = \gamma k$, gleich der Zunahme der Ordinate zur Tangente, Δy hingegen ist $= k\varepsilon$, d. h. gleich der Zunahme der Ordinate zur Curve.

Fig. 2.

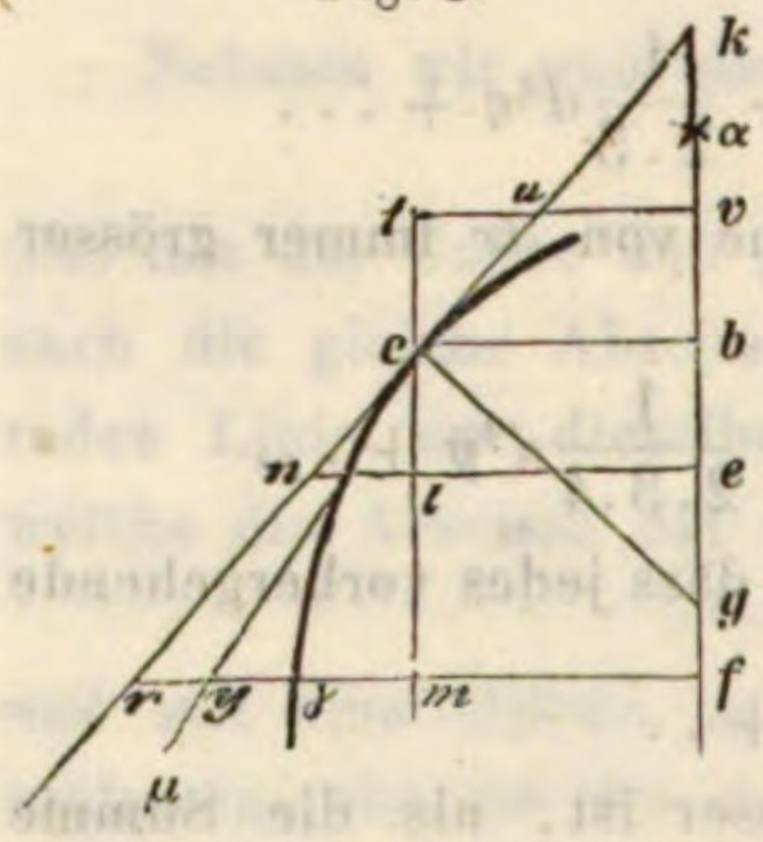


(Fiction im gewöhnlichen Differenzial-Calcul ist, dass dx und dy unendlich klein

seien, dass etwas unendlich Kleines vernachlässigt werde, und dass in diesem Sinne $dy = ke$, d. h. gleich der Zunahme der Ordinate zur Curve sei. Denn dy ist niemals diese Zunahme, auch nicht für unendlich kleine Grössen, sondern sie ist die Zunahme zur Tangente, es wird niemals eine Grösse vernachlässigt, selbst dann nicht, wenn man wirklich dx und dy als unendlich klein nimmt; und die Grössen dx und dy können so gross oder so klein als nur immer genommen werden, sie sind Grössen schlechthin.)

Es ist zu beweisen, dass dy die Verlängerung der Ordinate zur Tangente ist.

Fig. 3.



Für den Punkt c der Curve sei $\alpha b = x$, $cb = y$. Es sei $bf = dx$, so ist $\gamma m = \Delta y$. Oder es sei be ein anderer Werth von dx, also $be = d'x$, aber für dasselbe x, d. h. für den nämlichen Punkt der Curve, und das ihr entsprechende Differenzial der Ordinate gleich $d'y$. In der Reihe Δy sind die Coefficienten von dx und $d'x$ dieselben, weil die Coefficienten unabhängig von dx und $d'x$, nur abhängig von dem für beide Zunahmen (dx und $d'x$) gleichen x sind. Es ist nämlich $dy = f'x\,dx$, $d'y = f'x\,dx'$ etc.

Daraus bildet sich die Proportion:

$$dy : d'y = f'x\,dx : f'x\,dx',$$
$$dy : d'y = dx : dx',$$
$$dy : d'y = bf : be = cm : cl.$$

Da die Linie $c\,l\,m$ eine gerade Linie ist, so muss, weil die Proportion der geraden Linien stattfindet, die Linie, welche die Endpunkte aller dy, $d'y$.. verbindet, ebenfalls eine gerade Linie sein, die durch den Punkt c der Curve geht. Diese Linie sei: cnr, d. h. die Linie, welche die Endpunkte aller Werthe von dy, $d'y$ etc. verbindet.

Diese Linie liegt für die zunächst vorhergehenden und nachfolgenden Ordinaten näher an der Curve, als jede andere gerade Linie.

Denn aus der allgemeinen Reihe folgt:

$$\Delta y - dy = \frac{1}{2} f''x\,dx^2 + \frac{1}{2.3} f'''x\,dx^3 + \ldots$$

und diese Differenz $(\Delta y - dy)$, weil in ihr das erste Glied $f'x\,dx$ wegfällt, kann für beliebig kleine Werthe von dx, ohne dass irgend etwas vernachlässigt wird, kleiner gemacht werden, als jede noch so kleine gegebene Grösse.

Wäre nun diese Linie cnr nicht die Tangente, so könnte zwischen ihr und der Curve eine Tangente $cy\mu$ gezogen werden, und es wäre dann:

$$my - m\gamma < mr - m\gamma$$
$$< dy - \Delta y.$$

Diess ist aber unmöglich. Denn die Differenz:

$(dy - \Delta y)$ oder $(\Delta y - dy)$

kann so klein werden, dass keine gegebene Grösse $(my - m\gamma)$ kleiner ist, als sie, weil jede andere Linie noch einen Factor mit der ersten Potenz von dx gäbe. Es muss demnach die Linie $cy\mu$ mit der Linie cnr zusammenfallen, d. h. die Linie cnr muss selbst die Tangente der Curve sein.

Es folgt daraus, dass dy gleich der Verlängerung der Ordinate zur Tangente ist, was zu beweisen war. — Auf gleiche Art lässt sich beweisen, und es ist unmittelbar einleuchtend, dass, wenn dx negativ genommen wird, dieselbe Reihe, abgesehen von den Zeichen der Glieder mit ungeraden Potenzen von dx entsteht, und dass namentlich dy in derselben Weise das erste Glied der Reihe ausdrückt. Für die geometrische Construction ist dann, wenn $dx = -ct = -bv$ genommen wird, $dy = -tu$, gleich der Verlängerung zur Tangente, so gross oder so klein übrigens auch dx sein möge.

§. 138.

Zusätze.

1) Der Kern der Sache liegt darin, dass der Differenzial-Lehrsatz jede gegebene Function in eine nach aufsteigenden ganzen und positiven Potenzen von dx geordnete Reihe verwandelt. Alles, was nun zum ersten Gliede mit dem Factor dx gehört, also das ganze erste Differenzial, ordnet sich dadurch, auch wenn man es nicht weiss und nicht will, unter das Gesetz der geraden Linie. Denn diese hat nur erste Potenzen ihrer Coordinaten.

Das zweite Differenzial d^2y, das dx^2 als Factor enthält, wird sich in gleicher Weise unter das Gesetz einer Linie ordnen, die

zweite Potenzen der Coordinaten enthält, und die zugleich mit dem zweiten Gliede der Reihe schliesst. Das muss eine algebraische und rationale Linie von den Gleichungen:

$$y = a + bx + cx^2, \text{ oder: } x = \alpha + \beta y + \gamma y^2$$

sein, denn sowohl Δy als Δx schliessen hier mit dem zweiten Differenzial.

Darin liegt also der Mittelpunkt der Beweise, dass die Differenzial-Reihe nur ganze positive Potenzen von dx hat, und zugleich nur Glieder giebt, in denen bereits Alles geschieden, und nach den Potenzen von dx geordnet ist.

2) Es ist kaum nöthig, zu erinnern, dass dx und dy beliebig gross genommen werden können, sogar unendlich gross, und dass doch dieselbe Formel gilt. — Denn es wird zwar auch hier (im Beweise) zu Grössen zurückgegangen, die kleiner genommen werden, als jede gegebene Grösse, aber nicht, um sie zu vernachlässigen, sondern um sie zu gebrauchen, wie Euklid gethan hat, wenn er in seinen apagogischen Beweisen zeigt, dass sich z. B. zwei Kreisflächen oder zwei Kugeln wie die Quadrate oder Cubusse ihrer Durchmesser verhalten. Auch diess Verhältniss kann um keine angebbare Grösse grösser oder kleiner sein, als es ist, und aus diesem Grunde wird im Beweise zu solchen Grössen zurückgegangen. Aber die Kreis-Flächen und Kugeln selbst bleiben desshalb doch beliebig grosse endliche Grössen. Ebenso wird auch hier bewiesen, dass dy nicht um ein Minimum grösser oder kleiner sein könne, als die Verlängerung der Ordinate zur Tangente ist; diese Verlängerung selbst aber kann so gross oder so klein sein, wie immer, je nachdem dx gross oder klein genommen wird. Nichts hindert, dass dx auch unendlich gross genommen werde; die Formel bleibt dennoch in aller Strenge richtig.

Hier lässt sich also mit Bestimmtheit sagen, was gethan wird, wenn y als Ordinate einer Function x (der Abscisse einer Curve) differenzirt wird. Es wird nämlich in $dy = f'x\,dx$, d. h. wenn die Abscisse um dx vermehrt und wenn in der daraus entstehenden Reihe Δy das erste Glied dy genommen wird, die Verlängerung der Ordinate zur Tangente construirt, auch wenn man nicht daran denkt. Der Calcul ist mächtiger, als der zufällige Gedanke des Menschen.

3) Nun könnten aber noch Einige denken, dass, weil im Beweise zu Grössen von dx zurückgegangen wird, die kleiner sind,

als jede angebbare Grösse, diese Werthe von dy (Verlängerung der Ordinate zur Tangente) auch nur für Grössen gelten, die kleiner sind, als jede angebbare Grösse. Auf derlei Bedenken müssen wir mit Nein antworten. Die Gründe sind:

a) Wir behandeln dx immer noch als Grössen, denn wir vernachlässigen sie nicht, und werfen sie nicht weg; wir scheiden nur als erstes Glied aus, was erstes Glied ist, als zweites Glied, was zweites Glied ist, u. s. w.

b) In der Gleichung: $dy = f'x\,dx$ ist der Werth $f'x$ ganz unabhängig von dx, wie bekannt ist. Die Grösse dx mag noch so gross oder noch so klein sein, der Coefficient $f'x$ bleibt stets derselbe, und gelingt es uns, $f'x$ für irgend einen Werth von dx, der noch eine Grösse ist, zu bestimmen, so gilt er allgemein für alle Werthe von dx, so lange sie Grössen bleiben. Nun haben wir wirklich $f'x$ für einen oder mehrere Werthe von dx bestimmt, und diese Werthe von dx waren wirklich als Grössen behandelt worden, es gilt daher der Werth $f'x\,dx$ allgemein, und er wird nur nach einfacher Proportionalität grösser oder kleiner, je nachdem dx grösser oder kleiner wird, gerade wie dy als Verlängerung zur Tangente grösser oder kleiner wird (wegen Aehnlichkeit der Dreiecke), je nachdem dx grösser oder kleiner wird. — Ganz etwas Anderes wäre es, wenn man, wie im gewöhnlichen Differenzial-Calcul, den Werth $f'x$ aus Operationen bestimmen würde, in denen dx nicht mehr als Grösse behandelt würde, d. h. in denen dx beliebig hinweggeworfen würde. Dort wäre erst noch zu beweisen, ob das auf solche Art und in solcher Einschränkung auf so ausserordentliche Weise gefundene $f'x$ und mit ihm auch $f'x\,dx$ allgemein für beliebige Werthe von dx gälte. Diese Schwierigkeit trifft unsern Beweis nicht.

4) Wenn sich aber Jemand noch wundern sollte, dass man im Beweise auf Grössen von dx zurückgeht, die kleiner sein können, als gegebene Grössen, so müssen wir ihn aufmerksam machen, dass jedes Problem so zu lösen ist, wie es seine Natur verlangt. Bei den Tangenten handelt es sich nämlich um die zunächst vorhergehenden und zunächst nachfolgenden Ordinaten. Denn für entferntere Punkte der Curve, namentlich wenn diese singuläre Punkte hat, z. B. Inflexionspunkte, gilt es nicht mehr, dass die Tangente näher an der Curve liege, als andere gerade

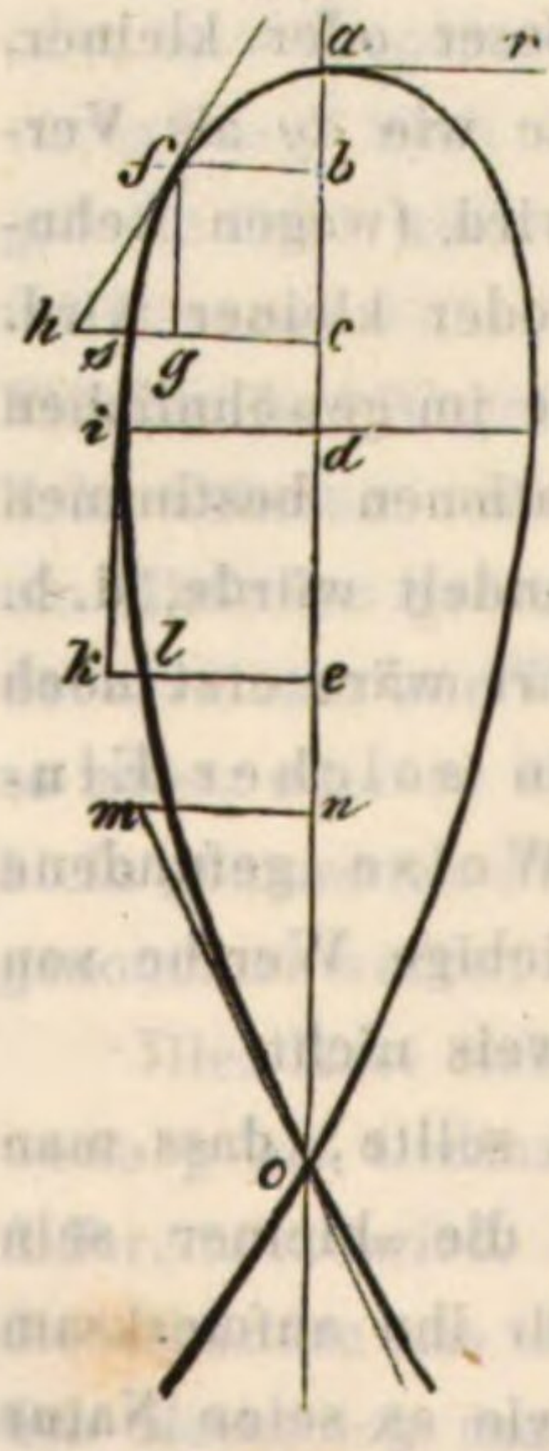
Linien (Secanten). Für entferntere Punkte können Secanten näher an der Curve liegen, als Tangenten. So liegt die in der Figur gezogene Linie *yc* im Punkte *y* wirklich näher an der Curve, als der Punkt *r* der Tangente. Aber diese Linie ist eben eine Secante, und ist zunächst an *c* weiter von der Curve entfernt, als die Tangente. Es kann daher auch die Eigenschaft der Tangirung nicht allgemein aus entfernten, sondern aus den zunächst liegenden, aber doch in endlichen Grössen abstehenden Ordinaten, aus kleinen, aber doch endlichen Werthen von *dx* bewiesen werden. Jede Auflösung und jeder Beweis richtet sich nach der Natur des Problems.

§. 139.

Singuläre Werthe der Differenzialien der Ordinaten.

1) Diejenigen, die *dy* (als Differenzial der Ordinate) als eine Grösse Null zu betrachten gewohnt sind, können diess auch wirklich sehen, jedoch nicht allgemein, sondern singulär, nämlich für das Maximum oder Minimum der Ordinate. So ist in nebenstehender Figur für die Ordinate *fb*, und für *dx* = *bc* *dy* = *hg*, während $\Delta y = sg$ ist. Aber für die Ordinate *id* (Maximum) ist zwar $dx \doteq de$, aber *dy* wirklich und wörtlich gleich Null. Denn da hier die Tangente *ik* parallel zur Abscissen-Linie wird, so ist hier die Verlängerung zur Tangente (*dy*) offenbar = 0, da parallele Linien überall gleich weit abstehen und *ke* nicht grösser und nicht kleiner als *id* sein kann. Aber Δy ist für $y = id$, und $dx = de$ gleich der endlichen Linie *ke*.

Fig. 4.



2) Für den singulären Punkt *a* ist hingegen *dy* sogar unendlich gross, auch wenn *dx* beliebig klein genommen wird, weil hier die Tangente *ar* senkrecht auf der Abscissen-Linie steht. So stimmen geometrische Construction und analytischer Calcul auf's Genaueste überein.

3) Im Vorhergehenden haben wir durch den Calcul zwei Arten singulärer Punkte gefunden. Eine dritte Art sind solche Punkte, welche die Richtung der Tangente unbestimmt lassen.

Cauchy führt am Ende seiner vierten Vorlesung über den Infinitesimal-Calcul eine Curve dieser Art an:

$$y = x \sin \frac{1}{x}.$$

Für $x = 0$ wird $y = 0$, und $dy = \left(\sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} \right) dx.$

Mir scheint nicht, dass für $x = 0$ das Differenzial dy unbestimmt bleibt; denn sowohl $\sin \infty$ als $\cos \infty$ sind endliche Grössen, und es wird daher:

$$dy = \lambda \pm \frac{k}{0} = \pm \infty,$$

d. h. die Tangente steht im Punkte $x = 0$ senkrecht auf der Abscissen-Linie.

Wohl aber wird für die Curve: $y = x^2 \sin \frac{1}{x}$, in der für $x = 0$ die Ordinate y ebenfalls gleich Null ist, das Differenzial

$$dy = \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right) dx,$$

welches für $x = 0$ in den Ausdruck übergeht:

$$dy = - \cos \frac{1}{0} dx = - \cos \infty \, dx.$$

Da $\cos \infty$ unendlich viele endliche Werthe haben kann, so ist dy unbestimmt. Geometrisch drückt sich diess so aus, dass die Tangente dieses singulären Punktes eine beliebige Lage haben kann, und doch Tangente bleibt.

§. 140.

Gleichungen der Subtangenten und Subnormalen.

Aus dem Lehrsatze ergiebt sich nun mit Leichtigkeit die Bestimmung der Tangenten und Subtangenten, der Normalen und Subnormalen einer Curve, deren Coordinaten-Gleichung gegeben ist.

Es ist nämlich nach Fig. 3., in welcher kb die Subtangente, und bg die Subnormale bezeichnet:

$$dy : dx = y : subtang.$$
$$dy : dx = subnorm. : y,$$

also: $$subtg. = \frac{ydx}{dy}, \quad subn. = \frac{ydy}{dx}.$$

Daraus können nun die Tangenten und Normalen berechnet werden. Auch ist es nicht schwer, die unabhängigen Gleichungen für Normalen und Tangenten aufzustellen. Diess ist alles Sache der Technik des Calculs und längst bekannt.

Auch können, wenn Tangenten, Normalen etc. gegeben sind, umgekehrt durch Integrirung die Coordinaten-Gleichungen der Curven gefunden werden. So ist z. B.:

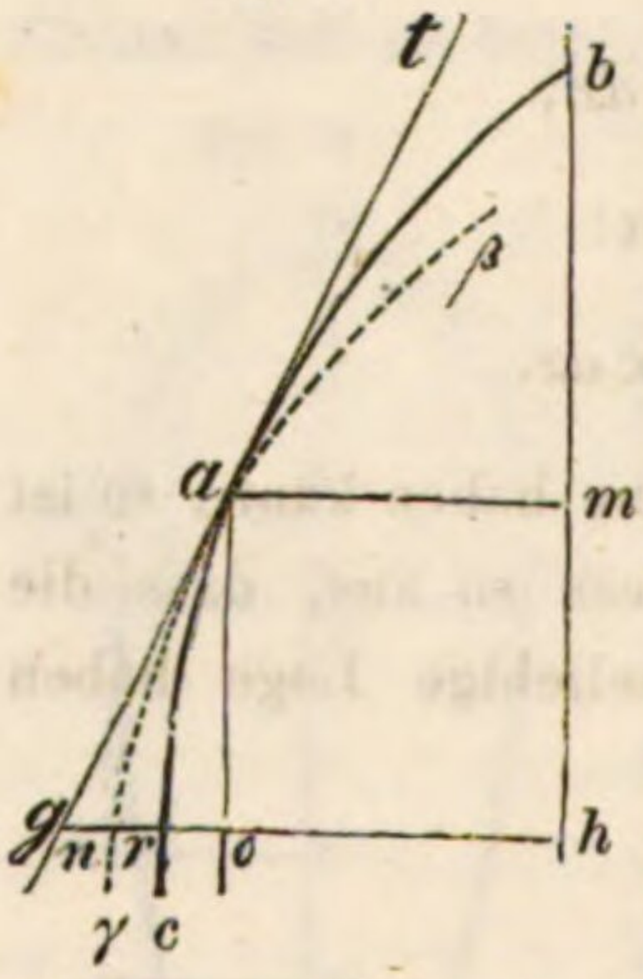
$$dy = \frac{ydx}{subtg}, \quad y = \int \frac{ydx}{subtg} + C, \quad \text{oder} \quad x = \int \frac{subtg\, dy}{y} + C.$$

U. s. w.

§. 141.

Das zweite Differenzial der Ordinate.

Fig. 5.



Das zweite Glied der Reihe Δy, oder $\frac{1}{2}d^2y$ ist gleich der geraden Linie **ng**, wenn für die gegebene Curve *bac* die Curve $\beta a \gamma$ die tangirende Parabel zweiter Ordnung ist. (Der Kürze halber nennen wir diese Linie **ng** die Verlängerung der Ordinate zur tangirenden Parabel zweiter Ordnung.)

Erläuterungen. 1) Zwischen einer Curve und einer Tangente kann keine andere gerade Linie gezogen werden. Wohl aber können noch andere Curven zwischen einer Curve und ihrer Tangente gezogen werden, weil andere Linien nicht bloss das erste, sondern auch das zweite, dritte etc. Differenzial verschwinden machen können. Diejenige Parabel zweiter Ordnung, von der Gleichung $\eta = \alpha + \beta x + \gamma x^2$, welche zum Punkte a zwischen der Curve und ihrer Tangente gezogen werden kann, und die näher an der Curve liegt, als jede andere Parabel zweiter Ordnung, wird die tangirende Parabel genannt.

2) Es ist zu bestimmen, wie die constanten Coefficienten α, β, γ beschaffen sein müssen, damit die durch sie bestimmte Curve: $\eta = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ die Eigenschaft der tangirenden Parabel habe.

3) Es ist zu erläutern, warum man gerade diese Parabel zur Bestimmung des zweiten Differenzials der Ordinate einer Curve wählt.

4) Es ist zu beweisen, warum die durch die tangirende Parabel bestimmte Linie $\eta\eta$ wirklich das zweite Glied: $\frac{1}{2}d^2y$ ist, nicht um ein Minimum grösser oder kleiner, so gross auch dx genommen werden möge.

Beweis. *a*) Es muss eine Parabel von der Gleichung:

$$\eta = \alpha + \beta x + \gamma x^2$$

zur Bestimmung des zweiten Differenzials einer Ordinate genommen werden, weil die Gleichung $\eta = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ diejenige rationale Function ist, die in der Reihe:

$$\eta + \Delta\eta = \eta + d\eta + \frac{d^2\eta}{2},$$

mit dem zweiten Differenzial schliesst, da sie in der höchsten Potenz nur x^2 enthält. Es wird daher $d\eta + \frac{d^2\eta}{2}$ durch $\Delta\eta$ bestimmt, da $d^3\eta$, $d^4\eta$ etc. sämmtlich gleich Null sind.

Da $d\eta$ aus der Tangente bekannt ist, so ist auch $\frac{d^2\eta}{2}$ durch $\Delta\eta$ gegeben.

b) Damit die Parabel $\eta = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ die tangirende Parabel werde, muss in der Reihe

$$\Delta y - \Delta\eta = (dy - d\eta) + \frac{1}{2}(d^2y - d^2\eta) + \frac{1}{2.3}d^3y + \frac{1}{2.3.4}d^4y + \ldots$$

die Differenz $(\Delta y - \Delta\eta)$ kleiner werden, als die Differenz für jede andere Parabel zweiter Ordnung. Diess geschieht, wenn $dy - d\eta = 0$ und $d^2y - d^2\eta = 0$ sind. Denn es kann dx (ohne unendlich klein genommen zu werden) so klein genommen werden, dass die Summe aller Glieder mit höheren Potenzen von dx kleiner bleibt, als die Summe der Glieder mit der ersten und zweiten Potenz von dx. Wird daher für eine andere Curve: $\eta' = \varrho + \sigma x + \tau x^2$ das erste Glied $(dy - d\eta')$ und das zweite Glied $(d^2y - d^2\eta')$ nicht Null, so bleibt eine Differenz:

$$\Delta y - \Delta\eta' = \pm \mu dx \pm \nu dx^2 + \frac{1}{2.3}d^3y \pm \ldots$$

und diese ist grösser als:

$$\Delta y - \Delta\eta = \frac{1}{2.3}d^3y + \frac{1}{2.3}d^4y + \ldots.$$

c) Die drei Gleichungen: $d^2y - d^2\eta = 0$; $dy - d\eta = 0$; $y - \eta = 0$ (Gleichheit der Ordinate für den Punkt *a*) geben die Mittel an die Hand, die Coefficienten α, β und γ zu bestimmen.

Es ist: (1) $\eta = y = \alpha + \beta x + \gamma x^2$;

(2) $d\eta = dy = (\beta + 2\gamma x)\, dx$;

(3) $d^2\eta = d^2y = 2\gamma dx^2$.

Aus (3) wird $\gamma = \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}$ gefunden; dieser Werth in Gleichung (2) substituirt, giebt den Werth von

$$\beta = \frac{dy}{dx} - \frac{d^2y}{dx^2}x,$$

und diese beiden Werthe in Gleichung (1) substituirt, geben den Werth:

$$\alpha = y - \frac{dy}{dx}x + \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}x^2.$$

d) Die Linie **ng** ist, so gross auch dx genommen werden möge, genau gleich $\frac{1}{2}d^2y$, welche Curve auch immer gegeben sein möge. Denn ist $\beta a \gamma$ die tangirende Parabel für die Ordinate am, so ist $dx = mh$, und $\Delta y = or$, $\Delta\eta = on$. Da nun $\Delta\eta = d\eta + \frac{1}{2}d^2\eta$, so ist: $\frac{1}{2}d^2\eta = \Delta\eta - d\eta = on - og = ng$ (absolut genommen, ohne Rücksicht auf das Zeichen). Da nun $d^2\eta = d^2y$, so ist auch $\frac{1}{2}d^2y = \mathbf{ng}$, was zu beweisen war.

Anmerkung. Durch die tangirende Parabel zweiter Ordnung construirt man unmittelbar und vollständig die beiden Glieder der Reihe:

$$dy + \frac{1}{2}d^2y.$$

Da nun dy durch die Tangente bekannt ist, so findet man $\frac{1}{2}d^2y$ durch die tangirende Parabel zweiter Ordnung in Verbindung mit der Tangente. Man weiss daher, was man thut (man mag daran denken oder nicht), wenn man y als Ordinate einer Curve differenzirt; man weiss, was sich im ersten Gliede und was sich im zweiten Gliede herausstellt.

§. 142.

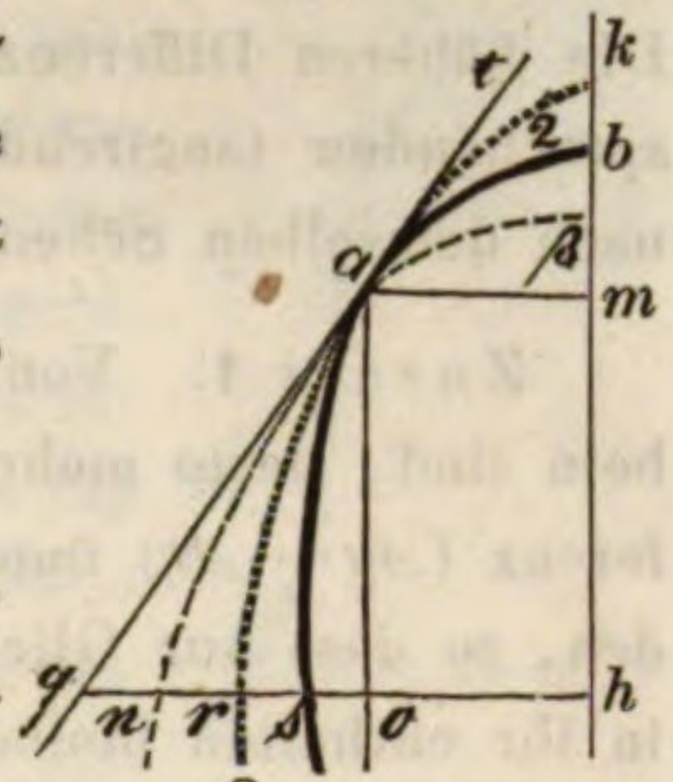
Das dritte Differenzial der Ordinate.

Lehrsatz. Das dritte Glied der Reihe Δy wird durch die tangirende Parabel dritter Ordnung bestimmt.

(Bei den nun folgenden Beweisen werden wir uns kürzer fassen, da sie sämmtlich nach demselben Schema geführt werden.)

Ist die Curve **bas** gegeben, ist für den Punkt a die Linie **tag** die Tangente, $\beta a \gamma$ die tangirende Parabel zweiter und **2a2** die tangirende Parabel dritter Ordnung, so ist $\frac{1}{2.3} d^3y$ gleich der geraden Linie **nr**, so gross auch dx genommen werden möge.

Fig. 6.



Beweis. Für $dx = mh$ wird $\Delta y = so$, $dy = go$, $\frac{1}{2} d^2y = ng$. Ist nun die tangirende Parabel dritter Ordnung von der Gleichung:

$$\eta = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$$

gegeben, so schliesst sich die Reihe $\Delta\eta$ mit dem Gliede $\frac{1}{2.3} d^3\eta$.

Es ist daher:

$$\Delta y - \Delta\eta = (dy - d\eta) + \frac{1}{2}(d^2y - d^2\eta) + \frac{1}{2.3}(d^3y - d^3\eta) + \\ + \frac{1}{2.3.4} d^4y + \ldots.$$

Die Differenz $(\Delta y - \Delta\eta)$ wird ein Kleinstes, wenn $dy = d\eta$, $d^2y = d^2\eta$, $d^3y = d^3\eta$, so dass in $\Delta y - \Delta\eta$ nur noch vierte und höhere Potenzen von dx vorkommen.

Die vier Gleichungen: $y = \eta$; $dy = d\eta$; $d^2y = d^2\eta$; $d^3y = d^3\eta$ bestimmen die vier constanten Coefficienten: α, β, γ, δ der tangirenden Parabel dritter Ordnung:

$$\eta = \alpha + \beta x + \gamma x + \delta x^3.$$

Da ferner $\Delta\eta = ro$ ist, so ist:

$$\frac{1}{2.3} d^3\eta = \frac{1}{2.3} d^3y = \Delta\eta - d\eta - \frac{1}{2} d^2y.$$

$$= ro - go - ng = rn$$

(abgesehen vom Zeichen).

§. 143.

Die höheren Differenzialien der Ordinaten.

Es ist einleuchtend, dass die tangirende Parabel dritter Ordnung im Punkte a mit der Curve die Tangente und die tangirende Parabel zweiter Ordnung gemeinschaftlich hat. Allgemein hat die tangirende Parabel n^{ter} Ordnung alle tangirenden Parabeln von der

ersten bis zur $n-1^{\text{ten}}$ Ordnung mit der Curve gemeinschaftlich. Die höheren Differenzialien der Ordinaten hängen von den entsprechenden tangirenden Parabeln ab. Die Beweise werden alle nach demselben Schema geführt.

Zusatz 1. Von je höherer Ordnung die tangirenden Parabeln sind, desto mehr nähern sie sich der Curve, da in der Differenz $(\Delta y - \Delta\eta)$ immer der Reihe nach mehr Glieder verschwinden, so dass nur Glieder von successiv höheren Potenzen von dx in ihr enthalten bleiben.

Zusatz 2. Da die Tangente selbst eine tangirende Parabel erster Ordnung ist, so ist das erste Differenzial der Ordinate gleich go (gleich der Zunahme der neuen Ordinate bis zur tangirenden Parabel erster Ordnung); es ist das zweite Differenzial der Ordinate $\left(d^2y = 2.\frac{d^2y}{2}\right)$ gleich der Linie $2ng$ (gleich der doppelten Zunahme der neuen Ordinate von der tangirenden Parabel erster Ordnung bis zur tangirenden Parabel zweiter Ordnung); es ist das dritte Differenzial der Ordinate $\left(d^3y = 2.3.\frac{d^3y}{2.3}\right)$ gleich der Linie $2.3.nr$ (gleich der sechsfachen Zunahme der neuen Ordinate von der tangirenden Parabel zweiter Ordnung bis zur tangirenden Parabel dritter Ordnung) u. s. w.

Die Summe aller dieser geraden Linien $go + ng + nr + ..$ *(mit positiven oder negativen Zeichen genommen, wie es die jedesmalige Rechnung und Construction giebt, was davon abhängt, ob die gegebene Curve concav oder convex gegen die Abscissenlinie ist) giebt endlich die ganze Zunahme* Δy *der neuen Ordinate, oder der Linie* **so**, Fig. 6., *so dass*:

$$so = go \pm ng \pm nr + \ldots,$$

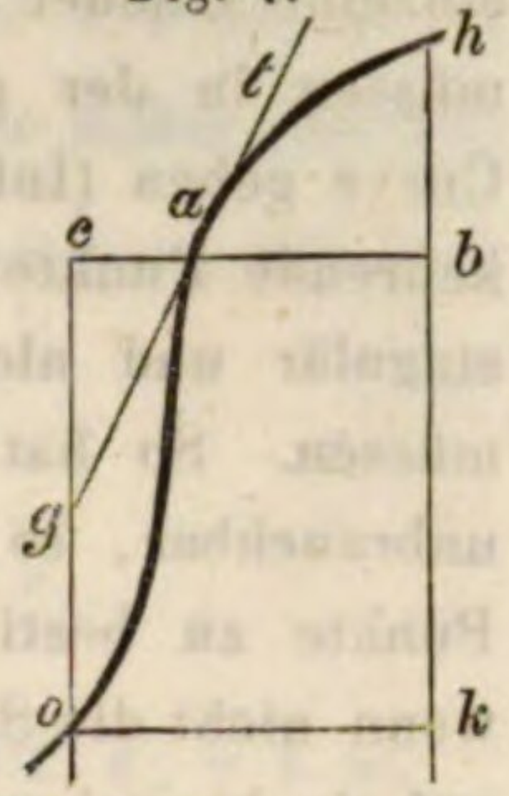
so gross oder so klein auch $mh = dx$ *genommen werden möge.*

Zusatz 3. Es ist nicht nothwendig, dass gerade aus der beliebigen Zunahme der Abscissen die Differenzialien der Ordinaten bestimmt werden; es können auch umgekehrt die Differenzialien der Abscissen aus den beliebigen Zunahmen der Ordinaten bestimmt werden, nach der Reihe:

$$\Delta x = dx + \frac{d^2x}{2} + \frac{d^3x}{2.3} + \ldots$$

Ist z. B. *hao* eine gegebene Curve, und wird die Ordinate *ab* um eine beliebige Grösse *ac* vermehrt, so ist die ganze Zunahme der Abscisse, oder Δx, gleich der geraden Linie *co*, und das erste Differenzial, oder dx, ist gleich der geraden Linie *cg*, d. h. derjenigen geraden Linie, die zwischen den Punkten *c* und *g* liegt, wenn *tag* die Tangente der gegebenen Curve im Punkte *a* ist. — Auf ganz gleiche Art können die zweiten, dritten und höheren Differenzialien der Abscissen durch die tangirenden Parabeln zweiter, dritter und höherer Ordnungen construirt werden. Ihre Summe (oder theilweise Differenz) ist gleich der ganzen Zunahme $\Delta x = co$, so gross auch $dy = ca$ innerhalb der Grenzen der Convergenz genommen werden möge.

Fig. 7.

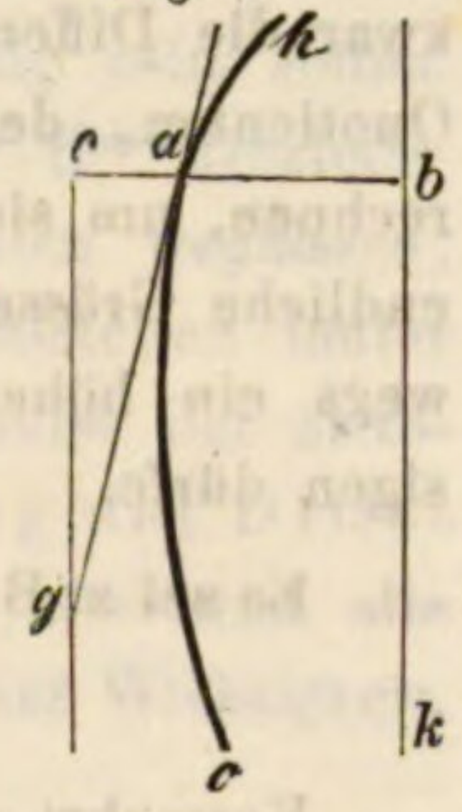


Zusatz 4. Würde z. B. bei der Curve *hao* die beliebige Zunahme *ac* der Ordinate *ab*, so genommen, dass *cg* die Curve *hao* niemals durchschnitte, so würde, während $dx = cg$ ist, Δx geometrisch eine imaginäre Grösse. Analytisch würde sich ergeben, dass die Reihe:

$$\Delta x = dx + \frac{d^2x}{2} + \frac{d^3x}{2.3} + \frac{d^4x}{2.3.4} + ..$$

für diesen Werth von dy divergent würde, und nur unter der Bedingung convergiren könnte, dass die beliebige Zunahme der Ordinate $dy = ca$ innerhalb einer bestimmten Grenze α genommen würde. Diese Grenze ist jederzeit (die singulären Punkte ausgenommen) eine *endliche* Grösse. — So stimmen Analysis und geometrische Anwendung auf's Vollkommenste überein; was in der Analysis eine divergente Reihe giebt, das kann in der Geometrie keine endliche Grösse geben; die Curve und die mit der Abscissen-Linie parallele Linie *cg* können sich in dem gegebenen Falle niemals durchschneiden.

Fig. 8.



Zusatz 5. Diejenigen Werthe von x oder y hingegen, die in der analytischen Reihe:

$$\Delta x = dx + \frac{d^2x}{2} + \frac{d^3x}{2.3} + \frac{d^4x}{2.3.4} + \cdots$$

einzelne Glieder gleich Null, oder unendlich gross machen, diese müssen in der geometrischen Anwendung singuläre Punkte der Curve geben (Inflexionspunkte, vorspringende, schliessende, rückkehrende Punkte u. s. w.), die eben, weil sie singulär sind, auch singulär und nicht durch die allgemeine Reihe bestimmt werden müssen. So hat Alles sein Gutes. Wird die allgemeine Reihe unbrauchbar, so ist es ein Zeichen, dass singuläre Werthe und Punkte zu bestimmen sind, auf die man nicht kommen könnte, wenn nicht die Singularität der allgemeinen Reihe für diese Werthe auf sie hinweisen würde.

§. 144.

Schlussbemerkung.

Wer sich vielleicht darüber verwundert, dass die Differenzialien der Ordinaten und Abscissen endliche Grössen sind, und zwar die Differenzialien selbst, nicht etwa bloss die Differenzial-Quotienten, der möge doch nur einmal ein leichtes Beispiel berechnen, um sich zu überzeugen, dass die Differenzialien wirklich endliche Grössen sind und sein müssen, und dass man keineswegs ein höheres gegen ein niedrigeres Differenzial vernachlässigen dürfe.

Es sei z. B. ein Kreis gegeben von der Coordinaten-Gleichung:

$$y = \sqrt{2rx - x^2}.$$

Vermehrt man darin x um dx, so entsteht:

$$y + \Delta y = y + dy + \frac{1}{2}d^2y + \frac{1}{2.3}d^3y + \ldots$$

Es ist:

$$dy = \frac{+(r-x)\,dx}{y}, \quad d^2y = \frac{-r^2\,dx^2}{y^3}, \quad d^3y = \frac{+3r^2(r-x)\,dx^3}{y^5}$$

u. s. w.

Wird nun z. B. der Punkt des Kreises genommen, welcher der Abscisse $x = \frac{3}{4}r$ entspricht, und wird $dx = \frac{1}{4}r$ gesetzt, so ist die Ordinate für $x = \frac{3}{4}r$ gleich:

$$y = \sqrt{\frac{15}{16}r^2} = 0{,}968\ldots r,$$

und $y + \Delta y$ ist die Ordinate, die der Abscisse $x + dx$, d. h. $\frac{3}{4}r + \frac{1}{4}r = r$ entspricht. Diese Ordinate ist aber selbst gleich r.

Es ist ferner, wenn man die angegebenen Werthe substituirt:

$$dy = \frac{1 \,.\, r}{16 \,.\, 0{,}968} = 0{,}064 \,..\, r,$$

$$\frac{1}{2} d^2y = \frac{-r}{2 \,.\, 16 \,.\, (0{,}968)^3} = -\, 0{,}034 \,..\, r,$$

$$\frac{1}{2.3} d^3y = \frac{3 \,.\, r}{2.3.4.4^3 \,.\, (0{,}968)^5} = +\, 0{,}002 \,.\, r, \text{ u. s. w.}$$

also:

$$y + \Delta y = 0{,}968 \,..\, r + 0{,}064 \,..\, r - 0{,}034 \,..\, r + 0{,}002 \,..\, r + \ldots = r.$$

Daraus sieht man, dass man dy nicht gegen y, d^2y nicht gegen dy u. s. w. vernachlässigen dürfe, wenn man richtige Werthe erhalten will. Man darf auch die nachfolgenden Differenzialien nicht vernachlässigen, wenn man Werthe erhalten will, die bis zur 7^{ten} oder bis zur 70^{sten} Dezimalstelle richtig sein sollen. Verlangt man hingegen Werthe, die nur bis zur 6^{ten} Dezimalstelle gehen sollen, so darf man alle Differenzialien weglassen, deren numerischer Werth in den ersten 7 Dezimalstellen lauter Nullen hat. Diess gilt aber nur für das Bedürfniss der arithmetischen Berechnung, d. h. in der Anwendung des Differenzial-Calculs auf Reihen; für die Analysis sind alle Differenzialien von gleichem Werthe und von gleicher Wichtigkeit.

Cap. XVIII.

Die Differenzialien der übrigen Functionen der Curven.

§. 145.

Das erste Differenzial des Bogens. Rectification.

1) Die Länge des Bogens einer Curve von einem gegebenen Punkte an ist von den entsprechenden Ordinaten oder Abscissen abhängig; einer vorhergehenden oder nachfolgenden Abscisse entspricht eine andere Länge des Bogens. Aber nach welchem Gesetze? — Es schiene auf's Höchste wünschenswerth, dass man eine allgemeine Formel hätte, in die man bei gegebenen Curven nur die Coordinaten-Gleichung zu substituiren brauchte, um unmittelbar die Grösse des Bogens zu finden, welcher der substituirten Ordinate oder Abscisse entspricht. So hat man für die Länge der geraden Linien ganz allgemeine Formeln, z. B. im Pythagoräischen Lehrsatz und in den Formeln der ebenen Trigonometrie. Eine entsprechende allgemeine Formel für die Grösse eines Bogens giebt es nicht, und kann es nicht geben, wie man aus Gründen des Integral-Calculs weiss.

Es ist nun zu untersuchen, ob diese gewünschte, nur in der Idee vorhandene Formel der Länge des Bogens, die wir durch s ausdrücken wollen, nicht etwa in ihren Differenzialien, ds, d^2s u. s. w., ein schlechthin allgemeiner Ausdruck werde, der für alle Curven gilt. Ist diess der Fall, so erhält man mittelbar dasselbe, was man unmittelbar durch die allgemeine Formel s anstrebt. Wird z. B. ds ein allgemeiner, für alle Curven gültiger

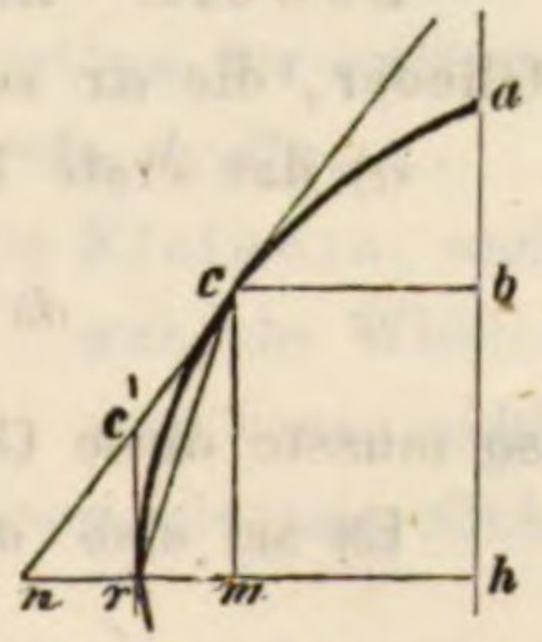
und berechenbarer Ausdruck, dann braucht man nur in ds die jedesmalige Coordinaten-Gleichung einer Curve zu substituiren, und diesen Ausdruck zu integriren, um die Länge des Bogens für jede gegebene Curve zu finden.

2) Es wird gezeigt werden, dass die Differenzialien ds, d^2s u. s. w. wirklich die Eigenschaft der allgemeinen Gültigkeit haben. Und diess gilt nicht bloss von der Rectification, sondern auch von der Quadratur, Planirung und Cubatur der Curven, Oberflächen und Körper. Darauf beruht die über allen Vergleich erhabene Wichtigkeit der Differenzialien, und diess ist es, was den Differenzial-Calcul zu so hohem Ansehen erhebt.

Es sei s die Länge des Bogens einer Curve, von einem gegebenen Punkte an bis zu einer Abscisse x, so entsteht, wenn die Abscisse x um dx vermehrt wird, der Bogen $s + \Delta s$.

3) Es sei ac der Bogen, der der Abscisse $x = ab$ entspricht, so ist acr der Bogen, welcher der Abscisse $(ab + bh)$, d. h. $(x + dx)$ entspricht, und Δs ist gleich dem Bogen cr.

Fig. 9.



Nun wissen wir aus der Analysis, dass

$$\Delta s = ds + \frac{1}{2} d^2s + \frac{1}{2.3} d^3s + \ldots$$

Ferner wissen wir, dass ds nur Grössen enthält, die dx in der ersten Potenz haben, dass d^2s nur Grössen enthält, die dx^2 haben u. s. w.

Nun ist allgemein der Bogen Δs grösser als die Sehne cr, und kleiner als die beiden an seinen Endpunkten errichteten Tangenten $rc' + cc'$, und, da $rc' < c'n$, so ist der Bogen cr um so mehr kleiner als $(nc' + cc')$.

(Wenn die Ordinaten für die Zunahme von x abnehmen, so leitet man dasselbe Resultat aus der Abnahme von x, aus $(x - dx)$ ab, weil dann die Ordinaten nach dem negativ genommenen dx hin zunehmen, so dass wieder dasselbe gilt.)

Wir haben also: $\Delta s < cn$, $\Delta s > cr$.

Nun ist $cn = \sqrt{cm^2 + nm^2}$, oder, wie im Vorhergehenden bewiesen ist, da cn die Tangente der Curve im Punkte c ist, $cn = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

Auf gleiche Weise ist bewiesen, dass:

$$cr = \sqrt{(dx^2 + \Delta y^2)}$$

$$= \sqrt{\left(dx^2 + \left(dy + \frac{1}{2} d^2y + \frac{1}{2.3} d^3y + .. \right)^2 \right)}$$

$$= \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dy\, d^2y + \ldots)}$$

Es ist daher: $\Delta s < \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$

$$\Delta s > \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dy\, d^2y + \ldots)} \quad .$$

Da

$$\Delta s = ds + \frac{1}{2} d^2s + \frac{1}{2.3} d^3s + \ldots$$

so handelt es sich darum, die Grössen ds, d^2s, d^3s .. einzeln zu bestimmen.

4) Lehrsatz: Das erste Differenzial ds (das erste Glied in der Reihe Δs) ist genau gleich $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, so gross oder so klein auch dx genommen werden möge.

Beweis. Zum ersten Differenzial gehören alle diejenigen Glieder, die dx zum Factor haben, z. B. dy. Wäre nun

a) das erste Differenzial um eine Grösse grösser als

$$dx \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} = \sqrt{(dx^2 + dy^2)},$$

so müsste diese Grösse die Form $+ \alpha dx$ haben.

Es sei also $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} + \alpha dx$. Dann ist:

$$\Delta s = \left(\sqrt{(dx^2 + dy^2)} + \alpha dx \right) + \frac{d^2s}{2} + \frac{d^3s}{2.3} + \ldots$$

Nun kann man dx, ohne dass man die Reihe der endlichen Grössen verlässt, so klein nehmen, dass $\frac{d^2s}{2}$, $\frac{d^3s}{2.3}$ u. s. w. (weil sie zweite, dritte und höhere Potenzen von dx enthalten) kleiner bleiben als αdx, so dass $+ \alpha dx + \frac{d^2s}{2} + \frac{d^3s}{2.3} + \ldots$ immer noch das positive Zeichen behält, auch wenn $\frac{d^2s}{2}$, $\frac{d^3s}{2.3}$ .. negativ werden sollte. Diese Summe bezeichnet man kurz mit $+ \beta dx$. Es wäre also $\Delta s = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} + \beta dx$, demnach $\Delta s > \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, was unmöglich ist, da $\Delta s < \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

b) Wäre $ds < \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, also $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} - \alpha dx$, so wäre:

$$\Delta s = \left(\sqrt{(dx^2 + dy^2)} - \alpha dx \right) + \frac{1}{2} d^2s + \frac{1}{2.3} d^3s + \ldots$$

Nun kann dx wieder so klein genommen werden, dass

$$-\alpha dx + \frac{1}{2}d^2s + \frac{1}{2.3}d^3s + \ldots$$

das Zeichen des ersten Gliedes behält und numerisch grösser bleibt als die Summe der zweiten, dritten und folgenden Differenzialien.

Nun ist aber $\Delta s > \sqrt{(dx^2 + \Delta y^2)}$ (der Bogen grösser als seine Sehne), also, wenn man den Werth $\Delta y = dy + \frac{1}{2}d^2y + \ldots$ substituirt:

$$\Delta s > \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dy\,d^2y + \ldots)}$$

Diese beiden Werthe von Δs verglichen:

$$\text{(I)}\quad \Delta s = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} - \alpha dx + \frac{1}{2}d^2s + \frac{1}{2.3}d^3s,$$

$$\text{(II)}\quad \Delta s > \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dy\,d^2y + \ldots)}$$

geben die Reihe (II), analytisch genommen, grösser als die Reihe (I), weil in Reihe (I) noch eine Grösse von dem Werthe des ersten Differenzials, nämlich αdx von $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ subtrahirt wird, während in Reihe (II) möglicherweise nur Glieder von Werthen der zweiten und höheren Differenzialien subtrahirt werden, wie $dy\,d^2y, \ldots$

Es wäre daher nach Reihe (I) Δs gleich dem Kleinern, und nach Reihe (II) Δs grösser als das Grössere, was ein Widerspruch ist; denn was dem Kleinern gleich ist, das kann wohl grösser als das noch Kleinere, aber nicht grösser als das noch Grössere sein.

c) Daraus folgt, dass ds weder grösser noch kleiner sein kann als $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, also $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Das erste Differenzial des Bogens ist daher gleich der Linie cn, die durch die Tangente bestimmt wird, und zwar gilt diess für beliebig viele endliche Werthe von dx. Denn der Coefficient von dx ist unabhängig von der Grösse dx; ist er daher für irgend einen endlichen Werth bewiesen, so gilt er (die singulären Fälle ausgenommen) für alle endlichen Werthe von dx, eine Bemerkung, die schon im Vorhergehenden, beim Differenzial der Ordinate, weiter ausgeführt wurde.

Diese merkwürdige Thatsache, dass sich der Bogen jeder Curve, wie sie auch sein möge, schon in seinem ersten Differenzial zu einer geraden Linie umbildet, giebt die gesuchte allgemeine Formel. Denn da $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ ist, so ist durch Integration:

$$s = \int \sqrt{(dx^2 + dy^2)} + C.$$

§. 146.

Die höheren Differenzialien des Bogens.

Die Zunahme Δs besteht aus der Reihe:

$$ds + \frac{1}{2}d^2s + \frac{1}{2.3}d^3s + \ldots$$

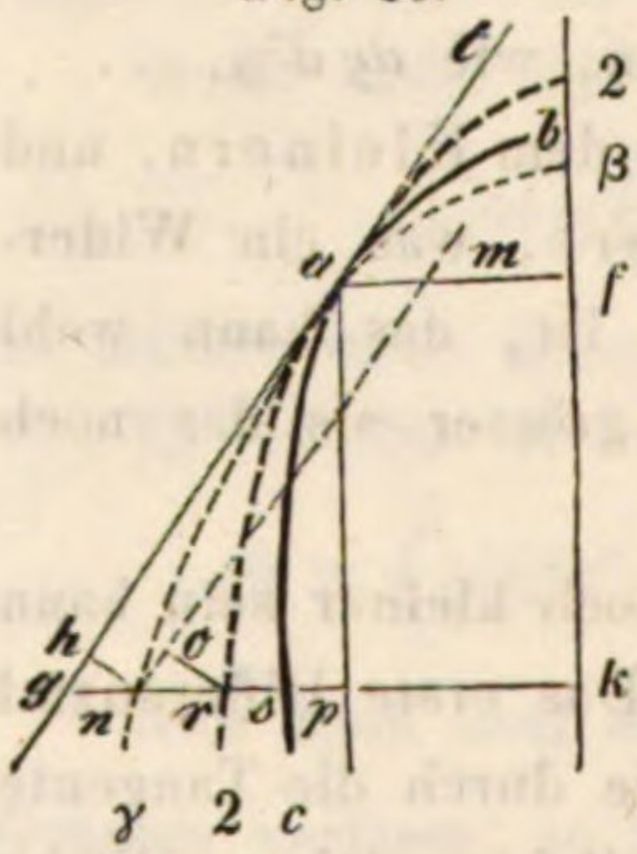
Da nun $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ bestimmt ist, so unterliegt die Bestimmung von d^2s, d^3s u. s. w. keiner weitern theoretischen Schwierigkeit. Um d^2s zu erhalten, differenzirt man $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

Es ist, wenn man dx als constante Zunahme, also x als unabhängige Veränderliche nimmt:

$$d^2s = \frac{dy\,d^2y}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}};$$

ferner ist: $$d^3s = \frac{dy\,d^3y}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} + \frac{dx^2\,(d^2y)^2}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)^3}}.$$ U. s. w.

Fig. 10.



Will man diese Linien geometrisch haben, so sei, da d^2y durch die tangirende Parabel zweiter Ordnung bestimmt wird, die Curve $\beta\alpha\gamma$ diese Parabel, und dann ist d^2s die vierte Proportionale zu: $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, dy, d^2y, oder es ist $\frac{1}{2}d^2s$ gleich der Linie ***hg***, wenn ***hn*** senkrecht auf ag gezogen wird.

Ist ferner $2a2$ die tangirende Parabel dritter Ordnung, so wird durch sie d^3y geometrisch construirt. Es ist nämlich:

$$\frac{1}{2.3}d^3y = nr, \quad \text{also:} \quad \frac{1}{2.3}\frac{dy\,d^3y}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = no$$

(wenn ro auf mn senkrecht, und mn parallel zu ag gezogen wird).

Eben so kann die gerade Linie $\frac{1}{2.3}\frac{dx^2\,(dy^2)^2}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)^3}}$ aus der tangirenden Parabel zweiter Ordnung bestimmt werden. Sie ist gleich $\frac{2}{3}\frac{(hn)^2}{ag}$, deren Construction keine Schwierigkeit mehr hat.

Da $\Delta s = ds + \frac{1}{2}d^2s + \ldots$, so ist, abgesehen von den Zeichen:

$$\text{Bogen } as = (ag) + (hg) + \left(no + \frac{2}{3}\frac{(hn)^2}{ag}\right) + \ldots$$

Auf ähnliche Weise werden die vierten, fünften und nachfolgenden Differenzialien des Bogens construirt. Sie sind sämmtlich gerade Linien, und ihre theilweise Summe oder Differenz giebt in einer endlichen oder unendlichen Reihe genau die Zunahme des Bogens Δs, also den Bogen as, so gross oder so klein auch die Grösse $dx = fk$ innerhalb der Grenzen der Convergenz der Reihen genommen werden möge.

Zusatz 1. Es zerlegt sich demnach die ganze Zunahme des Bogens in eine endliche oder unendliche Reihe gerader Linien, die sämmtlich ihrer Lage und Grösse nach geometrisch construirt werden können. — Das ist aber nicht das Wichtigste. Das Bewunderungswürdige ist, dass man diese einzelnen geraden Linien, diese aufeinanderfolgenden Differenzialien des Bogens sämmtlich, ohne den Bogen selbst zu kennen, aus den bekannten Differenzialien der Ordinate und Abscisse construiren, dass man also aus der gegebenen Coordinaten-Gleichung den Bogen und umgekehrt aus dem gegebenen Bogen die Coordinaten-Gleichung ableiten kann. Denn es ist das erste Differenzial des Bogens geometrisch $ag = \sqrt{ap^2 + pg^2}$, oder $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, woraus sich das wichtige Resultat ergiebt, dass man aus dem Differenzial des Bogens, das geometrisch aus den Differenzialien der Abscisse und der Ordinate bestimmt wird, durch analytische Integration den Bogen selbst findet. Es folgt nämlich aus $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$:

$$s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} + C.$$

Wäre aber der Bogen z. B. als Function der Abscisse gegeben, und die Coordinaten-Gleichung unbekannt, so folgte aus $ds^2 = dx^2 + dy^2$ auch $dy^2 = ds^2 - dx^2$, $dy = dx\sqrt{\left(\frac{ds^2}{dx^2} - 1\right)}$, also:

$$y = \int dx \sqrt{\left(\frac{ds^2}{dx^2} - 1\right)} + C;$$

woraus die Gleichung zwischen der Ordinate und Abscisse gefunden werden kann.

Es können daher schon durch das erste Differenzial die Functionen der Coordinaten und des Bogens in einer allgemeinen, für alle Curven gültigen Formel aus einander abgeleitet werden.

Die Thatsache ist folgende: Die verschiedenen Functionen, die bei Curven bestimmt werden sollen, beruhen zum Theil oder ganz auf Bestimmung krummer Linien, bei denen die niedere Geometrie nichts ausrichten kann. Aber die Differenzialien der Curven führen durchaus auf gerade Linien (oder Kreisbogen bei den Polar-Coordinaten), und diese können durch die niedere Geometrie vollkommen und leicht bestimmt werden. Daraus werden Gleichungen gebildet, deren Auflösung durch Integration Sache der Analysis ist; die Schwierigkeiten sind nicht mehr Schwierigkeiten der Theorie, sondern des Calculs. — Der Bogen ist eine Function der Ordinaten, die bekanntlich gerade Linien sind. Diese geraden Linien, die Ordinaten, haben die Eigenschaft, eine Gleichung oder Reihe zu geben, in welcher der Bogen wirklich durch eine Summe von geraden, von den Ordinaten abhängigen Linien ausgedrückt wird.

Zusatz 2. Leibnitz und seine Nachfolger haben die Curven als aus unendlich vielen aneinandergereihten geraden Linien bestehend angenommen. Auch wir haben die Differenzialien des Bogens als gerade Linien nachgewiesen. Es ist wohl keine Gefahr vorhanden, dass diese Theorie mit der Leibnitz'schen Anschauungsweise verwechselt werde. Beide haben nichts miteinander gemeinschaftlich. Leibnitz nimmt Theile des Bogens, also Werthe Δs als gerade Linien an, die Theorie aber giebt nicht Δs, sondern ds, d^2s etc. als gerade Linien. Leibnitz denkt sich die Curven als Perimeter von unendlich vielen unendlich kleinen aneinander liegenden geraden Linien, während nach unserer Theorie der Bogen Δs ein Bogen bleibt wie er ist, aber seiner Grösse nach gleich ist einer endlichen oder unendlichen Summe von endlichen geraden Linien, die übrigens nicht im Entferntesten aneinander liegen, noch auch sich an die Curven anschmiegen, sondern durch die tangirenden Parabeln der ersten, zweiten, dritten und der nachfolgenden Ordnungen construirt werden. Es stellt sich nur die einfache und schöne Thatsache heraus, dass, wenn man einen Bogen nach dem Taylor'schen Lehrsatz behandelt, die sämmtlichen Glieder seiner Zunahme als gerade Linien erscheinen und erscheinen müssen, und dass nicht ein einziges dieser Glieder in irgend einem Theile irgend eine krumme Linie sein

könne, sondern unbedingt eine gerade Linie sein müsse, so gross oder so klein auch dx genommen werde.

Zusatz 3. Es ist Oben bemerkt worden, dass man ds integriren müsse, wenn man s finden wolle. Darauf ist der Nachdruck zu legen, weil die Integration endliche, algebraische oder transcendente, Ausdrücke giebt. Wer übrigens den Bogen Δs aus der Reihe unmittelbar berechnen will, der kann es auch, nur muss dann die Reihe convergent gemacht, und es müssen so viele Glieder berechnet werden, als zur verlangten Genauigkeit nothwendig sind. Diess ist eine Forderung, die aus der Anwendung auf die Reihen, nicht aber aus den Differenzialien selbst hervorgeht.

Es ist:

$$\Delta s = ds + \frac{1}{2}d^2s + \frac{1}{2.3}d^3s + \dots$$

oder:

$$\Delta s = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} + \frac{1}{2}\frac{dy\,d^2y}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}} + \\ + \frac{1}{2.3}\left(\frac{dy\,d^3y}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}} + \frac{dx^2\,d^2y^2}{\sqrt{(dx^2+dy^2)^3}}\right) + \\ + \frac{1}{2.3.4}\left(\dots\right) + \dots$$

Hat man z. B. als Curve einen Kreis von der Gleichung $y^2 = 2rx - x^2$, nimmt man $x = r$, so erhält man $dy = 0$, und die Formel vereinfacht sich zu folgender:

$$\Delta s = dx + \frac{1}{2.3}\frac{(d^2y)^2}{dx} + \dots$$

oder, da für $x = r$, $d^2y = -\frac{dx^2}{r}$ ist:

$$\Delta s = dx + \frac{1}{2.3}\frac{dx^3}{r^2} + \dots$$

Diess ist der Bogen, der von der Abscisse $x = r$ bis $x = r + dx$ reicht. Eine leichte geometrische Betrachtung zeigt, dass diess ein Bogen ist, der dem Sinus dx entspricht. Der numerische Werth $\frac{\Delta s}{r}$ ist also:

$$\frac{\Delta s}{r} = \frac{dx}{r} + \frac{1}{2.3}\frac{dx^3}{r^3} + \dots$$

Es ist bekannt, dass diess auch die Formel für $arc.\left(sin = \frac{dx}{r}\right)$ ist.

Es kann sich nun Jedermann überzeugen, ob er eine richtige Formel erhalte, wenn er das dritte Differenzial gegen das erste vernachlässigt, und ob diese Formel nur für unendlich kleine Werthe von dx, oder ob sie nicht vielmehr für alle Werthe von dx gelte, die Δs convergent machen. So ist z. B. für $dx = \frac{1}{2}r$:

$$\frac{\Delta s}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3.8} + \ldots$$
$$= 0{,}5208\ldots + \ldots. = 0{,}5235\ldots$$

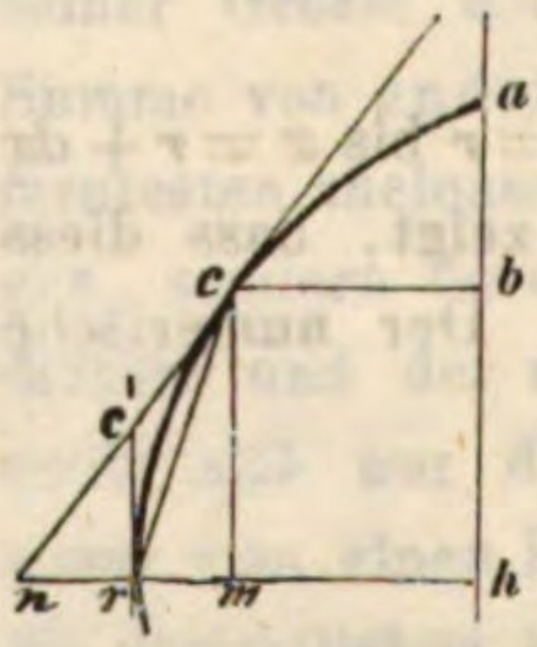
und diess ist der Bogen, der dem Sinus $= \frac{1}{2}$ entspricht, d. h. der Bogen von 30°. Man kann daraus auf's Neue abnehmen, wie man mit den Differenzialien daran ist.

§. 147.

Quadratur ebener Curven.

So wie sich die Function des Bogens in ihren Differenzialien in eine Reihe wohlgeordnet aufeinanderfolgender gerader Linien zerlegt hat, so zerlegt sich die Function der von den Coordinaten und dem Bogen eingeschlossenen Fläche in eine Reihe ebener, von geraden Linien begrenzter Figuren. Existirt nun zwar keine allgemeine Formel, welche die Fläche unmittelbar durch die Coordinaten gäbe, $\varphi = f(x, y)$, so erreicht man doch dasselbe mittelbar durch die Integration. Denn giebt es ein allgemeines Differenzial $d\varphi = d\Big(f(x, y)\Big)$, so braucht man nur die gegebene Coordinaten-Gleichung einer Curve in das Differenzial zu substituiren, und diess dann zu integriren, um für jede Curve die gesuchte Function der Fläche φ zu erhalten.

Fig. 11.



Ist acb die Function φ, und wird x um die beliebige Zunahme $dx = bh$ vermehrt, so nimmt φ um die Grösse $bcrh = \Delta\varphi$ zu (um ein Viereck, das von drei geraden Linien und dem Bogen cr begrenzt ist). Dieses Viereck ist grösser als das Viereck, das von $cb = y$, $bh = dx$, $hr = y + \Delta y$ und von der Sehne $cr = \sqrt{dx^2 + \Delta y^2}$ begrenzt ist. Eben so ist $\Delta\varphi$ kleiner als das Viereck $bcnh$, wenn cn die Tangente zu c, also:

$$cn = \sqrt{dx^2 + dy^2} \text{ ist.}$$

Es ist daher:

$$\text{(I)}\quad \Delta\varphi > \left(ydx + \frac{1}{2}\Delta y\,dx = ydx + \frac{1}{2}dy\,dx + \frac{1}{2.2}d^2y\,dx + \ldots \right)$$

$$\text{(II)}\quad \Delta\varphi < \left(ydx + \frac{1}{2}dy\,dx = ydx + \frac{1}{2}dy\,dx \right).$$

Die beiden Vierecke, zwischen deren Werthen der Werth $\Delta\varphi$ liegt, haben die Glieder ydx und $\frac{1}{2}dy\,dx$ gemeinschaftlich, und unterscheiden sich nur in Werthen der höheren Differenzialien.

Nun ist aber:

$$\Delta\varphi = d\varphi + \frac{1}{2}d^2\varphi + \frac{1}{2.3}d^3\varphi + \ldots$$

Es ist daher nothwendig das erste Glied $d\varphi = ydx$, so gross auch dx genommen werden möge.

Beweis. Wäre $d\varphi < ydx$, also $d\varphi = ydx - \alpha dx$ (da $d\varphi$ nur Grössen von der ersten Potenz von dx enthalten kann), so wäre, da $\Delta\varphi = d\varphi + \frac{1}{2}d^2\varphi + \frac{1}{2.3}d^3\varphi + \ldots$ ist:

$$\Delta\varphi = (ydx - \alpha dx) + \frac{1}{2}d^2\varphi + \frac{1}{2.3}d^3\varphi + \ldots$$

für beliebig kleine Werthe von dx kleiner als:

$$ydx + \frac{1}{2}dy\,dx + \frac{1}{2.2}d^2y\,dx + \ldots$$

was unmöglich ist, da

$$\text{(I)}\quad \Delta\varphi > ydx + \frac{1}{2}dy\,dx + \frac{1}{2.2}d^2ydx + \ldots$$

Wäre aber $d\varphi > ydx$, also $d\varphi = ydx + \alpha dx$, so wäre:

$$\Delta\varphi = d\varphi + \frac{1}{2}d^2\varphi + \frac{1}{2.3}d^3\varphi + \ldots$$

$$\Delta\varphi = (ydx + \alpha dx) + \frac{1}{2}d^2\varphi + \ldots$$

grösser als $ydx + \frac{1}{2}dy\,dx$, was unmöglich ist, da

$$\text{(II)}\quad \Delta\varphi < ydx + \frac{1}{2}dy\,dx \text{ ist.}$$

Es ist daher $d\varphi = ydx$, und diese Gleichung ist vollkommen genau, so gross oder so klein auch dx sein möge.

Hat man einmal $d\varphi$ in allgemeiner Formel, so kann man die nachfolgenden Glieder sehr leicht durch Differenzirung finden.

Es ist nämlich, da $d\varphi = ydx$ ist:

$$d^2\varphi = dy\,dx;\quad d^3\varphi = d^2y\,dx,\quad \text{u. s. w.,}$$

so dass sich die Reihe

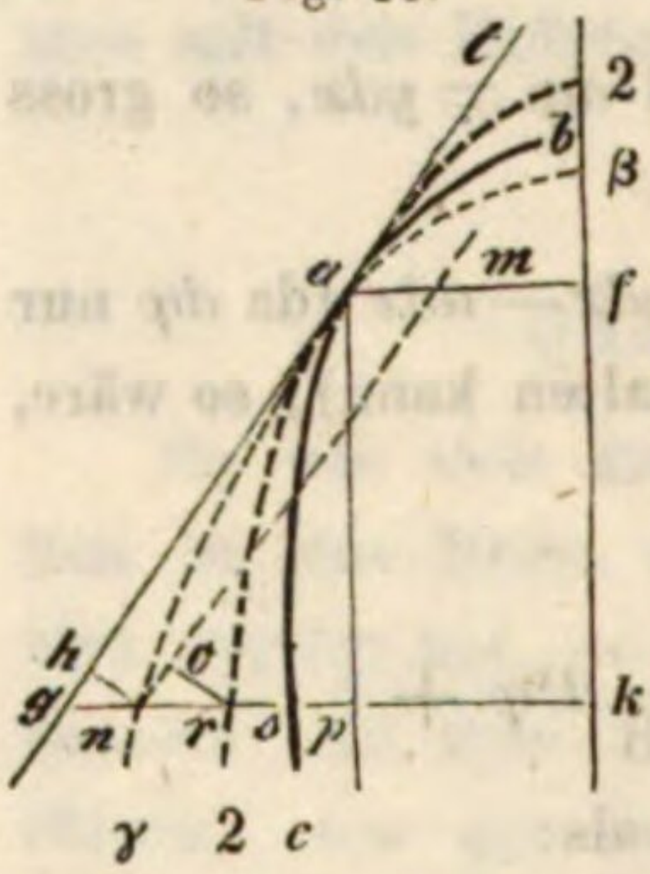
$$\Delta\varphi = d\varphi + \frac{1}{2}d^2\varphi + \frac{1}{2.3}d^3\varphi + \ldots$$

darstellt:

$$\Delta\varphi = ydx + \frac{1}{2}dy\,dx + \frac{1}{2.3}d^2y\,dx + \ldots.$$

Will man diese Ausdrücke geometrisch construiren, so werden, da dx gegeben ist, die übrigen Linien durch die tangirenden Parabeln construirt.

Fig. 10.



Und zwar ist, wenn $af = y$, $fk = dx$ ist, ydx gleich dem Rechteck $afpk$. Ferner ist $\frac{1}{2}dy\,dx$ gleich dem halben Rechteck aus den Linien gp und ap. Eben so ist

$$\frac{1}{2.3}d^2y\,dx = \frac{1}{3}\left(\frac{d^2y}{2}dx\right)$$

gleich dem dritten Theile des Rechtecks aus ng und ap, wenn βan die tangirende Parabel zweiter Ordnung ist. Endlich ist:

$$\frac{1}{2.3.4}d^3y\,dx = \frac{1}{4}\left(\frac{d^3y}{2.3}dx\right)$$

gleich dem vierten Theile des Rechtecks aus $\frac{d^3y}{2.3} = nr$ und aus $dx = ap$, wenn $\frac{d^3y}{2.3}$ durch die tangirende Parabel dritter Ordnung construirt wird. Und so weiter.

Es ist daher die ganze Zunahme der Fläche gleich der Summe von endlich oder unendlich vielen Rechtecken, also von Figuren, die von geraden Linien begrenzt werden, so gross oder so klein auch dx genommen werden möge.

Zusatz 1. Um die Fläche selbst zu finden, muss man $d\varphi$ integriren. Es ist:

$$\varphi = \int d\varphi = \int ydx + C.$$

Die Integration ist vorzuziehen, weil man durch sie allgemeine und endliche Formeln erhält.

Wer jedoch Lust hat, kann diese Fläche auch aus der Reihe $\Delta\varphi$ selbst berechnen, und er wird immer richtige Resultate erlangen, so lange $\Delta\varphi$ convergent bleibt.

Ist z. B. ein Kreis gegeben: $y^2 = 2rx - x^2$, und will man die Fläche, die von der Abscisse x bis zur Abscisse $x + dx$ liegt, die also von der Abscisse dx, von den Ordinaten y und $y + \Delta y$ und von dem entsprechenden Bogen begrenzt wird, so ist:

$$ydy = (r - x)\,dx; \quad dy = \frac{(r - x)\,dx}{y};$$

$$yd^2y + dy^2 = -\,dx^2; \quad d^2y = -\,\frac{dx^2}{y} - \frac{dy^2}{y} \text{ u. s. w.}$$

Es ist daher:

$$\Delta\varphi = d\varphi + \frac{1}{2}d^2\varphi + \frac{1}{2.3}d^3\varphi + \ldots$$

$$\Delta\varphi = ydx + \frac{1}{2}dy\,dx + \frac{1}{2.3}d^2y\,dx + \ldots.$$

Nehmen wir, um hier eine kurze Formel zu haben, $x = r$, so wird $y = r$ und $dy = 0$, und es ist:

$$\Delta\varphi = rdx - \frac{1}{2.3}\frac{dx^3}{r} - \frac{1.3.dx^5}{2.3.4.5\,r^3} - \ldots$$

Setzt man z. B. $dx = \frac{1}{2}r$, so wird:

$$\Delta\varphi = r^2(0{,}5 - 0{,}02083 - 0{,}00075),$$
$$= 0{,}4783\,..\,r^2.$$

Es kann sich nun Jeder leicht überzeugen, dass dieser Werth bis zur 4ten Dezimalstelle richtig ist. Man kann ihn aber auch bis zur 100sten Dezimalstelle richtig erhalten, wenn man alle nachfolgenden Glieder, die auf die verlangten Dezimalstellen Einfluss haben, in die Rechnung mit aufnimmt. Und nun frage ich, ob Jemand zweifeln könne, dass dieser Werth der gesuchten Kreisfläche richtig ist? Und wenn nicht, ob er wohl noch behaupten könne, dass man das zweite Differenzial gegen das erste, das dritte gegen das zweite u. s. w. vernachlässigen könne? Und wenn nicht, wird man dann noch läugnen können, dass die Differenzialien wirklich endliche Grössen sind, und zwar die angegebenen wirklichen geradlinigen Figuren, genau von dem Flächen-Inhalte, wie er ihnen zukommt? — Will man aber läugnen, dass diess die wirklichen Differenzialien sind, so frage ich, worin sich denn diese von den frühern Differenzialien ydx, $dy\,dx$ u. s. w. unterscheiden, ob sie nicht genau die nämlichen Operationen ausdrücken, und ob sie um ein Minimum grösser

oder kleiner sein dürfen, als sie sind? Will Jemand diess läugnen, dann muss er die Taylor'sche Reihe angreifen, er muss bestreiten, dass man analytisch die Werthe $d\varphi$, $d^2\varphi$, $d^3\varphi$ u. s. w. ableiten könne, ohne auf unendlich kleine Grössen zurückzugehen (und diess ist es, was noch hie und da unbestimmt hingenommen wird); will er aber diess unternehmen, dann hat er es mit der ganzen Analysis aufzunehmen.

Zusatz 2. Das Wichtigste ist wieder, dass der Flächen-Inhalt dieser von geraden Linien begrenzten Figuren auf's Leichteste geometrisch bestimmt werden kann. So ist das Viereck $afkp = ydx$, das Dreieck $gap = \frac{1}{2}dy\,dx$ u. s. w. Dadurch sind Gleichungen zwischen den Differenzialien der Fläche und den Coordinaten und ihren Differenzialien gegeben. Die Bildung dieser Gleichungen fällt ganz der geometrischen Betrachtung anheim. Sind aber einmal die Gleichungen gebildet, z. B. $d\varphi = ydx$, so ist das fernere Geschäft rein analytisch, und es können durch Integration die Flächen aus den gegebenen Coordinaten-Gleichungen und umgekehrt diese aus den gegebenen Flächen auf's Leichteste gefunden werden.

Also schon durch das erste Differenzial der Fläche kann der Flächen-Inhalt einer Curve aus ihrer gegebenen Coordinaten-Gleichung gefunden werden.

Das Verfahren bei der Herstellung dieser Resultate verdient besonders hervorgehoben zu werden. Es sind geometrische Grössen, z. B. Flächen, aus ihren Coordinaten-Gleichungen zu bestimmen. Sie sind wohl als Probleme gegeben, aber man kann sie nicht unmittelbar auflösen. Darum geht man zu ihren Differenzialien über. Diese sind einfache, von geraden Linien begrenzte Figuren, und sie können auf's Leichteste bestimmt werden. So ist z. B. das erste Differenzial der Fläche nicht grösser und nicht kleiner, als das Rechteck zwischen der Ordinate und der willkührlichen Zunahme der Abscisse. Diess Rechteck ($d\varphi$) kann nun auf den analytischen Ausdruck gebracht werden, $d\varphi = ydx$; und wird dieser Ausdruck integrirt, so wird die gesuchte Fläche selbst gefunden. Es ist $\varphi = \int ydx + C$. — So wird klar, wie aus der bekannten Coordinaten-Gleichung und dem Differenzial $d\varphi = ydx$, die Fläche selbst, oder wie aus der bekannten Fläche, wo also mit φ auch

das Differenzial dq bekannt ist, die Gleichung zwischen y und x selbst durch Integration bestimmt werden könne. Ist diese bestimmt, so sind auch die andern Functionen der Tangente, der Normale, der Evolute u. s. w. durch die Fläche, und umgekehrt diese durch jene bestimmbar. Diess giebt einen durchgreifenden Parallelismus zwischen analytischem Calcul und geometrischer Construction.

Zusatz 3. Geometrische Grössen können nicht ohne geometrische Betrachtungen auf Gleichungen und analytische Ausdrücke gebracht werden. Es ist daher blosse Redensart, wenn gesagt wird, dass Resultate, wie z. B. der Ausdruck des Differenzials der Fläche $dq = ydx$, ohne Geometrie, rein analytisch gefunden werden. Es ist zwar einleuchtend, dass man diese Gleichung auch ohne *sichtbar verzeichnete* Figur herstellen kann, aber darum ist die Figur doch nicht innerlich, im Gange des Beweises entbehrt worden. — Würde sich die ganze Zunahme der Fläche in der Reihe der einzelnen Differenzialien nicht in solche Flächen zerlegen, die unmittelbar aus den sie begrenzenden Linien bestimmt werden könnten; d. h. würden diese Flächen nicht sämmtlich von geraden Linien begrenzt, so wäre es nicht möglich, adäquate Gleichungen der Differenzial-Ausdrücke zu bilden; und die gegenseitige Reduction der Coordinaten-Gleichungen, der Flächen, der Bogen, der Tangenten u. s. w. würde nicht stattfinden können. Diess ist die erfolgreichste Thatsache der Differenzirung, dass sich alle krummen Linien in ihren Differenzialien in gerade Linien (oder Kreisbogen), und alle Flächen in Ebenen, die von geraden Linien (oder Kreisbogen) umschlossen sind, zerlegen, so dass es sehr leicht ist, die analytischen Gleichungen dieser geometrischen Grössen zu bestimmen.

Zusatz 4. Dabei wiederhole ich die frühere Bemerkung, dass der Differenzial-Calcul auf Geometrie nur angewendet, nicht aber auf Geometrie gegründet wird. Es sollen nur die analytischen Resultate des Differenzial-Calculs in ihren Anwendungen auf Geometrie (und Mechanik) vor der Zurücksetzung auf unendlich kleine Grössen bewahrt werden. Sie werden ja bereits analytisch als wirkliche, endliche Grössen behandelt, und es sollte wohl Niemand mehr gefunden werden, der die *analytischen* Formeln des Differenzial-Calculs auf unendlich kleine Grössen gründen wollte, da *La Grange* in seiner Functionen-Theorie schon lange auf dem

rechten Wege der Auffindung der *analytischen* Resultate des Differenzial-Calculs vorangegangen ist. Sind aber die Differenzialien, analytisch betrachtet, endliche und beliebig grosse Grössen, so müssen sie auch als geometrische (und mechanische) Grössen *endliche* Grössen sein. Die Schwierigkeit bestand nur darin, nicht dass sie endliche Grössen seien, sondern dass sie bisher nicht als endliche Grössen erkannt und nachgewiesen werden konnten. Weil man sie nicht als solche nachweisen konnte, hat man sich unter den unbestimmten Begriff der unendlich kleinen Grössen geflüchtet, ein Begriff, der weder deutlich, noch anschaulich gemacht werden kann. Ist man aber im Stande, die Differenzialien als endliche geometrische und mechanische Grössen nachzuweisen, so hat man allerdings auch für die analytischen Probleme neue Anhaltspunkte, da in jeder Wissenschaft ein Fortschritt in dem einen Zweige auch einen Fortschritt in den andern Zweigen veranlassen muss.

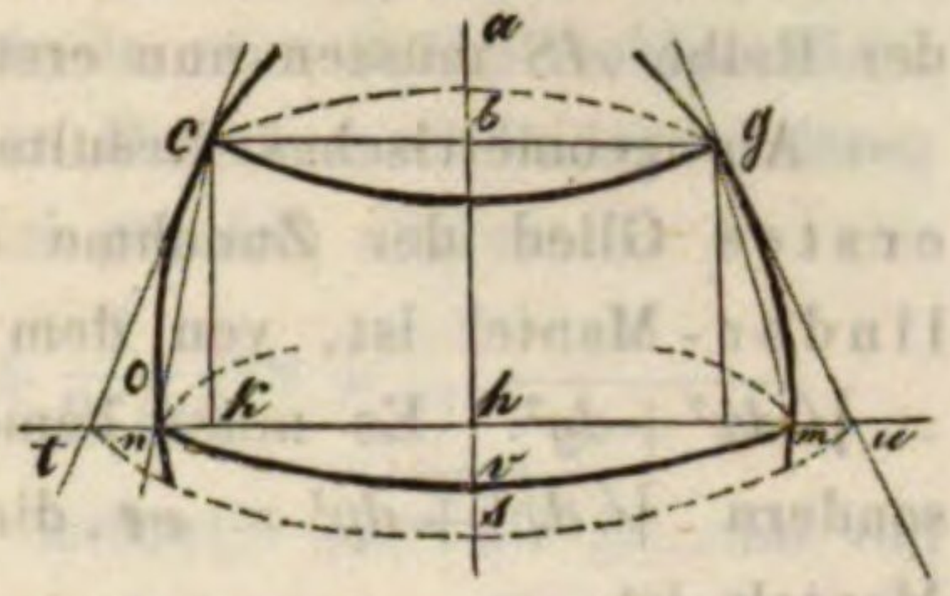
§. 148.

Planirung der Rotations-Oberflächen.

Bei den nun folgenden Beweisen werde ich mich kürzer fassen. — Man sucht irgend eine Function F, z. B. die Planirung der Oberflächen. Diese Function findet man nicht unmittelbar, aber man findet zwei Grössen α und β, von denen die eine α immer grösser und die andere β immer kleiner ist als ΔF, und diese Grössen α und β sind so beschaffen, dass sie Ausdrücke enthalten, die dx, dx^2 u. s. w. zu Factoren haben. Stimmen nun die grössern und kleinern Grössen in dem Ausdruck kdx (der dx in der ersten Potenz zum Factor hat) überein (und man muss immer solche Grössen α und β suchen, die in kdx übereinstimmen), so muss kdx selber das erste Glied in der Reihe ΔF, d. h. kdx muss genau gleich dF sein. Denn wäre $kdx > dF$, so müsste auch in strenger Consequenz ΔF grösser sein als α, was unmöglich ist, da es kleiner ist als α; wäre aber $kdx < dF$, so müsste auch ΔF kleiner sein als β, was unmöglich ist, da es grösser ist als β. Es ist daher kdx das erste Differenzial der gesuchten Function F, so gross oder so klein auch dx genommen werden möge. — Diess ist in Kürze der Gang aller Beweise.

Es sei *ac* der Bogen einer Curve, und die Abscisse *ab* werde um $bh = dx$ vermehrt. Der Bogen *ac* nimmt dann um $con = \Delta s$ zu, die Ordinate *cb* wird $hn = y + \Delta y$. Ist *ct* die Tangente der Curve in *c*, so ist $ht = y + dy$, so gross oder so klein auch dx sein möge. Bewegt sich der Bogen *acn* um die Abscisse *ah* als Axe, so beschreibt er die Rotations-Fläche *aconvmga*, und der Bogen *con* beschreibt die abgekürzte Rotations-Fläche *conomgc*. Ist die Gleichung der Rotations-Oberfläche: *S*, so ist $convmgc = \Delta S$.

Fig. 12.



Diese Rotations-Fläche ist immer kleiner, als die Oberfläche des abgekürzten Kegel-Mantels, den die Tangente *ct* beschreibt, kleiner als $ctsugc = \alpha$, und immer grösser als die Oberfläche des abgekürzten Kegel-Mantels, den die Sehne *cn* beschreibt, grösser als $cnvmgc = \beta$. Der Flächen-Inhalt eines jeden dieser abgekürzten Kegel-Mantels ist durch die Elementar-Geometrie bestimmt. Ist nämlich der kleinere Radius gleich r, der grössere gleich R, und die beschreibende gerade Linie gleich λ, so ist der Flächen-Inhalt des abgekürzten Kegel-Mantels gleich $F = \pi(R + r)\lambda$.

Es ist daher:

$$\alpha = \pi(y + dy + y)\sqrt{dx^2 + dy^2}$$
$$\beta = \pi(y + \Delta y + y)\sqrt{dx^2 + \Delta y^2};$$

oder:

$$\alpha = 2\pi y\sqrt{dx^2 + dy^2} + \pi dy\sqrt{dx^2 + dy^2}$$
$$\beta = 2\pi y\sqrt{dx^2 + \left(dy + \frac{1}{2}dy^2 + \ldots\right)^2} +$$
$$+ \pi\left(dy + \frac{1}{2}d^2y\,..\right)\sqrt{dx^2 + \left(dy + \frac{1}{2}d^2y + \ldots\right)^2}$$

Denkt man sich β nach Potenzen von dx entwickelt, so wird es:

$$\beta = 2\pi y\sqrt{dx^2 + dy^2} + Mdx^2 + Ndx^3 + \ldots$$

Die beiden Werthe α und β stimmen also in dem ersten Gliede, das dx in der ersten Potenz enthält, überein. Es ist daher nach dem allgemeinen Beweise das erste Glied der Reihe ΔS genau gegeben, oder es ist $dS = 2\pi y\sqrt{dx^2 + dy^2}$, so gross oder

so klein auch dx genommen werden möge. Die übrigen Glieder der Reihe ΔS müssen nun erst noch weiter gesucht werden. —

Als geometrisches Resultat stellt sich heraus, dass dS als erstes Glied der Zunahme der Rotations-Oberfläche ein Cylinder-Mantel ist, von dem Radius $= y$, und von der Höhe $= \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Es muss bemerkt werden, dass nicht $dx = ck$, sondern $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \boldsymbol{ct}$ die senkrechte Höhe des Cylinder-Mantels ist.

Zusatz. Hätte man im Beweise als die kleinere Grösse β den Cylinder-Mantel genommen, der durch die Linie $ck = dx$ beschrieben wird, so wäre wohl auch β immer kleiner als ΔS, aber die beiden Grössen α und β wären nun:

$$\alpha = 2\pi y\sqrt{dx^2 + dy^2} + \pi dy\sqrt{dx^2 + dy^2}$$
$$\beta = 2\pi y\, dx.$$

Beide Werthe würden also nicht in einem Gliede kdx übereinstimmen, und würden darum im Beweise unbrauchbar sein. Man muss daher weiter forschen, bis man zwei Grössen α und β gefunden hat, die immer grösser und kleiner als ΔS sind, und die auch in dem Gliede, das dx in der ersten Potenz zum Factor hat, übereinstimmen. Solche zwei Grössen α und β sind nun auch im obigen Beweise angewendet worden.

Will man nun die höheren Differenzialien von S, so braucht man nach der Formel

$$\Delta S = dS + \frac{1}{2}d^2S + \frac{1}{2.3}d^3S + ..$$

nur dS, das man bereits kennt, der Reihe nach zu differenziren. Es ist, da $dS = 2\pi y\sqrt{dx^2 + dy^2}$:

$$d^2S = 2\pi dy\sqrt{dx^2 + dy^2} + \frac{2\pi y\, dy\, dy^2}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

Das zweite Differenziale besteht demnach aus den Oberflächen zweier Kreis-Cylinder, deren erster dy zum Radius, und $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ zur Höhe, und deren zweiter y als Radius, und die vierte Proportionale von $\sqrt{dx^2 + dy^2} : dy = d^2y : h$ zur Höhe hat. Da alle Differenzialien der Ordinate bekannt sind, so hat die Construction keine Schwierigkeit. Die Differenzialien d^2y, d^3y u. s. w. werden durch die aufeinanderfolgenden tangirenden Parabeln construirt. Auf diese Art werden die dritten und höhern Differenzialien von S mit Leichtigkeit gefunden.

Resultat. Es zerlegt sich demnach die ganze Zunahme ΔS der Rotations-Flächen auf's Schönste in eine Reihe wohlgeordnet aufeinanderfolgender Oberflächen von Rotations-Cylindern, deren Radien und Höhen durch die Formel gegeben sind:

$$\Delta S = dS + \frac{1}{2}d^2S + \frac{1}{2.3}d^3S + \ldots$$

Jedes dieser Glieder ist die Oberfläche oder die Summe von Oberflächen von Rotations-Cylindern; keines derselben kann eine andere geometrische Grösse sein, als nur die Oberfläche von Rotations-Cylindern, und die Summe aller dieser Glieder giebt den Werth ΔS, so gross oder so klein auch dx innerhalb der Grenzen der Convergenz der Reihe ΔS genommen werden möge.

Jedoch hat man statt dieser Reihen-Berechnung ein viel rascher zum Ziele führendes Mittel in der Integration. Es ist nämlich:

$$S = \int 2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2} + C.$$

§. 149.

Cubatur der Rotations-Körper.

Die Formel für die Cubatur wird so einfach, dass man den Beweis auch ohne sichtbar verzeichnete Figur führen kann.

Wird in einem Rotations-Sphäroid k die Abscisse x um eine beliebige Grösse dx vermehrt, so ist die ganze Zunahme Δk ein abgekürzter Rotations-Körper, dessen oberer Radius gleich y, und dessen unterer gleich $(y + \Delta y)$ ist.

Ist in Δy das erste Glied dy positiv, also $y + dy > y$, so ist die Zunahme des Rotations-Körpers grösser als ein Cylinder vom Radius y und von der Höhe dx, und kleiner als ein Rotations-Cylinder vom Radius $(y + dy)$ und von der Höhe dx. Denn der erste Cylinder liegt ganz in Δk, ist also ein Theil von Δk, und der zweite umschliesst ganz Δk, das also ein Theil von ihm ist.

Ist dy negativ, so ist umgekehrt der erste Cylinder grösser als die ganze Zunahme des Rotations-Körpers, und der zweite kleiner als dieser.

In beiden Fällen geben also diese beiden Cylinder jene Werthe α und β, die immer grösser und kleiner sind als Δk, und die

auch, wie die Formel zeigt, in dem ersten Gliede, welches dx zum Factor hat, übereinstimmen.

Der cubische Inhalt des ersten Cylinders ist: $y^2\pi dx$, der cubische Inhalt des zweiten Cylinders ist:

$$(y + dy)^2\pi dx = y^2\pi dx + 2y\,dy\,\pi dx + dy^2\pi dx.$$

Die Werthe α und β stimmen in dem Gliede überein, das dx in der ersten Potenz zum Factor hat, in $y^2\pi\,dx$. Es ist demnach $y^2\pi\,dx$ genau das erste Glied in der Reihe Δk, gleich dk, so gross oder so klein auch dx genommen werden möge.

Es ist $dk = y^2\pi\,dx$, also durch Differenzirung:

$$d^2k = 2y\,dy\pi\,dx, \quad d^3k = 2\pi dy^2\,dx + 2\pi y\,d^2y\,dx, \quad \text{u. s. w.}$$

Das erste Differenzial dk ist also ein Cylinder von dem Radius y und der Höhe dx.

Das zweite Differenzial d^2k ist ein senkrechter Cylinder, dessen Radius die mittlere Proportionale zwischen y und dy, und dessen Höhe $2dx$ ist.

Das dritte Differenzial d^3k ist die Summe (oder Differenz) zweier Cylinder, die beide die Höhe $2dx$ haben, und von denen einer dy, und der andere die mittlere Proportionale von y und d^2y zum Radius hat. U. s. w.

Die ganze Zunahme der Rotations-Körper zerlegt sich in eine Reihe wohlgeordnet aufeinanderfolgender Cylinder, deren Höhen und deren Radien auf's Genaueste bestimmt sind, so gross oder so klein auch dx sein möge.

Die ganze Zunahme wird dann aus der Reihe berechnet:

$$\Delta k = dk + \frac{1}{2}d^2k + \frac{1}{2.3}d^3k + \ldots$$

wofür man auch das rascher zum Ziele führende Hilfsmittel der Integration hat:

$$k = \int dk + C = \int \pi y^2\,dx + C.$$

Diess sind die Thatsachen und Formeln, die sich für Linien, Flächen und Körper ergeben, wenn man bei ihrer Aufstellung von geradlinigen Coordinaten ausgeht.

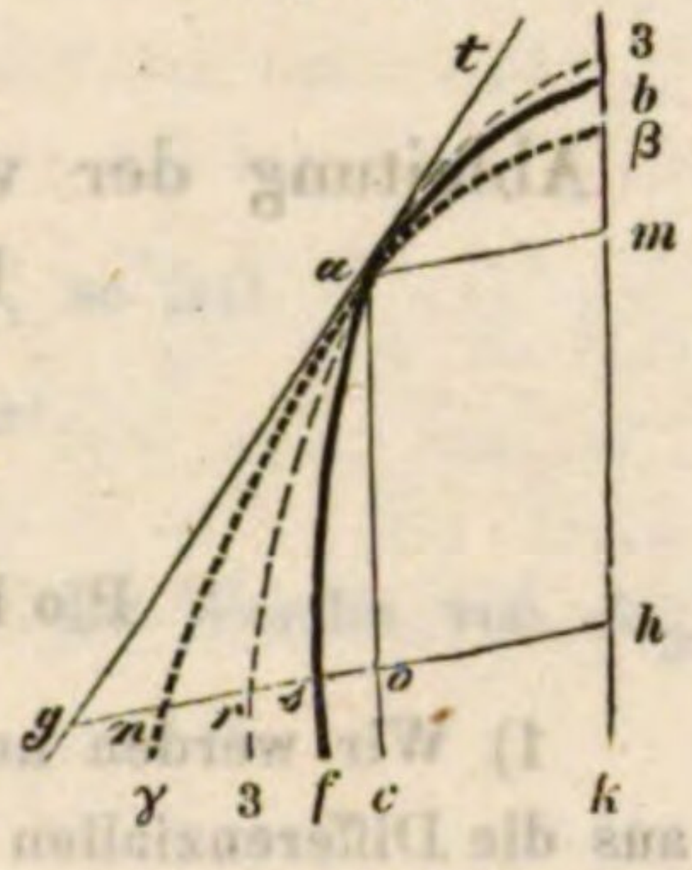
§. 150.

Allgemeiner Zusatz über die Differenzialien der schiefwinkeligen Coordinaten.

Die Resultate der vorhergehenden Lehrsätze gelten auch, wenn die Coordinaten, statt senkrecht aufeinander zu stehen, einen beliebigen Winkel $amb = \varphi$ mit einander machen.

1) Ist **baf** die gegebene Curve, **tag** die Tangente im Punkte a, $\beta a \gamma$ die tangirende Parabel zweiter, **3a3** die tangirende Parabel dritter Ordnung u. s. w.; wird ferner $x = bm$ um eine beliebige Grösse $dx = mh$ vermehrt, so geht die Ordinate $am = y$ in $hs = y + \Delta y$ über.

Fig. 13.



Es ist daher, wenn ac parallel mit bk gezogen wird, die Linie $os = \Delta y$, und es ist, abgesehen vom Zeichen: $og = dy$, $ng = \frac{1}{2} d^2y$, $nr = \frac{1}{2.3} d^3y$ etc., was ganz auf dieselbe Art, wie für rechtwinkelige Coordinaten bewiesen wird.

2) Für $dx = mh$ ist die Zunahme des Bogens B gleich **as**, also $\Delta B = as$; das erste Differenzial, oder dB aber ist gleich der geraden Linie: $ag = \sqrt{(ao^2 + go^2 - 2ao \,.\, go \cos\varphi)}$

$= \sqrt{(dx^2 + dy^2 - 2dx\,dy\cos\varphi)}$.

3) Die ganze Zunahme der Fläche ist gleich $mash$; das erste Glied dieser Zunahme, d. h. dF, ist gleich dem Parallelogramm $aomh = y \sin\varphi\, dx$.

4) Auf gleiche Art ist das erste Differenzial der Rotations-Oberfläche gleich einem Cylinder-Mantel, dessen Seiten-Höhe $= ag = \sqrt{(dx^2 + dy^2 - 2dx\,dy\cos\varphi)}$, und dessen Radius gleich y ist.

5) Das Differenzial des Rotations-Körpers ist ein Cylinder, dessen Basis zum Radius die Ordinate y hat, und dessen Axe gleich dx ist. — Die analytischen Ausdrücke dieser Flächen und Körper aufzustellen, unterliegt keiner weitern Schwierigkeit.

Cap. XIX.

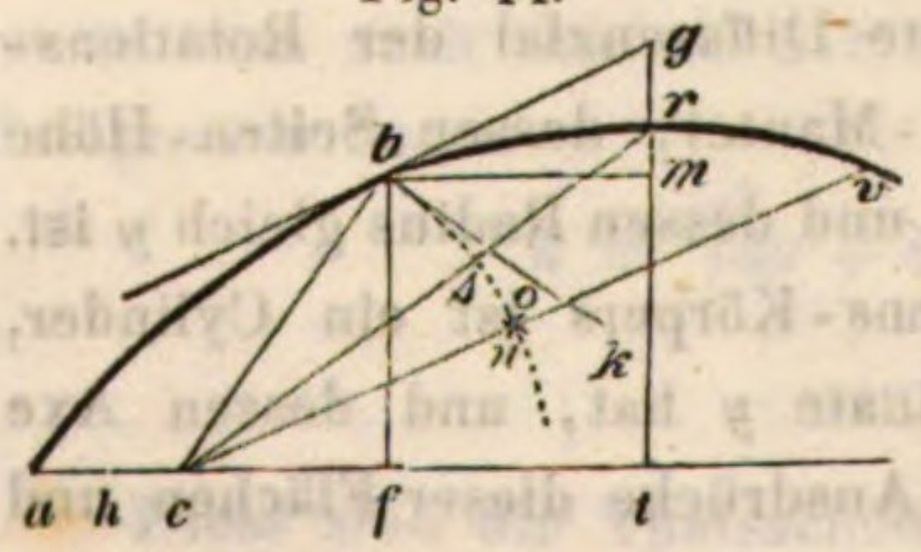
Ableitung der vorausgehenden Resultate aus den Polar-Coordinaten.

§. 151.

Polar-Coordinaten.

1) Wir werden nun vom Standpunkte der Polar-Coordinaten aus die Differenzialien der Curven aufzufinden suchen. Der Kürze halber können wir uns auf die bisher gewonnenen Resultate berufen. Würde man ursprünglich von Polar-Coordinaten ausgehen, so würde man die Resultate genuin aus der Natur der Sache selbst ableiten müssen, wobei man dann beim Uebergang zu geradlinigen Coordinaten den Vortheil hätte, dass man sich nun bei ihnen auf die aus den Polar-Coordinaten abgeleiteten Resultate berufen könnte. — Es ist gleichgültig, welchen Weg man geht, der eine ist so zugänglich wie der andere, der eine so leicht wie der andere.

Fig. 14.



2) Es sei für einen Punkt b der Curve $abrv$ die Linie hf gleich der Abscisse x, $bf = y$. In der Abscissen-Linie sei ein Punkt c, um welchen sich der veränderliche Radius $= u$ (ca, cb, cr, cv) von a gegen b, r, v bewegt, und durch seine Endpunkte die Curve $abrv$ beschreibt. Der veränderliche Winkel, den diese Radien mit der Abscissenlinie at machen, sei φ, so ist die Gleichung zwischen den Radien und den Winkeln φ die Polar-Gleichung der Curve $f(u, \varphi) = 0$.

Nimmt für den Punkt b der Curve die Abscisse $x = hf$ um die willkührliche Grösse $dx = ft$ zu, so ist, wie wir wissen: $\Delta y = mr$, $dy = mg$, $\Delta u = sr$, $\Delta\varphi = \angle\, bcr$.

3) Es kommt nun darauf an, die Differenzialien du, $d^2u \ldots$, $d\varphi$, $d^2\varphi \ldots$ geometrisch zu bestimmen. (Denn analytisch können sie ja ohnehin aus den allgemeinen Operationen bestimmt werden. Man will wissen, was ihre geometrischen Resultate sind, damit man von diesen aus die geometrischen Probleme angreifen könne.)

Nun ist:

$$x = hc + cf = a - u\cos\varphi,$$

und:

$$y = bf = u\sin\varphi.$$

Es sei x die unabhängig Veränderliche, so ist:

$$dx_x = -\cos\varphi du_x + u\sin\varphi d\varphi_x,$$

$$dy_x = \sin\varphi du_x + u\cos\varphi d\varphi_x.$$

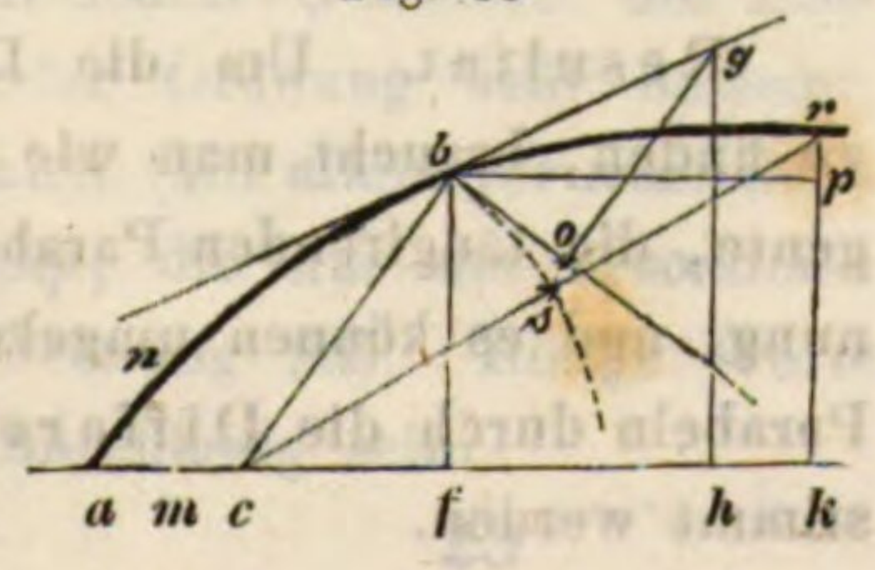
Bestimmt man aus diesen Gleichungen die Werthe von du_x und $ud\varphi_x$, so erhält man:

$$du_x = \sin\varphi dy_x - \cos\varphi dx,$$

$$ud\varphi_x = \cos\varphi dy_x + \sin\varphi dx.$$

4) Will man diese Werthe geometrisch construiren, so sieht man auf den ersten Blick, dass sich die Werthe dx und dy_x einerseits und du und $ud\varphi$ andrerseits gegeneinander wie rechtwinkelige Coordinaten einer geraden Linie (bg) verhalten, die sich unter einem Winkel $= (180^0 - \varphi^0)$ durchschneiden. Diese Linien sind aber, wenn bo senkrecht auf cb und eine (nicht verzeichnete) Linie go senkrecht auf bo im Punkt o gezogen gedacht wird, einzeln: $bo = ud\varphi$ und $go = du$, so gross oder so klein auch dx genommen werden möge. Denkt man sich die gerade Linie in einen Kreis-Bogen verwandelt, etwa gleich bn, und zieht man den Radius cn, so ist der Winkel bcn gleich $d\varphi = \angle\, bcv$, während $\Delta\varphi = \angle\, bcr$, und $\Delta u = sr$ ist.

Fig. 15.



5) Oder nimmt man φ als unabhängig Veränderliche, so sei $d\varphi = \angle\, bcr$, und der Kreisbogen bs gleich $ud\varphi$. Denkt man sich diesen Kreisbogen rectificirt gleich bo und bo senkrecht auf bc gezogen, also als Tangente des

Kreisbogens bs im Punkte b, so ist die Linie og, welche im Punkte o senkrecht auf bo gezogen wird, bis sie die Tangente bg im Punkte g durchschneidet, die gesuchte Linie du_φ. Die Linie fk ist gleich Δx_φ und $fh = dx_\varphi$; die Linie rp ist gleich Δy_φ und die Linie $gh = y + dy_\varphi$, also $dy_\varphi = gh - bf$.

Diese Lehrsätze folgen unmittelbar aus den Coordinaten-Gleichungen:

$$dx_x = u \sin\varphi d\varphi_x - \cos\varphi du_x$$
$$dy_x = \sin\varphi du_x + u\cos\varphi d\varphi_x.$$

6) Nimmt man du als unabhängige Veränderliche (was nicht mehr in der Figur verzeichnet ist), so nimmt man den Radius $u + du$, bis er die Curve abo durchschneidet, etwa in r; nimmt dann rs und trägt diese Linie senkrecht auf bo auf, bis sie die Tangente trifft, wodurch ein Punkt l in der Linie bo bestimmt wird. Die Linie bl ist dann $= ud\varphi$, und diess in einen Kreis-Bogen verwandelt, giebt: $d\varphi_u$, dx_u und dy_u.

7) Wird die Zunahme des Bogens dB als unabhängige Veränderliche genommen, so denke man ihn rectificirt, ziehe die Tangente, nehme auf ihr eine Gerade $bg = dB\,(= \sqrt{dx^2 + dy^2})$, ziehe bo senkrecht auf den Radius und go senkrecht auf bo, dann ist $go = du_s$, $bo = ud\varphi_s$, $fh = dx_s$, etc. etc., während Δu, $u\Delta\varphi$, Δx, Δy durch den Endpunkt der als unabhängig genommenen Zunahme des Bogens bestimmt werden. U. s. w.

8) Will man die zweiten, dritten und höhern Differenzialien von u und φ, so differenzire man du, $ud\varphi$ nach den bekannten Regeln.

So ist z. B., da $du = \sin\varphi dy - \cos\varphi dx$ ist:

$$d^2u = \sin\varphi d^2y + (\cos\varphi dy + \sin\varphi dx)\,d\varphi$$
$$= \sin\varphi d^2y + (ud\varphi)\,d\varphi.$$

Da nun d^2y schon bekannt ist, so kann auch d^2u ohne Schwierigkeit construirt werden. U. s. w.

Resultat. Um die Differenzialien der Polar-Coordinaten zu finden, braucht man wie bei geradlinigen Coordinaten die Tangente, die tangirenden Parabeln zweiter, dritter und höherer Ordnung, und es können umgekehrt diese Tangenten und tangirenden Parabeln durch die Differenzialien der Polar-Coordinaten bestimmt werden.

§. 152.

Unabhängige Bestimmung der Differenzialien der Polar-Coordinaten.

Es wäre wünschenswerth, dass man eine Reihe von Curven fände, welche die Differenzialien der Polar-Coordinaten unmittelbar bestimmten, die also für diese die nämliche Bedeutung hätten, welche die tangirenden Parabeln erster, zweiter, dritter und der folgenden Ordnungen für die Differenzialien der geradlinigen Coordinaten haben.

Diess kann ohne Schwierigkeit geleistet werden, und zwar durch die tangirenden *Spiralen* der ersten, zweiten, dritten und der höheren Ordnungen, die mit den tangirenden Parabeln der ersten, zweiten, dritten und der höheren Ordnungen in vollkommener Analogie stehen.

Die tangirenden Parabeln haben die Gleichung:

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \ldots + \mu x^m.$$

Die tangirenden Spiralen müssen die Gleichungen haben:

(I. Ordnung) $u = \alpha + \beta\varphi$,

(II. Ordnung) $u = \alpha + \beta\varphi + \gamma\varphi^2$,

(III. Ordnung) $u = \alpha + \beta\varphi + \gamma\varphi^2 + \delta\varphi^3$, u. s. w.

Ueberhaupt müssen die zur Bestimmung der Differenzialien dienenden Curven rationale Functionen von der vorstehenden Form sein, damit sich die ganze Zunahme Δu in einer endlichen Anzahl von Gliedern vollkommen schliesst. Diess ist der Grund, warum sie zur Bestimmung der aufeinanderfolgenden Differenzialien der Curven dienen.

Nun sind zwar schon in der Elementar-Geometrie die Tangenten und tangirenden Parabeln jeder Ordnung sehr bekannt, nicht aber auch die tangirenden Spiralen (mit alleiniger Ausnahme der Archimed'schen Spirale $u = \beta\varphi$, die nur ein besonderer Fall der tangirenden Spirale erster Ordnung ist). Einige Worte darüber zu sagen, dürfte also nicht überflüssig sein.

§. 153.

Ueber die tangirenden Spiralen.

Wenn sich in einer Ebene ein veränderlicher Radius um einen Punkt bewegt, so beschreibt der Endpunkt des Radius eine Curve. Der feste unbewegliche Punkt liegt in einer Linie, und es ist gleichgültig, in welcher; wenn aber einmal eine Linie gewählt ist, so bestimmt diese die Winkel φ, welche der veränderliche Radius u mit ihr macht. Es ist gleichgültig, nach welcher Richtung hin, ob nach rechts oder nach links vom unbeweglichen Punkte aus, die Linien positiv oder negativ genommen werden; aber wenn einmal diese Richtung gewählt ist, dann sind die Linien nach einer Richtung positiv, und die rückwärts verlängerten negativ. Es ist gleichgültig, ob die Bewegung des Radius, die mit dem Winkel $\varphi = 0$ beginnt, nach Oben oder nach Unten geführt wird; wenn aber einmal die Winkel nach einer Richtung als $(+\varphi)$ gewählt werden, so sind die Winkel, die durch eine nach entgegengesetzter Richtung führende Bewegung des Radius erzeugt werden, gleich $(-\varphi)$. Es giebt daher positive und negative Winkel, wie auch positive und negative Radien, d. h. solche, die nach rückwärts verlängert werden, bis sie die Curve schneiden. Eine Gleichung zwischen u und φ, $f(u, \varphi) = 0$ wird die Polar-Gleichung der Curve genannt.

Polar-Gleichungen von der Form:

$$u = \alpha + \beta\varphi + \gamma\varphi^2 + \delta\varphi^3 + \ldots + \mu\varphi^m,$$

in welchen der Radius nur in der ersten Potenz, die Winkel nur in ganzen Potenzen vorkommen, geben Spiralen, die Coefficienten α, β, γ ... mögen positiv oder negativ, oder theilweise gleich Null sein.

Die Polar-Gleichungen sind Functionen zwischen Radien und Winkeln. Es kommt nun darauf an, welche Winkel-Einheit gewählt wird. Am einfachsten ist es, wenn man den Winkel von $57^\circ 17' 44'' 8$ als Einheit nimmt, weil der ihm entsprechende Bogen im Kreise gleich dem Radius ist. Sind die Winkel nach Graden gegeben, so reducirt man sie nach der Proportion:

$$57^\circ 17' 44'' 8 : n^\circ = 1 : x,$$

und umgekehrt.

Zusatz. Ein Beispiel zur Erläuterung. Statt vieler Erörterungen, die in die Curven-Lehre gehören, und welche hier die Continuität des Ganzen unterbrechen würden, gebe ich ein bestimmtes und ausführlich behandeltes Beispiel.

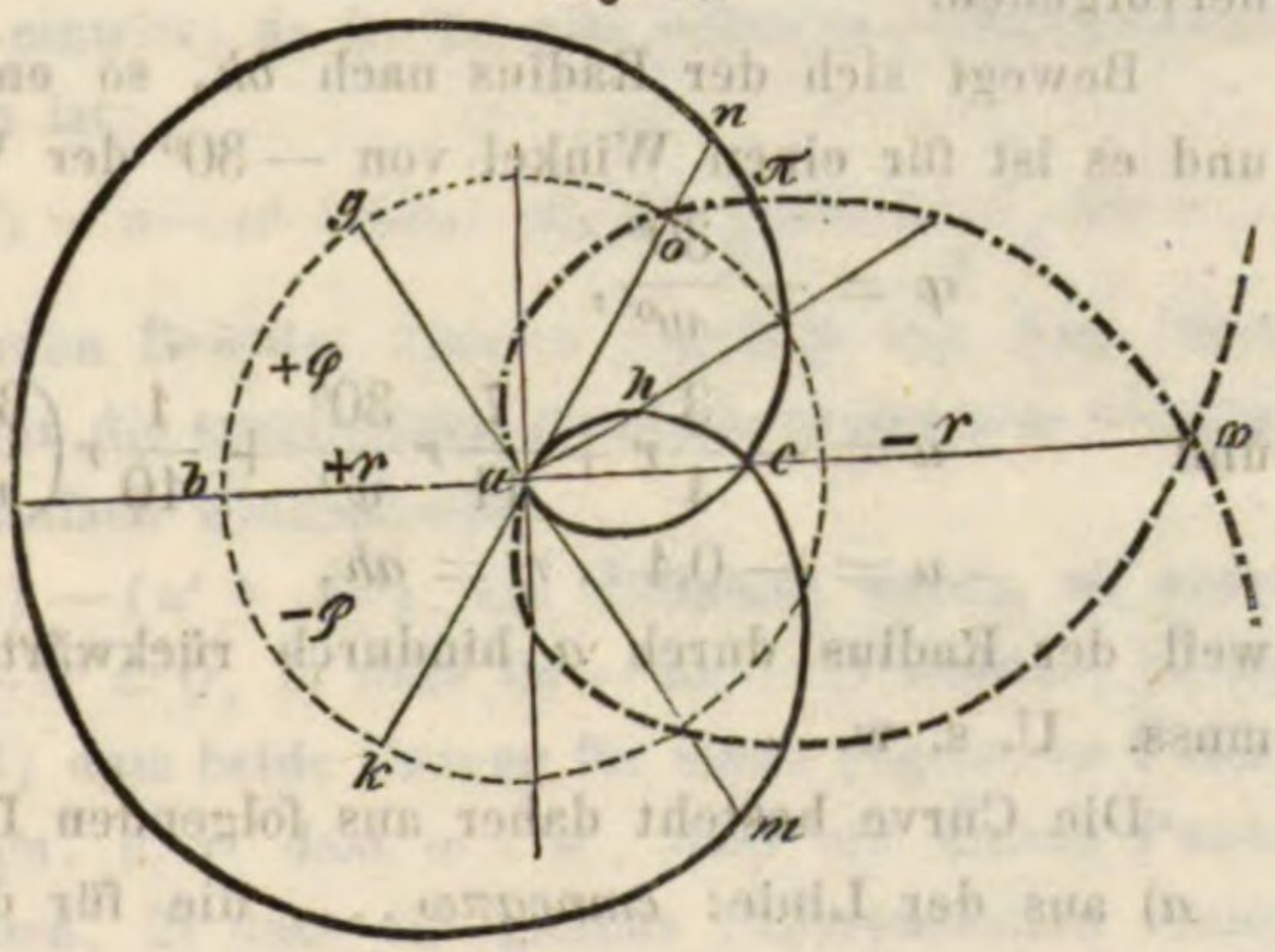
Es sei die Curve gegeben:

$$u = -\frac{3}{4}r - \frac{7}{11}r\varphi + \frac{1}{10}r\varphi^2.$$

Der Winkel gleich 1 entspreche einem Winkel von $57^\circ 17' 44'' 8$.

In nebenstehender Figur sei ab die lineare Einheit r. Bewegt sich die Linie ab von b nach bg, so sind die Winkel bag, bao etc. positiv, hingegen die Winkel bak, bam etc. negativ. Jeder Radius ist positiv, ausser wenn er rückwärts durch a verlängert werden muss, um die Curve zu treffen.

Fig. 16.



Der Radius, welchem der Winkel $\varphi = 0$ entspricht, ist nach der Gleichung:

$$u = -\frac{3}{4}r - \frac{7}{11}r\varphi + \frac{1}{10}r\varphi^2, \text{ da } \varphi = 0 \text{ ist;}$$

$$u = -\frac{3}{4}r = ac.$$

Die Curve beginnt daher im Punkte c.

Der Radius, welcher dem Winkel $bag = 60^\circ$ entspricht, wird, da $\varphi = \frac{60^\circ}{57^\circ 17' 44'' 8} = \frac{60^\circ}{\psi^\circ}$ ist: $r = -1{,}31\ldots r$, da der Radius ga rückwärts verlängert werden muss; um den Punkt m der Curve zu bestimmen.

Der Radius der Spirale wird $= 0$, d. h. die Spirale geht durch den Punkt a für die Werthe von φ, welche die Gleichung

$$-\frac{3}{4}r - \frac{7}{11}r\varphi + \frac{1}{10}r\varphi^2$$

zu Null machen.

Der Radius der Spirale wird $+r$, d. h. die Spirale durchschneidet den erzeugenden Kreis in den Punkten, die aus der Gleichung

$$+r = -\frac{3}{4}r - \frac{7}{11}r\varphi + \frac{1}{10}r\varphi^2$$

hervorgehen.

Der Radius wird $-r$, d. h. die Spirale durchschneidet wieder den erzeugenden Kreis für die zwei Werthe, die aus der Gleichung

$$-r = -\frac{3}{4}r - \frac{7}{11}r\varphi + \frac{1}{10}r\varphi^2$$

hervorgehen.

Bewegt sich der Radius nach bk, so entstehen negative φ, und es ist für einen Winkel von -30^0 der Werth:

$$\varphi = -\frac{30^0}{\psi^0},$$

und
$$u = -\frac{3}{4}r + \frac{7}{11}r\frac{30^0}{\psi^0} + \frac{1}{10}r\left(\frac{30^0}{\psi^0}\right)^2,$$

$$u = -0{,}4\,..\,r = ah,$$

weil der Radius durch a hindurch rückwärts verlängert werden muss. U. s. w.

Die Curve besteht daher aus folgenden Linien:

a) aus der Linie: $cmnca\pi\omega\ldots$, die für die positiven Werthe von φ gilt, mit negativen Radien bis zum Punkt a, von wo aus nun ununterbrochen positive Werthe von u auftreten;

b) aus der Linie $cha\omega\ldots$ für negative Werthe von φ, mit negativen Radien bis zum Punkt a, von wo aus ununterbrochen positive Werthe von u auftreten.

Die beiden Arme der Spirale müssen bis in's Unendliche wachsen, was aus der allgemeinen Gleichung der Spirale

$$u = \alpha + \beta\varphi + \gamma\varphi^2 + \ldots$$

mit Nothwendigkeit hervorgeht.

Nach diesen Erörterungen gehen wir zu den Differenzialien der Coordinaten über.

§. 154.

Differenzialien der Polar-Coordinaten.

Es sei $u = f(\varphi)$ die Polar-Gleichung einer Curve, so ist:

$$\Delta u = du + \frac{1}{2}d^2u + \frac{1}{2.3}d^3u + \ldots$$

I. Es sei $u' = \alpha + \beta\varphi$ die Gleichung einer Spirale erster Ordnung (die auch ohne Zeichnung deutlich ist); diese Spirale habe gleiche φ mit der gegebenen Curve, d. h. ihre Radien sollen in derselben Lage mit den Radien der gegebenen Curve liegen, denselben Ausgangspunkt haben und sich mit ihnen in gleicher Richtung fortbewegen.

Damit diese Spirale eine tangirende sei, muss die Differenz $(u + \Delta u) - (u' + \Delta u')$, so klein als möglich werden.

Da $\Delta u' = du = \beta d\varphi$ ist (was bei jeder rationalen Gleichung des ersten Grades eintritt, da in ihr alle höheren Differenzialien gleich Null sind), so ist:

$$(u + \Delta u) - (u' + \Delta u') = u - u' + (du - du') + \frac{1}{2}d^2u + \frac{1}{2.3}d^3u + \ldots$$

Die nun folgenden Beweise können wörtlich aus dem Oben gegebenen Beweise für die tangirenden Parabeln genommen werden, daher wir sie nur einfach wiederholen.

Damit $(u + \Delta u) - (u' + \Delta u')$, ein Kleinstes werde, ist nothwendig, 1) dass $u - u' = 0$, 2) dass $du - du' = 0$ werde. Es ist daher nothwendig: 1) dass beide Curven für einen gegebenen Punkt gleiche Radien haben, d. h. dass $u = u'$, dass sie diesen Punkt gemeinschaftlich haben, 2) dass sie gleiche Differenzialien erster Ordnung haben, dass $du = du'$ sei.

Nun ist aber für die Spirale erster Ordnung $du' = \Delta u'$, das erste Differenzial gleich der *ganzen Zunahme* des Radius, welche dem Winkel $(\varphi + d\varphi)$ entspricht. Das Differenzial des Radius der gegebenen Curve ist daher gleich der Verlängerung bis zur tangirenden Spirale erster Ordnung, so gross oder so klein auch $d\varphi$ genommen werden möge.

Zusatz 1. Diese Spirale hat demnach bei den Polar-Coordinaten ganz dieselbe Stelle, welche die tangirende Parabel erster Ordnung (die Tangente) bei den geradlinigen Coordinaten hat. — Kennt man daher die Tangente einer Curve und die tangirende Spirale erster Ordnung, so hat man nach dem vorhergehenden Beweise auch $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, d. h. die Hypothenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Katheten $ud\varphi$ und du sind (§. 151. Fig. 15.). Nun ist aber auch $d\varphi$ als willkührliche Zunahme des Winkels und durch den Winkel auch der ihm entsprechende Kreisbogen gegeben und bekannt, und da du durch die Spirale erster Ord-

nung gegeben ist, so ist im rechtwinkeligen Dreiecke, dessen Hypothenuse $= \sqrt{dx^2 + dy^2}$ (gegeben durch die Tangente), dessen eine Kathete $= du$ (gegeben durch die Spirale), auch die andere Kathete $ud\varphi$ als gerade Linie gegeben. Es ist demnach ein beliebiger Kreisbogen $ud\varphi$ rectificirt, (vorausgesetzt, dass man eine Spirale erster Ordnung so rein geometrisch construiren kann, wie eine Tangente). Darum ist nicht zu verwundern, dass Archimed seine Spirale $u' = \beta\varphi$ zur Rectification des Kreisbogens anwenden konnte. Diese Rectification wäre vollständig, wenn eine Spirale vollkommen geometrisch construirt werden könnte. Da sie jedoch nach dem Ausdruck der alten Mathematiker nur als mechanische Curve construirt werden kann (indem nur gerade Linie und Kreis als geometrische Curven gelten), so darf die von Archimed gefundene Rectification nur eine mechanische genannt werden.

Es ist übrigens zu bemerken, dass man auf die Spirale erster Ordnung, als eine rectificirende Curve des Kreises, ganz unabhängig von allen Kunstgriffen kommt, indem die Methode der Differenzirung der Polar-Coordinaten unmittelbar auf sie hinweist. Darum ist auch die Archimed'sche Methode vor allen Methoden der alten Mathematiker ausgezeichnet, weil sie nicht eine zufällig ausgedachte Curve, sondern die durch die Natur der Sache selbst gegebene, also auch einfachste Curve anwendet.

Zusatz 2. Die tangirende Spirale erster Ordnung $u' = \alpha + \beta\varphi$ hat zwei Constanten α und β. Zu ihrer Bestimmung hat man die zwei Gleichungen $u' = u$; $du' = du$, so dass sie für jeden Punkt einer gegebenen Curve vollkommen bestimmt ist.

Zusatz 3. Wird α gleich Null, so wird die Spirale $u' = \beta\varphi$ die Archimed'sche Spirale. Wird $\beta = 0$, so wird $u' = \alpha$ der Kreis, der also bei den Polar-Coordinaten dieselbe Gleichung hat, wie die mit der Abscissenlinie parallele gerade Linie bei dem geradlinigen Coordinaten-Systeme.

II. Die Spirale zweiter Ordnung hat die Gleichung:

$$u' = \alpha + \beta\varphi + \gamma\varphi^2.$$

Da diess eine rationale Gleichung zweiten Grades ist, so bricht die Reihe $\Delta u'$ mit dem zweiten Differenziale ab, d. h. das dritte und alle höheren Differenzialien von u sind gleich Null, und es ist:

$$\Delta u' = du' + \frac{1}{2} d^2u'.$$

Damit diese Spirale eine tangirende Spirale der Curve werde, ist nothwendig, dass $(u+\Delta u)-(u'+\Delta u')$ so klein als möglich werde.

Nun ist:

$$(u+\Delta u)-(u'+\Delta u') =$$
$$(u-u')+(du-du')+\frac{1}{2}(d^2u-d^2u')+\frac{1}{2.3}d^3u+\frac{1}{2.3.4}d^4u+..$$

Es müssen daher folgende Gleichungen stattfinden:

1) $u-u'=0$; 2) $du-du'=0$; 3) $d^2u-d^2u'=0$.

Da nun $\frac{1}{2}d^2u'=\Delta u'-du'$ ist, und $\Delta u'$ durch die Spirale zweiter Ordnung und du' durch die Spirale erster Ordnung gegeben sind [indem $\Delta u'$ die Verlängerung des Radius u bis zur Spirale zweiter Ordnung und du' die Verlängerung des Radius bis zur Spirale erster Ordnung ist für den Winkel $(\varphi+d\varphi)$], so ist auch $\frac{1}{2}d^2u'$, also auch d^2u' unmittelbar geometrisch gegeben. Und da aus Gleichung (3) $\frac{1}{2}d^2u=\frac{1}{2}d^2u'$ ist, so ist auch $\frac{1}{2}d^2u$, d. h. das halbe zweite Differenzial des Radius jeder gegebenen Curve geometrisch gegeben, es ist gleich dem Theile des Radius $(u+\Delta u)$, der zwischen der tangirenden Spirale erster und zweiter Ordnung ist, so gross oder so klein auch $d\varphi$ genommen werden möge.

Zusatz. Zur Bestimmung der drei Constanten α, β, γ der Spirale $u=\alpha+\beta\varphi+\gamma\varphi^2$ hat man die drei Gleichungen $u=u'$, $du=du'$, $d^2u=d^2u'$, so dass für jeden Punkt einer Curve die Spirale zweiter Ordnung vollkommen bestimmt ist.

III. Die Spirale dritter Ordnung hat die Gleichung:

$$u'=\alpha+\beta\varphi+\gamma\varphi^2+\delta\varphi^3,$$

und die Reihe $\Delta u'$ bricht mit dem dritten Differenziale ab. Es entsteht die endliche Reihe:

$$u'+\Delta u'=u'+du'+\frac{1}{2}d^2u'+\frac{1}{2.3}d^3u'.$$

Damit diese Spirale eine tangirende werde, ist nothwendig, dass $(u+\Delta u)-(u'+\Delta u')$ so klein als möglich werde, und diess findet statt, wenn für

$$(u+\Delta u)-(u'+\Delta u') =$$
$$(u-u')+(du-du')+\frac{1}{2}(d^2u-d^2u')+\frac{1}{2.3}(d^3u-d^3u')+$$
$$+\frac{1}{2.3.4}d^4u+..$$

die ersten vier Glieder gleich Null sind, so dass

1) $u = u'$; 2) $du = du'$; 3) $d^2u = d^2u'$; 4) $d^3u = d^3u'$.

Da nun u durch den gegebenen Radius, du durch die tangirende Spirale erster Ordnung, $\frac{1}{2}d^2u$ durch die tangirende Spirale zweiter Ordnung, $\Delta u'$ durch die tangirende Spirale dritter Ordnung geometrisch bestimmt ist, so ist auch

$$\frac{1}{2.3}d^3u = \frac{1}{2.3}d^3u' = \Delta u' - du - \frac{1}{2}d^2u$$

vollkommen bestimmt. Für jeden Punkt einer Curve ist $\frac{1}{2.3}d^3u$ derjenige Theil des Radius $(u + \Delta u)$, der zwischen den tangirenden Spiralen zweiter und dritter Ordnung liegt, so gross oder so klein auch $d\varphi$ genommen werden möge.

Zusatz. Zur Bestimmung der vier Constanten α, β, γ, δ dienen die vier Gleichungen:

$$u = u', \quad du = du', \quad d^2u = d^2u', \quad d^3u = d^3u'.$$

Die ganze Zunahme des veränderlichen Radius zerlegt sich demnach in eine wohlgeordnete Reihe von geraden Linien, die sämmtlich durch die tangirenden Spiralen der aufeinander folgenden Ordnungen gegeben sind.

Zusatz 1. Auf gleiche Weise lassen sich auch die Differenzialien von φ ableiten, wenn in der Gleichung $u = f\varphi$ die Zunahme du als unabhängig veränderlich genommen und die Reihe der Differenzialien $d\varphi$, $d^2\varphi$, $d^3\varphi$ ... gesucht wird.

Die ganze Zunahme $\Delta\varphi$ zerlegt sich in eine Reihe aufeinanderfolgender Winkel (und durch die Multiplication mit r, also $r\Delta\varphi$ in eine Reihe wohlgeordnet aufeinanderfolgender Kreisbogen) die der Ordnung nach durch die tangirenden Spiralen bestimmt, d. h. analytisch gegeben und mechanisch (geometrisch) rectificirt sind. (In Figur 16. ist dieser gegebene constante Radius r gleich der Linie ab.)

Zusatz 2. Der Parallelismus der Resultate der Polar-Coordinaten mit den Resultaten der geradlinigen Coordinaten ist ein vollkommener. Die weitere Durchführung dieser Theoreme ist Sache der analytischen Geometrie.

Um möglichen Missverständnissen vorzubeugen, bemerke ich, dass die tangirende Spirale erster Ordnung nicht die tangirende

gerade ist, dass daher du, welches die Verlängerung des Radius zur tangirenden Spirale erster Ordnung ist, keineswegs mit der Tangente zusammenfällt.

Wie die Formeln zeigen, sind:

$$dx = u \sin\varphi d\varphi - \cos\varphi du,$$
$$dy = u \cos\varphi d\varphi + \sin\varphi du.$$

Die Grössen $d\varphi$ und du sind eigene Functionen für sich, und es kommt darauf an, zu wissen, was sie für sich sind. Diess findet man analytisch, indem man $d\varphi$ und du aus obigen Gleichungen sucht, und geometrisch, indem man die Spirale construirt. Wie nun aber mittelbar die Tangenten durch die Spiralen und diese durch jene bestimmt werden, ist in den vorhergehenden Formeln enthalten.

§. 155.

Rectification.

Es bleibt noch übrig, die Formeln der Rectification, Quadratur und Cubatur für Polar-Coordinaten zu finden. Da die entsprechenden Formeln bereits für geradlinige Coordinaten entwickelt sind, so werden wir sie für Polar-Coordinaten einfach durch Substitution herstellen, da es überflüssig ist, alle früheren Erörterungen und Constructionen zu wiederholen.

Bezeichnet B den Bogen einer Curve, so ist $dB = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, d. h. der Theil der Tangente, welcher die Hypothenuse zu den Katheten dx und dy ist, so gross oder so klein dx und dy sein mögen.

Substituirt man die Oben gefundenen Werthe für dx und dy, so folgt für Polar-Coordinaten: $dB = \sqrt{du^2 + u^2 d\varphi^2}$, so gross oder so klein $d\varphi$ oder du sein mögen. Ist in Figur 15. $d\varphi = \angle bcr$, so ist die Linie $bg = \sqrt{du^2 + u^2 d\varphi^2}$.

Durch Integration folgt:

$$B = \int \sqrt{du^2 + u^2 d\varphi^2} + C.$$

Will man das zweite Differenzial des Bogens, so wird, wenn φ als unabhängig Variable genommen wird: $(dB)^2 = du^2 + u^2 d\varphi^2$, $dB\, d^2B = du\, d^2u + u du\, d\varphi^2$, also:

$$d^2B = \frac{du}{udB} \cdot (ud^2u + u^2 d\varphi^2).$$

Da man u, du, dB und $(ud^2u + u^2d\varphi^2)$ construiren kann, so ist man auch im Stande, d^2B geometrisch zu construiren.

Durch wiederholtes Differenziren findet man der Reihe nach die höheren Differenzialien des Bogens. Die ganze Zunahme des Bogens ΔB ist dann:

$$\Delta B = dB + \frac{1}{2}d^2B + \frac{1}{2.3}d^3B + \ldots$$

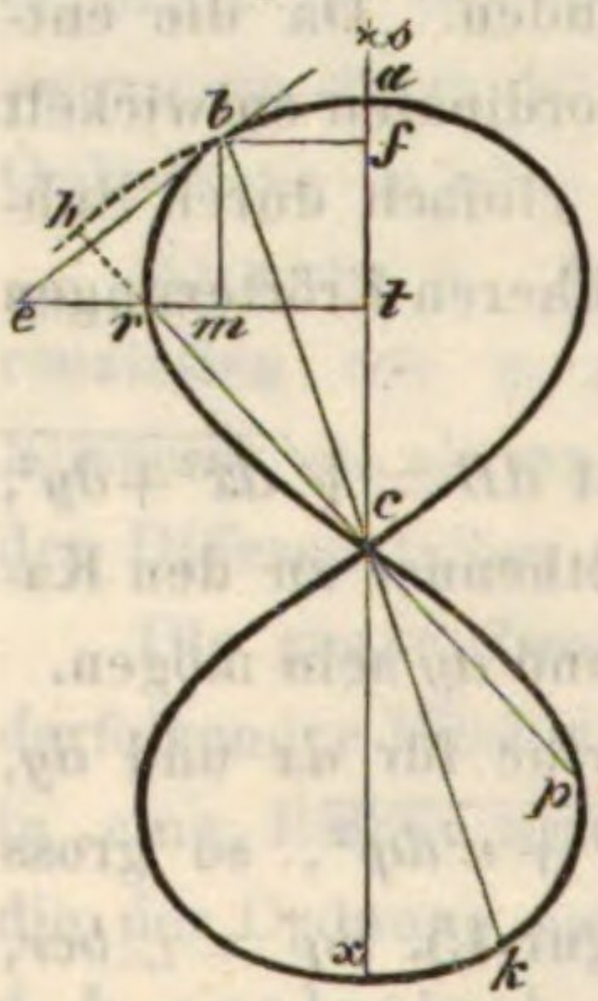
Man kann den Bogen ΔB durch diese Reihe gerader Linien berechnen; viel kürzer und allgemeiner findet man jedoch den Bogen B durch Integration.

§. 156.

Quadratur.

Wird der Winkel $acb = \varphi$ um $bcr = d\varphi$ vermehrt, so geht die Fläche F, $(abca)$ in $F + \Delta F = abrca$ über, und ΔF ist ein Sector, der von den Radien cb, cr, und dem Bogen br begrenzt wird. Welche Grösse ist das erste Glied von ΔF?

Fig. 17.



Der Sector $abca$ ist die Summe der Fläche $abf = \psi$ und des Dreiecks bfc.

Ist $af = x$ und $bf = y$, so ist, wie bekannt: $d\psi = ydx$, und das Differenzial des Dreiecks bcf ist gleich $d\left(\frac{1}{2}bf \times fc\right)$, gleich $d\left(\frac{1}{2}y(\alpha - x)\right)$, wenn die constante Linie ac mit α bezeichnet wird.

Substituirt man die Werthe für y, x, dx, dy, so geht hervor:

$$dF = \frac{1}{2}u^2d\varphi.$$

Denn setzt man die Werthe: $\alpha - x = u\cos\varphi$, $y = u\sin\varphi$, $dy = \sin\varphi du + u\cos\varphi d\varphi$, so wird:

$$dF = ydx + \frac{1}{2}d(yu\cos\varphi) = ydx + \frac{1}{2}d(u^2\sin\varphi\cos\varphi) =$$
$$= (-u\sin\varphi\cos\varphi du + u^2\sin^2\varphi d\varphi) +$$
$$+ \frac{1}{2}(2u\sin\varphi\cos\varphi du + u^2\cos^2\varphi d\varphi - u^2\sin^2\varphi d\varphi) = \frac{1}{2}u^2d\varphi,$$

d. h. das erste Glied der Zunahme dF ist der Kreis-Sector cbh, so gross oder so klein auch $d\varphi = \angle bch$ genommen werden möge.

Zusatz. Bei geradlinigen Coordinaten zerlegt sich die Zunahme der Fläche in Figuren, die von geraden Linien begrenzt werden, bei Polar-Coordinaten zerlegt sich die ganze Zunahme ΔF in eine Summe von lauter Kreis-Sectoren, die man bekanntlich berechnen kann, was die Integration möglich macht.

Das zweite Differenzial ist:

$$d^2F = d\left(\frac{1}{2}u^2 d\varphi\right) = u d\varphi du,$$

d. h. der doppelte Kreis-Sector, dessen Radius $= du$, und dessen Bogen $= u d\varphi$. Denkt man sich $u d\varphi$ rectificirt, so ist $u d\varphi du$ ein Rechteck, dessen eine Seite $u d\varphi$, und dessen andere du ist. — Dasselbe gilt von den höheren Differenzialien.

Das Wichtigste ist wieder die Integral-Formel:

$$F = \int \frac{1}{2}u^2 d\varphi + C.$$

Zusatz. Die Formel für die Zunahme des Sectors:

$$dF = \frac{1}{2}u^2 d\varphi$$

zeigt an, dass alle Spiralen, so wie auch die Curven des zweiten Grades (im Systeme der Polar-Coordinaten) algebraisch integrirbar sind. So hat die Curve (Fig. 17.) die Gleichung:

$$u^2 + (r\varphi)^2 = r^2 = (ac)^2,$$

eine Gleichung, die ganz der Mittelpunkts-Gleichung des Kreises für rechtwinkelige Coordinaten, $y^2 + x^2 = r^2$, analog ist. Die Integration ist algebraisch, weil u^2 immer eine rationale Function ist. In obiger Curve ist:

$$dF = \frac{1}{2}u^2 d\varphi = \frac{1}{2}r^2(1 - \varphi^2)\, d\varphi,$$

und $$F = \frac{1}{2}r^2 \int (d\varphi - \varphi^2 d\varphi) = \frac{1}{2}r^2\varphi - \frac{1}{6}r^2\varphi^3.$$

Für $\varphi = 0$, d. h. für den Punkt a ist die Fläche ebenfalls gleich Null, es wird daher die Constante gleich Null. Für $\varphi = 1$, d. h. für den Winkel $\frac{180^0}{\pi} = 57^0 17' 44'' 8$, für welchen Winkel der Radius u gleich Null wird, also für die Figur *cabrc*, wird $F = \frac{1}{3}r^2$. Da die ganze Figur vier congruente Sectoren einschliesst (gerade wie der Kreis vier congruente Quadranten), so ist der Flächen-

Inhalt der von der in sich zurückkehrenden Curve eingeschlossenen Figur gleich $\frac{4}{3}r^2$, d. h. $\frac{4}{3}$ des Quadrats auf der Linie ac.

§. 157.

Complanation der Rotations-Oberflächen.

Die Formel dieser Oberflächen (S) ist für rechtwinkelige Coordinaten:

$$dS = 2\pi y\sqrt{dx^2 + dy^2},$$

also für Polar-Coordinaten, wenn die entsprechenden Werthe substituirt werden:

$$dS = 2\pi u \sin\varphi\sqrt{du^2 + u^2 d\varphi^2},$$

d. h. das erste Glied der Zunahme der Rotations-Oberflächen ist der Mantel eines senkrechten Cylinders, dessen Radius gleich $u \sin\varphi$, und dessen Höhe gleich $\sqrt{du^2 + u^2 d\varphi^2} = dB$ ist.

Das zweite Glied in der Reihe ΔS, d. h. $\frac{1}{2}d^2S$ ist gleich:

$$\pi(du\sin\varphi + u\cos\varphi d\varphi)\,dB + \pi u\sin\varphi d^2B.$$

Es ist daher d^2S gleich der Summe der Mantel zweier Cylinder, deren einer $(du\sin\varphi + u\cos\varphi d\varphi) = dy$ zum Radius der Basis und dB zur Höhe, und deren anderer $u\sin\varphi = y$ zum Radius der Basis und d^2B zur Höhe hat. U. s. w.

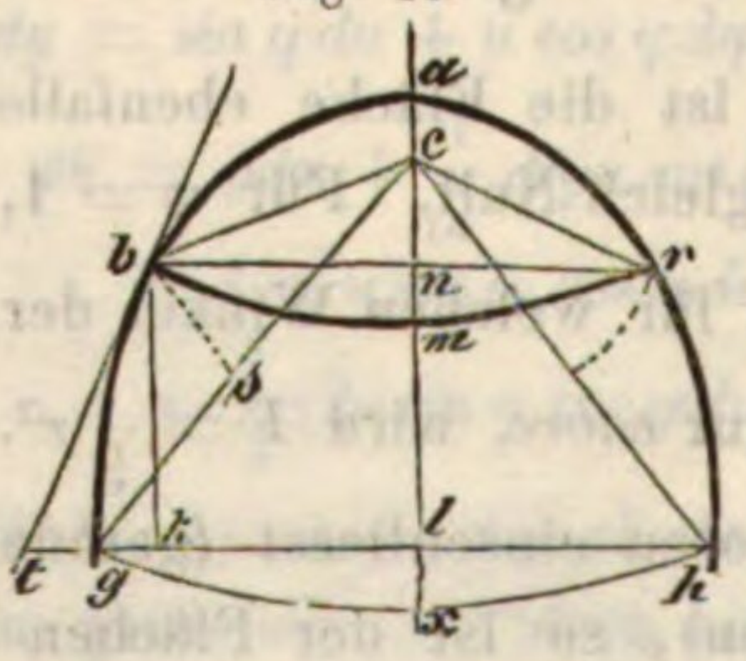
Das Wichtigste ist auch hier wieder die Integral-Formel:

$$S = \int 2\pi u\sin\varphi\sqrt{du^2 + u^2 d\varphi^2} + C.$$

§. 158.

Cubatur der Rotations-Körper.

Fig. 18.



Der Körper, der entsteht, wenn sich der Sector acb um die Rotations-Axe acx bewegt, ist gleich dem Rotations-Körper, der entsteht, wenn sich die Fläche abn um acx bewegt, weniger dem Kegel $cbmrc$.

Das Differenzial des Rotations-Körpers für rechtwinkelige Coordinaten ist

gleich $y^2\pi\,dx$, das Differenzial des Kegels aber ist gleich $d\left(\frac{1}{3}y^2\pi x\right)$.

Das Differenzial des Rotations-Sectors wird demnach:

$$dk = y^2\pi dx - d\left(\frac{1}{3}y^2\pi x\right)$$
$$= \frac{2}{3}\pi y\,(y dx - x dy).$$

Da $y dx - x dy = 2dF$, und $y = u \sin\varphi$ ist, so wird:

$$dk = \frac{4}{3}\pi y\,dF = \frac{2}{3}\pi y u^2 d\varphi = \frac{2}{3}\pi u^3 \sin\varphi d\varphi.$$

Da dF gleich dem Kreis-Sector cbs ist, so ist es nicht schwer, dk geometrisch zu construiren.

In den höheren Differenzialien von k wiederholen sich nur die höheren Differenzialien des Radius u, die wir sämmtlich entweder aus den tangirenden Parabeln oder aus den tangirenden Spiralen kennen, so dass alle höheren Differenzialien ohne Schwierigkeit geometrisch interpretirt werden können.

Das Wichtigste ist auch hier wieder die Integral-Formel:

$$k = \int\frac{2}{3}\pi u^3 \sin\varphi d\varphi + C.$$

Zusatz. Ganz analoge Formeln gehen hervor, wenn statt φ der Radius u als unabhängig Veränderliche genommen wird. Die weitere Ausführung hat keine Schwierigkeit.

§. 159.

Die verschiedenen Coordinaten-Systeme.

1) Aus der Vergleichung der Systeme der geradlinigen und der polaren Coordinaten geht hervor, dass Gleichungen von einerlei Form ganz verschiedenen Curven entsprechen, je nachdem die Coordinaten interpretirt werden.

So sind z. B. die Gleichungen:

$y = \alpha + \beta x$; $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2$; $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$ etc.

die Gleichungen der tangirenden Parabeln, wenn x und y geradlinige Coordinaten sind. Diese nämlichen Gleichungen: $y = \alpha + \beta x$; $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ etc. sind aber Gleichungen der tangirenden Spiralen, wenn y und x als Radius und Winkel

der Polar-Coordinaten interpretirt werden. Die Gleichung der Parallellinie ist im geradlinigen Coordinaten-System: $y = \alpha$, und diese nämliche Gleichung: $y = \alpha$ ist im Polar-Coordinaten-System die Gleichung des Kreises. Die Mittelpunkts-Gleichung des Kreises für geradlinige Coordinaten: $y^2 = r^2 - x^2$ ist die Gleichung einer ganz andern Curve im Systeme der Polar-Coordinaten.

2) Nichts hindert, dass nicht noch beliebig andere Linien als Coordinaten genommen werden können, z. B. die Abscisse x und die Subtangente s. In diesem Falle werden die Gleichungen: $s = \alpha + \beta x$; $s = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ etc. ganz anderen Curven entsprechen, obgleich sie mit den Parabeln und Spiralen eine und dieselbe Form haben.

So giebt z. B. die Curve $s = \alpha + \beta x$ (die im geradlinigen Coordinaten-System die gerade Linie, im Polar-Coordinaten-System die verallgemeinerte Archimed'sche Spirale giebt) im Subtangenten-System eine Curve, die, nach den geradlinigen Coordinaten betrachtet, eine parabolische Curve ist. Denn da $subtg = \frac{ydx}{dy} = s$ ist, so wird $\frac{ydx}{dy} = \alpha + \beta x$, und durch Integration findet man:

$$(\alpha + \beta x)^{\beta} = cy.$$

Hingegen alle Curven, in denen höhere Potenzen von x vorkommen, z. B. $s = \alpha + \beta x + \gamma x^2$, also Curven des zweiten Grades in ihrem System, geben, wenn man sie nach dem geradlinigen Coordinaten-System classificirt, logarithmische Linien. Denn ist z. B. die Gleichung $s = \gamma x^n$ gegeben, so wird $\frac{ydx}{dy} = \gamma x^n$ durch Integrirung:

$$\frac{1}{\gamma(1-n)} x^{1-n} = log\, cy.$$

3) Ausserdem kann man noch beliebig andere Functionen als Coordinaten nehmen, z. B. die Abscisse und Tangente; die Abscisse und Normale; die Ordinate und Normale; die Tangenten, den Krümmungshalbmesser, das Differenzial des Bogens, der Fläche etc. etc., so dass die Summe der möglichen Coordinaten-Systeme in's Ungemessene geht.

4) Betrachtet man diese Frage aus dem allgemeinsten Gesichtspunkte, so sind folgende Gruppen unzählig vieler Coordinaten-Systeme möglich:

I. Gruppe. *a*) Das Coordinaten-Feld ist eine Ebene, die Axen sind gerade Linien und die Curven werden durch die Endpunkte gerader Linien bestimmt. Diese Abtheilung umfasst die geradlinigen Coordinaten, die Polar-Coordinaten, das Ordinaten-System von Plücker (bei welchem die Curve durch die Durchschnittspunkte zweier Geraden bestimmt werden, die ihrerseits auf den Axen senkrecht stehen), und unzählig viele andere Systeme.

b) Das Coordinaten-Feld ist eine Ebene, die Axen sind gerade Linien, aber die Curven werden nicht durch die Endpunkte gerader Linien, sondern durch Tangirung oder durch irgend eine andere Lage derselben bestimmt.

II. Gruppe. Es bleibt Alles dasselbe, wie in der ersten Gruppe, nur sind die Coordinaten in der Abtheilung *a* und *b* nicht gerade Linien, sondern beliebige Curven, was eine unendliche Zahl möglicher Coordinaten-Systeme giebt.

III. Gruppe. Es bleibt Alles wie in Gruppe I. und II., nur sind jetzt die Axen krumme Linien. Auch dafür treten die Abtheilungen I. und II. und die entsprechenden Unterabtheilungen *a* und *b* ein.

IV. Gruppe. Das Coordinaten-Feld ist nicht eine Ebene, sondern irgend eine beliebige krumme Fläche. Auch für dieses System treten nun die Gruppen I., II., III. als Abtheilungen mit ihren entsprechenden Unterabtheilungen *a* und *b* ein.

5) Man sieht, dass die Zahl möglicher Coordinaten-Systeme in jeder Hinsicht in's Unendliche geht. In jedem dieser Systeme sind es andere Curven, die einfache Gleichungen haben, und umgekehrt können Curven, die in dem einen Systeme einfache Gleichungen haben, wie z. B. die geraden Linien, in andern Systemen höchst verwickelte Formen und imaginäre Ausdrücke annehmen. Dass der Wissenschaft mit einer solchen Ausdehnung in's Unendliche nicht gedient sein könne, ist aber ebenfalls einleuchtend. Wie kann hier eine Grenze gezogen werden? Welches Coordinaten-System umfasst alle andern? Antwort: Vermöge der Transformationsformeln umfasst jedes Coordinaten-System jedes andere, d. h. die Resultate des einen können in die Resultate aller andern transformirt werden. Es ist daher Sache der Wahl, das einfachste festzustellen. Dieses ist aber das geradlinige Coordinaten-System von Descartes. Alle Ausdrücke der Tangenten, der Normalen,

der Krümmungshalbmesser, der Differenzialien der Bogen, der Flächen, der Körper, werden in diesem Systeme höchst einfach und übersichtlich. Diess System ist das elementare, gerade so, wie die gerade Linie die elementare Linie ist. Neben diesem ist noch das Polar-Coordinaten-System elementar, weil neben der geraden Linie noch der Winkel elementar ist. — Die übrigen Coordinaten-Systeme gewinnen für die Grössen, für welche gerade ihre Gesichtspunkte gewählt sind, sehr einfache Gleichungen, alle andern Ausdrücke werden aber complicirter, als in den elementaren Systemen, und es ist die Frage, ob man z. B. die Formeln der Rectification, der Quadratur und der Cubatur, wenn sie nicht schon aus dem gewöhnlichen Coordinaten-System bekannt gewesen wären, so leicht und sicher hätte herstellen können.

6) Alle Coordinaten-Systeme, mit Ausnahme der zwei elementaren, müssen daher als singulär bezeichnet werden. Dort haben sie ihr Gutes. Ich kann mir denken, dass ein singuläres Coordinaten-System, dessen Coordinaten-Feld z. B. die Oberfläche eines Ellipsoids ist, mit dem Abplattungs-Coefficienten der Erde, alle geodätischen Untersuchungen ausserordentlich erleichtern könne. Man verlegt nämlich alle Schwierigkeiten zum Voraus in das Coordinaten-Feld, löst sie ein für allemal und bewahrt die gefundenen Resultate in elliptischen Tafeln. Ist diess einmal geleistet, dann erhalten alle Linien höchst einfache Gleichungen, und werden auf's Leichteste behandelt.

Diess ist der grosse Vorzug der singulären Untersuchungen. Aber in die allgemeine Theorie gehören sie nicht. Denn was hat z. B. die Oberfläche eines Ellipsoids, analytisch genommen, vor den übrigen unzählig vielen Flächen voraus? Wohl aber hat die Ebene den Vorzug vor allen andern Flächen, dass sie elementar bestimmt werden kann. — Also nicht die allgemeine Wissenschaft, sondern die singulären Untersuchungen haben die Aufgabe, die dem jedesmaligen singulären Coordinaten-Systeme entsprechenden Differenzial-Ausdrücke aufzustellen und zu interpretiren, was niemals schwer ist, da man alle nothwendigen Transformations-Formeln kennt.

Cap. XX.

Einige Anwendungen auf die analytische Geometrie.

§. 160.

Gleichungen der Tangenten und Normalen.

Von den vielen möglichen Anwendungen auf analytische Geometrie werden wir im Nachfolgenden einige behandeln.

Zuerst suchen wir die Gleichungen der Tangenten und Normalen im Systeme der geradlinigen Coordinaten.

1) Ist die Gleichung einer Curve, $y = fx$ gegeben, so ist die Gleichung einer geraden Linie, wenn für sie derselbe Anfangspunkt der Abscissen genommen wird: $\eta' = \alpha + \beta x$. Damit diese gerade Linie die Tangente sei, ist nothwendig, dass für $x = x$ sowohl $\eta' = y$ als auch $d\eta' = dy$ werde.

Nun ist $\eta' + \Delta\eta' = \eta' + d\eta'$ (weil die Gleichung der Tangente eine Gleichung des ersten Grades ist). Werden $\eta' = y$, $d\eta' = dy$ substituirt, so wird:

$$\eta' + \Delta\eta' = y + dy = y + \frac{dy}{dx}dx.$$

Nimmt man in der Tangente einen allgemeinen Punkt (η, ξ), und setzt man $\xi = x + dx$ (was angeht, da dx jeden auch noch so grossen Werth haben kann), so wird $\eta' + \Delta\eta'$ zur Ordinate, die der Abscisse ξ entspricht. Wenn diese Ordinate mit η bezeichnet wird, so geht die obige Gleichung in folgende über:

$$\eta = y + \frac{dy}{dx}(\xi - x), \quad \text{oder:} \quad (\eta - y)\,dx = (\xi - x)\,dy,$$

welches die allgemeine Gleichung der Tangente einer Curve ist, deren Coordinaten x und y sind.

2) Es geht die nämliche Gleichung hervor, wenn man $(x - dx)$ statt $(x + dx)$ gleich ξ substituirt, und $\eta' - \Delta_1 \eta' = \eta$ setzt. Ohnehin muss dieselbe Gleichung erfolgen, ob man für die dem Punkte (x, y) vorausgehenden oder nachfolgenden Punkte der Tangente die Gleichung ableitet. — Daraus folgt auch, dass allgemein die Tangenten vor und *nach* dem Berührungspunkte auf einer und derselben Seite der Curven liegen müssen. Diess schliesst jedoch nicht die singulären Fälle aus, in welchen eine Tangente eine Curve im Berührungspunkte durchschneidet, worauf wir zurückkommen werden.

3) Ganz auf dieselbe Art entwickelt man die Gleichung für die auf der Tangente senkrecht stehenden Normale:

$$(\eta - y)\, dy = -(\xi - x)\, dx.$$

4) Nimmt man die Gleichung der Curven ganz allgemein, ob entwickelt oder verwickelt gegeben, $u = f(x, y) = 0$, so hat man ein leichtes Verfahren, um die Gleichungen der Tangenten und Normalen zu finden. Man hat nämlich durch partielle Differenzirung aus $u = 0$ auch:

$$du = \left|\frac{du}{dx}\right| dx + \left|\frac{du}{dy}\right| dy = 0$$

$$\left|\frac{du}{dx}\right| + \left|\frac{du}{dy}\right| \frac{dy}{dx} = 0.$$

Nun folgt aus der Gleichung der Tangente, dass $\frac{dy}{dx} = \frac{\eta - y}{\xi - x}$, und aus der Gleichung der Normale, dass $\frac{dy}{dx} = -\frac{\xi - x}{\eta - y}$ ist.

Substituirt man daher in die Differenzial-Gleichung:

$$\left|\frac{du}{dx}\right| dx + \left|\frac{du}{dy}\right| dy = 0$$

statt dx den Werth $(\xi - x)$, und statt dy den Werth $(\eta - y)$, so erhält man die Gleichung der Tangente. — Substituirt man statt dx den Werth $-(\eta - y)$ und statt dy den Werth $+(\xi - x)$, so erhält man die Gleichung der Normale.

Es sind daher:

$$\left|\frac{du}{dx}\right| (\xi - x) + \left|\frac{du}{dy}\right| (\eta - y) = 0$$

$$\left|\frac{du}{dx}\right| (\eta - y) - \left|\frac{du}{dy}\right| (\xi - x) = 0.$$

die Gleichungen der Tangente und der Normale.

5) Bei diesen Gleichungen sind zwei wesentlich verschiedene Gesichtspunkte zu betrachten:

a) Es ist ein Punkt der Curve (x, y) gegeben. In diesem Falle sind x und y gegebene Grössen und man findet eine Gleichung zwischen η, ξ, welches die Gleichung der Tangente (oder Normale) ist, die zum gegebenen Punkte der Curven gezogen werden kann.

b) Es ist ein Punkt (η, ξ) ausser der Curve gegeben. In diesem Falle sind η und ξ gegebene Grössen, und man findet eine neue Gleichung zwischen x und y, welches die Gleichung einer Curve ist, in welcher der Punkt (η, ξ) liegt, und die, wenn sie die gegebene Curve durchschneidet, d. h. wenn sie mit ihr Werthe von x und y gemeinschaftlich hat, eine oder mehrere Punkte in der gegebenen Curve bestimmt, zu denen die geraden Linien, welche vom gegebenen Punkte (η, ξ) aus gezogen werden, Tangenten (oder Normalen) der Curven sind. Durchschneiden sich aber die gegebenen und gefundenen Curven nicht, d. h. haben sie nicht reelle Werthe von x und y gemeinschaftlich, so ist es ein Zeichen, dass vom gegebenen Punkte (η, ξ) aus keine Tangente (oder Normale) zur Curve möglich ist, wie z. B. von einem Punkte innerhalb eines Kreises keine Tangente zu diesem Kreise gezogen werden kann.

§. 161.

Beispiele zur Verdeutlichung.

Beispiel I. Es sei die Gleichung des Kreises gegeben:

$$u = y^2 + x^2 - R^2 = 0.$$

Es wird: $du = 2y\,dy + 2x\,dx = 0.$

Substituirt man $\eta - y$ statt dy, und $\xi - x$ statt dx, so ist

$$y(\eta - y) + x(\xi - x) = 0$$

die Tangenten-Gleichung. Diese Gleichung vereinfacht sich, wenn man $y^2 + x^2 = R^2$ substituirt, wodurch sie in $y\eta + x\xi = R^2$ übergeht.

a) Wird der Punkt (y, x) als gegeben genommen, so hat man die Gleichung der geraden Linie, welche Tangente zu (y, x) ist, und deren Coordinaten η und ξ sind.

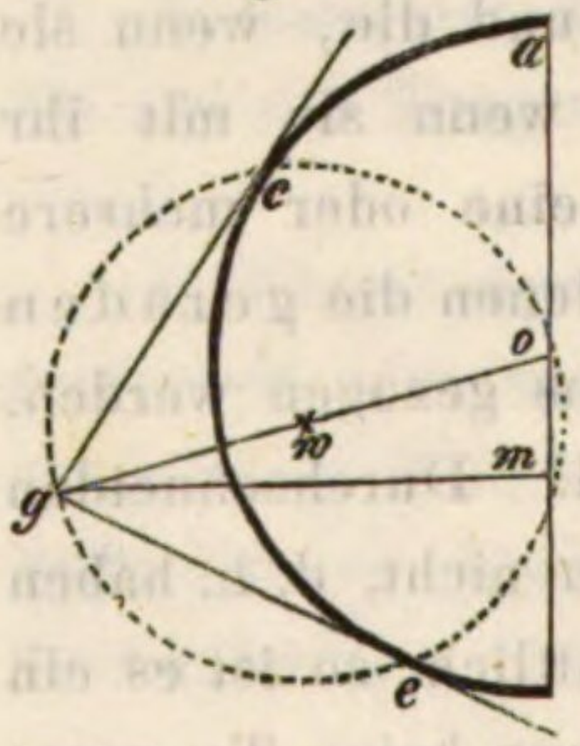
b) Wird (η, ξ) als gegeben genommen, so hat man aus $y\eta + x\xi = R^2$ in Verbindung mit $y^2 + x^2 = R^2$, also in der ursprünglichen Gleichung: $y(\eta - y) + x(\xi - x) = 0$ eine neue Curve, welche den Punkt (η, ξ) enthält, und die Punkte (x, y) des Kreises bestimmt, zu welchen, von (η, ξ) aus, Tangenten gezogen werden können.

Die Gleichung der neuen Curve:

$$y\eta - y^2 - x\xi - x^2 = 0.$$

ist, wie man leicht sieht, selbst wieder ein Kreis.

Fig. 19.



Wird der gleiche Anfangspunkt der Coordinaten, der Punkt o, beibehalten, so wird nur die Lage der Abscissen-Linie der neuen Curve verändert; und ist der gegebene Punkt (η, ξ) der Punkt g, so verwandelt sich durch die Substitution:

$$x' \cos\alpha - y' \sin\alpha = x$$
$$x' \sin\alpha + y' \cos\alpha = y,$$

worin $\alpha = \angle gom$ ist, die Gleichung des neuen Kreises in:

$$y'^2 = gox' - x'^2.$$

Der neue Kreis hat also die Linie go, welche den gegebenen Punkt g mit dem Mittelpunkte o des gegebenen Kreises verbindet, zum Durchmesser, und den Punkt o zum Anfangspunkt der Abscissen. Die Durchschnittspunkte c und e der beiden Kreise bestimmen die Tangenten gc und ge, die vom gegebenen Punkte an den gegebenen Kreis gezogen werden können.

c) Die Normalen-Gleichung wird:

$$(\eta - y)x - (\xi - x)y = 0, \quad \text{also:} \quad \eta x - \xi y = 0.$$

Diess ist die Gleichung einer geraden Linie, die durch den Mittelpunkt des gegebenen Kreises geht. In der That ist auch der Radius des Kreises stets eine Normale zu seinem Punkte in der Peripherie. Aber auch, wenn irgend ein Punkt in oder ausserhalb der Peripherie eines Kreises gegeben ist, erhält man als neue Curve nur die Gleichung der geraden Linie $\eta x - \xi y = 0$, so dass man von jedem gegebenen Punkte aus zu einem Kreis eine Normale ziehen kann, wenn man diesen Punkt (η, ξ) mit dem Mittelpunkte des gegebenen Kreises durch eine gerade Linie verbindet.

Beispiel II. Die gegebene Curve sei eine Apollonische Parabel, deren Gleichung: $u = y^2 - px = 0$ sei.

Es ist: $du = 2ydy - pdx = 0.$

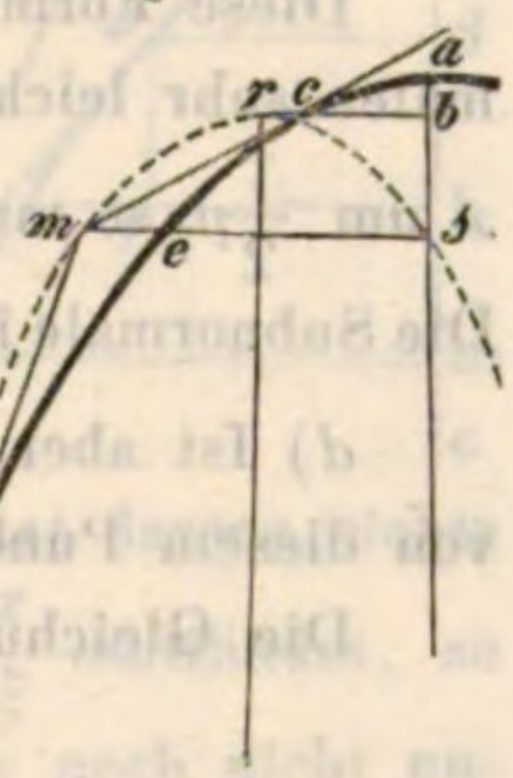
Wird die Tangenten-Gleichung gesucht, so ergiebt sich durch die Substitution für dy und dx:

$$2y(\eta - y) - p(\xi - x) = 0.$$

a) Ist ein Punkt (x, y) in der Apollonischen Parabel gegeben, so ist $2y(\eta - y) - p(\xi - x) = 0$ eine Gleichung des ersten Grades zwischen η und ξ, und bestimmt die Lage der Tangente. Diese Gleichung lässt sich leicht so umformen, dass eine Regel für die geometrische Construction daraus hervorgeht. Diess ist Sache der Geometrie.

b) Ist hingegen ein Punkt (η, ξ) gegeben; von welchem aus Tangenten zur gegebenen Apollonischen Parabel gezogen werden sollen, so giebt die Gleichung: $2y(\eta - y) - p(\xi - x) = 0$ eine neue Curve des zweiten Grades zwischen x und y, in welcher der gegebene Punkt (η, ξ) liegt, und deren Durchschnittspunkte mit der gegebenen Apollonischen Parabel die Tangenten bestimmen, die von (η, ξ) gezogen werden können.

Fig. 20.



Um diese Curve zu bestimmen, sei *acen* die gegebene Parabel und m, (ξ, η) der Punkt, von dem aus die Tangenten gezogen werden sollen.

Die Gleichung ist:

$$2y(\eta - y) = p(\xi - x).$$

Werden $y = y' + \beta$ und $x = x' + \alpha$ substituirt, so erhält man:

$$2\eta y' - 2y'^2 - 4\beta y' + px' = 2\beta^2 - 2\eta\beta + p\xi - p\alpha.$$

Werden α und β so bestimmt, dass $2\eta y' - 4\beta y' = 0$ und $2\beta^2 - 2\eta\beta + p\xi - p\alpha = 0$ sind, so wird:

$$\beta = \frac{1}{2}\eta \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{p\xi - \frac{1}{2}\eta^2}{p},$$

und die Gleichung geht in folgende über:

$$px' - 2y'^2 = 0, \quad y'^2 = \frac{1}{2}px'.$$

Diese neue Curve *scrmn* ist also wieder eine Apollonische Parabel, deren Parameter die Hälfte des Parameters der gegebenen Parabel ist, deren Abscissen-Axe in der Mitte von $ms = \eta$ liegt, und deren Anfangspunkt der Coordinaten in r liegt. Der Punkt r wird durch

$$as - ab = \xi - \alpha = \frac{\eta^2}{2p}$$

bestimmt. Diese neue Parabel durchschneidet die gegebenen in den beiden Punkten c und n, und die Linien mc und mn sind die Tangenten, die zur gegebenen Parabel vom Punkte m aus gezogen werden können.

c) Will man die Gleichung der Normale, so erhält man durch die angegebenen Substitutionen:

$$2y(\xi - x) + p(\eta - y) = 0 \quad \text{oder} \quad \xi - \left(x + \frac{1}{2}p\right) = -\frac{p}{2y}\eta.$$

Verlegt man den Anfangspunkt der Coordinaten in den Durchschnittspunkt der Normale mit der Abscissen-Linie, d. h. setzt man: $\xi - \left(x + \frac{1}{2}p\right) = -\xi'$, so ist die Gleichung der Normale:

$$\xi' = \frac{p}{2y}\eta.$$

Diese Formel macht die geometrische Construction der Normalen sehr leicht. Verlängert man nämlich die gegebene Abscisse x um $\frac{1}{2}p$, so muss die Normale durch den Punkt $\left(x + \frac{1}{2}p\right)$ gehen. Die Subnormale ist also eine constante Grösse, $\frac{1}{2}p$, wie bekannt ist.

d) Ist aber der Punkt (η, ξ) gegeben, so ist die Aufgabe, von diesem Punkte aus Normalen zur Parabel zu ziehen.

Die Gleichung ist:

$$2y(\xi - x) + p(\eta - y) = 0.$$

Diess ist, wie man leicht sieht, die Gleichung einer Hyperbel, die durch den Punkt (η, ξ) geht, und deren Durchschnittspunkte mit der gegebenen Parabel die Richtungen bestimmen, in denen die Normalen gezogen werden können.

Zusatz. Die Gleichungen für die Tangenten und Normalen:

$$\left|\frac{du}{dy}\right|(\eta - y) + \left|\frac{du}{dx}\right|(\xi - x) = 0$$

$$\left|\frac{du}{dy}\right|(\xi - x) - \left|\frac{du}{dx}\right|(\eta - y) = 0.$$

lassen sich vereinfachen, wenn die gegebene Curve $u = f(x, y) = 0$ homogen und eine ganze Function vom m^{ten} Grade ist. — Die weitere Ausführung ist Sache der Geometrie.

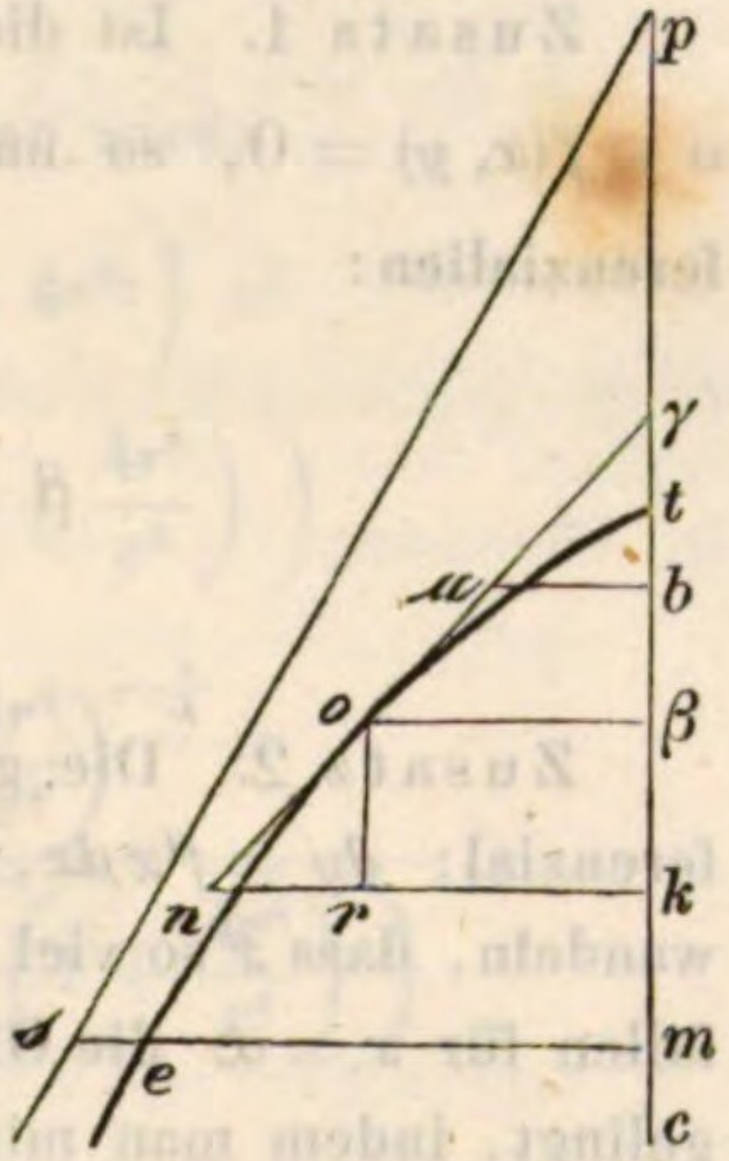
§. 162.

Asymptoten.

1) Unter der Asymptote einer Curve versteht man eine gerade Linie, welche die Curve für beliebig grosse Werthe der Coordinaten nicht durchschneidet, aber ihr immer näher und näher kommt, so dass zwischen ihr und der Curve keine andere gerade Linie liegen kann (ohne dass diese die Curve selbst durchschnitte).

Die Asymptoten sind also nichts anderes als Tangenten für unendlich weit vom Anfangspunkte entfernte Punkte der Curve.

Fig. 21.



(Die Linie *sp* ist die Asymptote der verzeichneten Curve. Im Punkte *o* aber ist eine Tangente gezogen.)

2) Die Tangenten-Gleichung:

$$\left|\frac{du}{dy}\right|(\eta - y) + \left|\frac{du}{dx}\right|(\xi - x) = 0$$

ist gleichwohl hier nicht anzuwenden, da man, wenn z. B. x als unabhängig Veränderliche genommen wird, für $x = \infty$, sowohl $(\xi - x)$ als $(\eta - y)$ gleich Null erhält. Man hat daraus nichts weiter, als dass für $x = \infty$ die Gleichung $\frac{y}{\eta} = \frac{x}{\xi}$ stattfindet, so wie auch $\frac{y}{x} = \frac{\eta}{\xi} = \frac{dy}{dx} = \frac{d\eta}{d\xi}$, Gleichungen, die noch nicht unmittelbar zum gewünschten Ziele führen.

3) Man hat bei den Asymptoten mancherlei Methoden versucht, allein der gerade Weg ist hier, wie überall, der einfachste und kürzeste.

4) Die Gleichung einer gegebenen Curve sei: $y = fx$, oder $u = f(x, y) = 0$. Die Gleichung einer geraden Linie, die den Anfangspunkt der Abscissen mit der Curve gemein hat, ist: $\eta = \alpha + \beta x$. Soll diese Linie eine Asymptote sein, so müssen für

$x = \infty$ die Gleichungen gelten: $\eta = y$; $d\eta = dy$. (Ebenso kann man y als unabhängige Veränderliche nehmen, und dann ist die Gleichung der geraden Linie, welche die Asymptote ist, folgende: $\xi = \alpha' + \beta' y$, und es finden für $y = \infty$ die Gleichungen statt: $\xi = x$, $d\xi = dx$.)

5) Aus den beiden Gleichungen: $\eta = y$, $d\eta = dy$ werden die beiden Constanten α und β bestimmt. Zuerst wird aus $d\eta = dy = \beta dx$ die Constante β für $x = \infty$ abgeleitet. Dieser Werth wird in die Gleichung der Curve substituirt, indem man $y = \alpha + \beta x$ setzt. Daraus wird für $x = \infty$ der Werth α gefunden.

In diesen Lehren sind die ganz natürlichen und einfachen Regeln für die Bestimmung der Asymptote enthalten.

Zusatz 1. Ist die Gleichung der Curve verwickelt gegeben: $u = f(x, y) = 0$, so findet man $\beta = \frac{dy}{dx}$ aus den partiellen Differenzialien:

$$\beta = \frac{dy}{dx} = -\frac{\left|\frac{du}{dx}\right|}{\left|\frac{du}{dy}\right|}.$$

Zusatz 2. Die gegebene Gleichung: $y = fx$, und ihr Differenzial: $dy = f'x\,dx$, muss man durch Division von x so umwandeln, dass x so viel als möglich als Divisor erscheint. Dadurch fallen für $x = \infty$ die Glieder weg, die x als Divisor haben. Diess gelingt, indem man mit der höchsten Potenz von x, die in diesen Gleichungen vorkommt, Zähler und Nenner zugleich dividirt.

Zusatz 3. Manchmal ist es nicht möglich, namentlich wenn die Gleichung der Curve unentwickelt gegeben ist, den Werth von y und dy für $x = \infty$ herzustellen. In diesem Falle sucht man den Werth $\frac{y}{x}$, und verfährt dann wie bei entwickelt gegebenen Gleichungen der Curve.

Zusatz 4. Ergeben sich keine endlichen und reellen Werthe von α und β, so hat die Curve überhaupt keine reelle Asymptote. — Die weitere Aufgabe, die mit der Tangenten-Gleichung in Analogie stünde, nämlich: von einem gegebenen Punkte aus Asymptoten zur Curve zu ziehen, kann nicht stattfinden, da die

Asymptoten eine durchaus bestimmte Lage haben, so dass man die Punkte nicht beliebig wählen kann, durch welche die Asymptote gehen soll. Versucht man dennoch diese Aufgabe, so findet man allgemein eine Gleichung mit imaginären Coefficienten, und nur singulär eine Gleichung mit reellen Coefficienten, wenn man nämlich zufällig einen Punkt gewählt hat, durch welchen die Asymptote geht.

§. 163.

Beispiele zur Verdeutlichung.

Beispiel 1. Es sei die Gleichung einer Curve gegeben:

$$y^4 + y^2x^2 = r^4.$$

Löst man die Gleichung nach y auf, so wird:

$$y = \pm\sqrt{\left(-\frac{1}{2}x^2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{(x^4 + 4r^4)}\right)} =$$

$$= \pm x\sqrt{\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(1 + \frac{4r^4}{x^4}\right)}\right)}$$

und

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{-1 \pm \left(1 + \frac{4r^4}{x^4}\right)^{-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(1 + \frac{4r^4}{x^4}\right)}\right)}}.$$

Für $x = \infty$ erhält $\frac{dy}{dx} = \beta$ die Werthe:

$$\beta = \frac{0}{0}, \quad \beta = 0, \quad \beta = \pm\infty, \quad \beta = \pm\frac{1}{\sqrt{-1}}.$$

Verfolgt man die Asymptote für den Werth $\beta = 0$, so ist ihre Gleichung: $\eta = \alpha + \beta x$; $\eta = \alpha$.

Dieser Werth $\eta = \alpha = y$ in die gegebene Gleichung substituirt, giebt für $x = \infty$ die Werthe:

$$\eta = \infty \,.\, 0, \quad \eta = \pm\infty \text{ etc.}$$

Der erste Werth giebt nach den bekannten Regeln $\eta = 0$. Es ist daher $\alpha = 0$, und die Gleichung der Asymptote ist: $\eta = 0$. Die Asymptote fällt demnach mit der Abscissen-Linie zusammen.

Beispiel 2. Gegeben ist die Gleichung der Curve:

$$(1)\quad y = \frac{b}{4a}\frac{ax + \left(\frac{b^2+a^2}{b^2}\right)x^2}{\sqrt{(ax+x^2)}} = \frac{b}{4a}\frac{\left(a + \left(\frac{b^2+a^2}{b^2}\right)x\right)}{\sqrt{\left(\frac{a}{x}+1\right)}}$$

Durch Differenzirung wird:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{4a}\frac{\left(\frac{1}{2}\frac{a^2}{x^2} + \frac{3}{2}\left(\frac{b^2+a^2}{b^2}\right)\frac{a}{x} + \frac{b^2+a^2}{b^2}\right)}{\left(\frac{a}{x}+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Für $x = \infty$ wird $\frac{dy}{dx} = \beta = \frac{b^2+a^2}{4ab}$.

2) Um den Werth α zu bestimmen, substituirt man

$$y = \eta = \alpha + \beta x = \alpha + \left(\frac{b^2+a^2}{4ab}\right)x$$

in die gegebene Gleichung, und es ist, da für $x = \infty$ der Nenner in Gleichung (1) nämlich: $\sqrt{\left(\frac{a}{x}+1\right)}$ gleich 1 ist:

$$\alpha + \beta x = \frac{b}{4a}\left(a + \frac{b^2+a^2}{b^2}x\right)$$

$$\alpha + \frac{b^2+a^2}{4ab}x = \frac{1}{4}b + \frac{b^2+a^2}{4ab}x.$$

Die Glieder mit x heben sich auf beiden Seiten der Gleichung, und es ist: $\alpha = \frac{1}{4}b$.

Die Asymptoten-Gleichung ist demnach:

$$\eta = \frac{1}{4}b + \frac{b^2+a^2}{4ab}x.$$

Beispiel 3. Gegeben ist die unentwickelte Gleichung der Curve:

$$x^3 + y^3 + \sin\frac{y}{x} = 0.$$

Diess ist eine transcendente Gleichung und kann nicht entwickelt gegeben werden. Es ist nun durch partielle Differenzirung:

$$\left(3y^2 + \frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy + \left(3x^2 - \frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx = 0,$$

also: $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x^4}\cos\frac{y}{x} - 3}{3\frac{y^2}{x^2} + \frac{1}{x^3}\cos\frac{y}{x}}.$$

Für $x = \infty$ wird $\cos\frac{y}{\infty} = 1$, also, da $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} = \frac{\eta}{\xi}$ ist:

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{-3}{3\frac{\eta^2}{\xi^2}}, \quad \frac{\eta^3}{\xi^3} = -1,$$

eine Gleichung, die den einzigen reellen Werth $\frac{\eta}{\xi} = -1 = \beta$ hat.

Um α zu bestimmen, substituirt man $y = \eta = \alpha + \beta x$ in die gegebene Gleichung, also $y = \alpha - x$, und man erhält für $x = \infty$:

$$x^3 + \alpha^3 - 3\alpha^2 x + 3\alpha x^2 - x^3 + \sin(-1) = 0$$

$$\frac{\alpha^3}{x^2} - \frac{3\alpha^2}{x} + 3\alpha + \frac{1}{x^2}\sin(-1) = 0,$$

also: $3\alpha = 0$, $\alpha = 0$.

Die Asymptote durchschneidet demnach die Abscissen-Linie im Anfangspunkte der Coordinaten der Curve unter einem halben rechten Winkel, da ihre Gleichung ist: $\eta = -x$.

Beispiel 4. Gegeben ist die unentwickelte Gleichung:

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

Es wird:

$$(3y^2 - 3ax)\,dy + (3x^2 - 3ay)\,dx = 0,$$

also: $$\frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax} = \frac{\frac{ay}{x^2} - 1}{\frac{y^2}{x^2} - \frac{a}{x}},$$

und für $x = \infty$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\eta}{\xi} = \frac{-1}{\frac{\eta^2}{\xi^2}} = \beta, \quad \beta = \frac{-1}{\beta^2},$$

also: $\beta^3 = -1$, $\beta = -1$.

Um α zu bestimmen, substituirt man $y = \alpha - x$ in die gegebene Gleichung, und man erhält:

$$x^3 + \alpha^3 - 3\alpha^2 x + 3\alpha x^2 - x^3 - 3a\alpha x + 3ax^2 = 0$$

$$\frac{\alpha^3}{x^2} - \frac{3\alpha^2}{x} + 3\alpha - \frac{3a\alpha}{x} + 3a = 0,$$

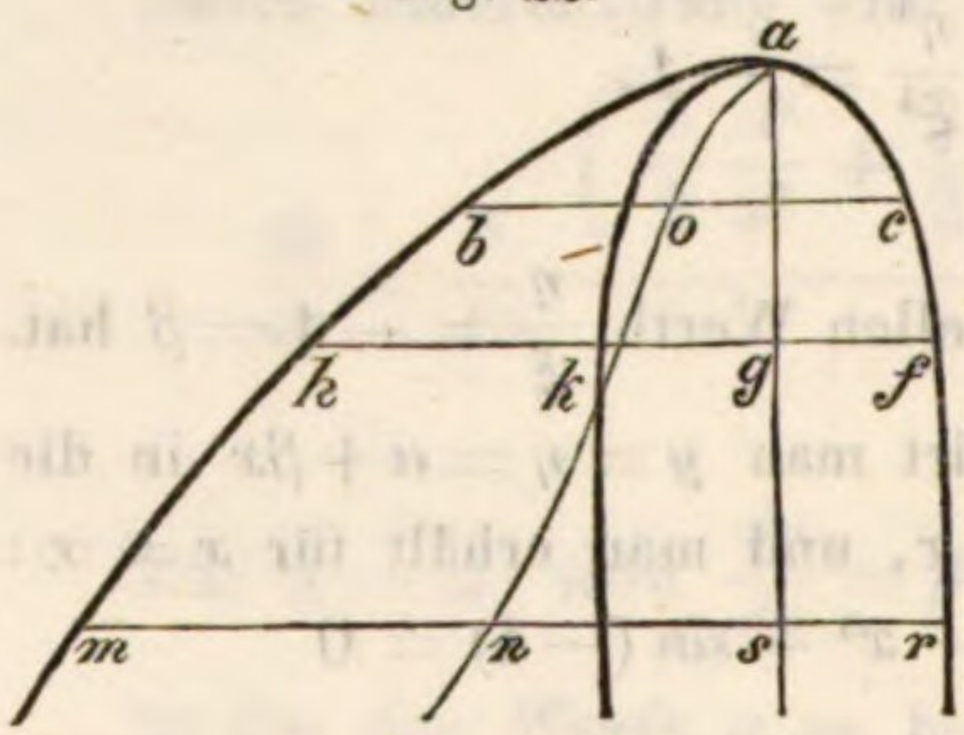
also für $x = \infty$: $3\alpha = -3a$, $\alpha = -a$.

Die Gleichung der Asymptote ist demnach:

$$\eta = -a - x.$$

Beispiel 5. Construirt man aus der Hyperbel *abhm* von der Gleichung $y = \frac{b}{a}\sqrt{(ax+x^2)}$ eine Curve *kacfr*, indem man die Ordinate der neuen Curve y' mittelst der Gleichung $y' = \frac{y^2-x^2}{2y}$ construirt (was geometrisch sehr leicht ausgeführt wird), construirt man ferner aus der Hyperbel und dem Arme *acfr* der zweiten Curve eine dritte Curve *aokn*, indem man ihre Ordinate setzt:

Fig. 22.



$$y'' = \frac{1}{2}(y-y') = \frac{y^2+x^2}{4y},$$

so hat man drei Curven, die sämmtlich reelle Asymptoten haben.

Für die Hyperbel findet man: $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$ (für $x = \infty$).

Substituirt man $\eta = y = \alpha + \frac{b}{a}x$ in die Gleichung:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(ax + x^2),$$

so findet man:

$$\frac{\alpha^2}{x} + \frac{2\alpha b}{a} + \frac{b^2}{a^2}x = \frac{b^2}{a} + \frac{b^2}{a^2}x.$$

Die Grösse $\frac{b^2}{a^2}x$ hebt sich auf beiden Seiten der Gleichung, und es wird für $x = \infty$:

$$\frac{2\alpha b}{a} = \frac{b^2}{a}; \quad \alpha = \frac{b}{2}.$$

Die Asymptoten-Gleichung ist demnach:

$$\eta = \frac{b}{2} + \frac{b}{a}x,$$

und für $\eta = 0$ wird $x = -\frac{1}{2}a$, d. h. die Asymptote durchschneidet die grosse Axe der Hyperbel im Mittelpunkte.

Für die zweite Curve wird die Asymptoten-Gleichung:

$$\eta' = \frac{1}{2}b + \frac{b^2-a^2}{2ab}x.$$

Für die dritte Curve wird die Asymptoten-Gleichung:

$$\eta'' = \frac{1}{4}b + \frac{b^2 + a^2}{4ab}x.$$

Wird eine gleicharmige Hyperbel, also $a = b$ vorausgesetzt, so wird die Asymptote der ersten Curve $\eta = \frac{b}{2} + x$, die Asymptote der zweiten Curve $\eta' = \frac{1}{2}b$ (also parallel mit der Abscissen-Linie), und die Asymptote der dritten Curve $\eta'' = \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}x$.

Allgemeiner Zusatz. Das angegebene Verfahren ist von der Lehre der unendlich kleinen Werthe und von der schwierigen Ermittlung der Grenzen, denen sich $f\left(\frac{y}{x}\right)$ für $x = \infty$ nähert, völlig unabhängig. Man nimmt die Gleichung der Asymptote $y = \alpha + \beta x$ und sucht β aus $\frac{dy}{dx}$. Ist $\beta = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} = \frac{\eta}{\xi}$ (für $x = \infty$) gefunden, dann substituirt man statt y den Werth $\alpha + \beta x$ in die gegebene Gleichung, und sucht α. Ist α bestimmt, dann sucht man aus $\eta = \alpha + \beta x$ den Durchschnittspunkt der Asymptote mit der gegebenen Abscissen-Linie, indem man $\eta = 0$ setzt, woraus $x = -\frac{\alpha}{\beta}$ gefunden wird. — Uebrigens versteht es sich von selbst, dass bei einer vollständigen Theorie der Curven, wo es sich darum handelt, alle Asymptoten einer Curve zu finden, dasselbe Verfahren auch für den Fall durchgeführt werden müsse, dass man y als unabhängige und x als abhängige Veränderliche nimmt, und die Gleichung der Asymptote sucht: $\xi = \mu + \nu y$. Man findet den Werth ν aus $\frac{dx}{dy}$, und den Werth μ, indem man $\mu + \nu y$ statt x in die gegebene Gleichung substituirt.

§. 164.

Berührungen der Curven.

1) Definition. Wenn zwei Curven von den Coordinaten (y, x) und (η, x), die also dieselbe Abscisse haben, gegeben sind, so haben sie einen Punkt gemeinschaftlich, wenn $y = \eta$ ist; sie haben eine Berührung der ersten Ordnung, wenn überdiess $dy = d\eta$, eine Berührung der zweiten Ordnung, wenn ausserdem $d^2y = d^2\eta$ ist etc., und sie haben überhaupt eine Berührung der n^{ten} Ord-

nung, wenn die $(n+1)$ Gleichungen stattfinden: $y=\eta$, $dy=d\eta$, $d^2y=d^2\eta$, .. $d^ny=d^n\eta$.

Auch sagt man von Curven, die wenigstens eine Berührung der zweiten Ordnung haben, dass sie osculiren.

2) Lehrsatz I. Curven, die eine Berührung der ersten Ordnung haben, haben in diesem Punkte eine gemeinschaftliche Tangente; Curven, die eine Berührung der zweiten Ordnung haben, haben ausserdem eine gemeinschaftliche tangirende Parabel zweiter Ordnung. Ueberhaupt haben Curven, die eine Berührung der n^{ten} Ordnung haben, auch die tangirenden Parabeln erster, zweiter, dritter, .. n^{ter} Ordnung gemeinschaftlich.

Der Beweis dieses Satzes ist so einfach, dass wir ihn übergehen können.

3) Lehrsatz II. Die Differenz der Ordinaten:

$$\Big(y+\Delta y-(\eta+\Delta\eta)\Big)$$

der beiden Curven, die sich in einem Punkte berühren, ist in der Nähe dieses Punktes um so kleiner, je höher die Ordnung der Berührung der Curven ist.

Beweis. Es ist:

$$\Big(y+\Delta y-(\eta+\Delta\eta)\Big)=y'-\eta'=$$

$$=(y-\eta)+(dy-d\eta)+\frac{1}{2}(d^2y-d^2\eta)+\ldots$$

$$+\frac{1}{1.2..n-1}(d^{n-1}y-d^{n-1}\eta)+\frac{1}{1.2..n}(d^ny-d^n\eta)+\ldots$$

Da die Reihe $(y'-\eta')$, wenn die Operationen ausgeführt gedacht werden, nach aufsteigenden Potenzen von dx geordnet ist, so wird ihr Werth $(y'-\eta')$ um so kleiner, je mehr Glieder ausfallen, weil dx so genommen werden kann, dass jedes vorhergehende Glied grösser bleibt, als die Summe aller nachfolgenden Glieder. Die vorhergehenden Glieder fallen aber aus, wenn $y=\eta$, $dy=d\eta$, $d^2y=d^2\eta$ u. s. w. gesetzt werden, d. h. wenn Berührungen der ersten, zweiten, dritten .. n^{ten} Ordnung stattfinden.

Zusatz. Verschwindet in der Reihe $(y'-\eta')$ noch das n^{te} Differenzial, so wird:

$$y'-\eta'=\frac{1}{1.2..n+1}(d^{n+1}y-d^{n+1}\eta)+$$

$$+\frac{1}{1.2..n+1.n+2}(d^{n+2}y-d^{n+2}\eta)+\ldots$$

und man sagt von diesen Curven, dass sie eine Berührung der n^{ten} Ordnung haben.

4) Lehrsatz III. Die Curve, die mit einer andern eine Berührung der n^{ten} Ordnung hat, liegt ganz auf einer und derselben Seite dieser Curve, oder sie durchschneidet dieselbe im Berührungspunkte, je nachdem n eine ungerade oder eine gerade Zahl ist. [Curven, die eine Berührung der zweiten, vierten, .. 2μten Ordnung haben, durchschneiden sich allgemein im Berührungspunkte; Curven, die eine Berührung der ersten, dritten .. $(2\mu+1)^{ten}$ Ordnung haben, durchschneiden sich nicht im Berührungspunkte. Die Tangente, als Berührungscurve der ersten Ordnung, liegt daher allgemein auf einer und derselben Seite der Curve, zu der sie Tangente ist.]

Beweis. Wird x um dx vermehrt, so werde $y + \Delta y$ mit y' und $y + \Delta\eta$ mit η' bezeichnet; wird x um dx vermindert, so gelte die Bezeichnung y_i und η_i. Es sind nun $(y' - \eta')$ die Differenzen der Ordinate, die dem Berührungspunkte nachfolgen, und $(y_i - \eta_i)$ die Differenzen der Ordinaten, die dem Berührungspunkte $(y - \eta)$ vorausgehen.

Nun ist:

$$\begin{pmatrix} y' - \eta' \\ y_i - \eta_i \end{pmatrix} = (y - \eta) \mp (dy - d\eta) + \frac{1}{2}(d^2y - d^2\eta) \mp .. + \frac{1}{1.2..2\mu}(d^{2\mu}y - d^{2\mu}\eta) \mp \pm \frac{1}{1.2..(2\mu+1)}(d^{2\mu+1}y - d^{2\mu+1}\eta) + ...$$

Ist die Berührung von gerader Ordnung 2μ, so fallen alle Glieder aus bis zum Gliede $\mp \frac{1}{1.2..2\mu+1}(d^{2\mu+1}y - d^{2\mu+1}\eta)$, und es wird:

$$\begin{pmatrix} y' - \eta' \\ y_i - \eta_i \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{1.2..2\mu+1}(d^{2\mu+1}y - d^{2\mu+1}\eta) + ..$$

Die Differenzen der Ordinaten haben daher verschiedene Zeichen, je nachdem sie dem Berührungspunkte nachfolgen, oder ihm vorausgehen, d. h. die Curven durchschneiden sich im Berührungspunkte. — Haben sie aber eine Berührung ungerader Ordnung $(2\mu - 1)$, so wird die Reihe:

$$\begin{pmatrix} y' - \eta' \\ y_i - \eta_i \end{pmatrix} = + \frac{1}{1.2..2\mu}(d^{2\mu}y - d^{2\mu}\eta) \mp ..$$

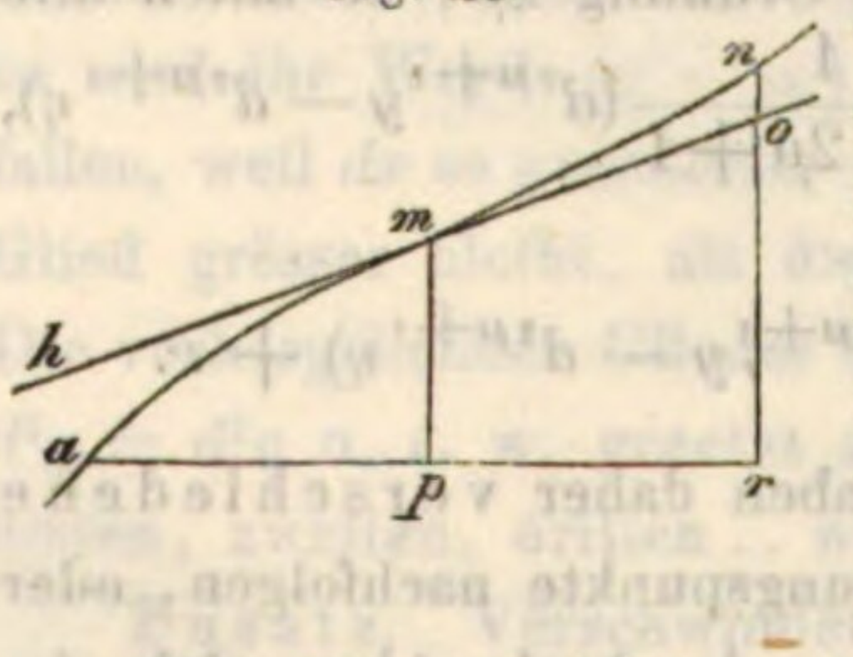
und die Differenzen der Ordinaten haben gleiche Zeichen, sie mögen dem Berührungspunkte vorausgehen oder ihm nachfolgen, d. h. die Curven durchschneiden sich nicht.

Zusatz 1. Das letzte Glied, das in der Reihe noch ausfällt, entscheidet über die Ordnung der Berührung. Hat daher eine Curve allgemein mit einer andern eine Berührung der n^{ten} Ordnung, so kann singulär, für einen besondern Punkt dieser andern Curve, noch ein Glied ausfallen, und die Curve hat dann in diesem Punkte singulär eine Berührung der $(n+1)^{ten}$ Ordnung.

Zusatz 2. Eine schöne Anwendung dieser singulären Tangirung geben die Tangenten für die Inflexionspunkte der Curven. Die Tangenten, als gerade Linien, haben allgemein nur eine Berührung der ersten Ordnung, und liegen daher auf einer und derselben Seite der Curve, ohne sie im Berührungspunkte zu durchschneiden. Aber im Inflexionspunkte einer Curve fällt in der Reihe $\left\{\begin{matrix} y' - \eta' \\ y_i - \eta_i \end{matrix}\right\}$ auch $(d^2y - d^2\eta)$ aus, da für die gerade Linie: $\eta = \alpha + \beta x$, das zweite Differenzial $d^2\eta$ allgemein gleich Null ist, und da singulär für den Inflexionspunkt der Curve auch d^2y gleich Null ist. Die gerade Linie hat daher singulär im Inflexionspunkte einer Curve eine Berührung zweiter Ordnung mit ihr, und durchschneidet sie.

Diess ist auch ganz leicht geometrisch abzunehmen.

Fig. 23.



In der verzeichneten Curve ist *m* der Inflexionspunkt. Es ist einleuchtend, dass bei einer Curve, die gegen die Abscissen-Linie concav ist, das Differenzial dy grösser ist, als die Zunahme zur Ordinate Δy. Umgekehrt verhält es sich bei einer gegen die Abscissen-Linie convexen Curve.

Um daher bestimmen zu können, ob eine Curve einen Punkt der Inflexion hat, d. h. ob sie aus der Convexität in die Concavität übergeht, braucht man nur zu untersuchen, ob eine Curve für einen singulären Werth von x das Differenzial dy grösser und dann kleiner als Δy habe.

Es ist:

$$\Delta y = dy + \frac{1}{2}d^2y + \frac{1}{2.3}d^3y + \ldots$$

Es sei Δy positiv, also auch dy. Ist nun d^2y positiv, so ist offenbar $dy < \Delta\eta$ und die Curve ist convex gegen die Abscissenlinie. Ist d^2y negativ, so ist $dy > \Delta\eta$, und die Curve ist concav gegen die Abscissenlinie. Da nun im Punkte der Inflexion die Curve weder concav noch convex sein kann, so muss $d^2y = 0$ sein.

Daraus leitet sich die bekannte Regel ab: um zu bestimmen, ob eine Curve Inflexionspunkte habe, und welche, setzt man $d^2y = 0$, und sucht daraus die Werthe x oder y, für welche die Curve Inflexionspunkte hat.

5) Lehrsatz IV. Eine Curve von $(n+1)$ willkührlichen Constanten kann allgemein eine Berührung der n^{ten} Ordnung mit einer andern Curve haben.

Beweis: Bei der Berührung der n^{ten} Ordnung müssen die $(n+1)$ Gleichungen stattfinden:

$$y = \eta,\quad dy = d\eta,\quad d^2y = d^2\eta, \ldots\quad d^ny = d^n\eta.$$

Dadurch sind die $(n+1)$ willkührlichen Constanten der Curve vollkommen bestimmt. Fände demnach noch eine Berührung der $(n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung statt, so hätte man $(n+2)$ Gleichungen und nur $(n+1)$ unbekannte Grössen (willkührliche Constanten), was nur singulär, nicht mehr allgemein angeht.

Zusatz 1. Eine Curve mit einer willkührlichen Constante hat daher allgemein mit einer andern Curve gar keine Berührung, sondern nur einen Durchschnittspunkt. — Die gerade Linie hingegen, die höchstens zwei willkührliche Constanten hat, da für sie die Gleichung gilt: $\eta = \alpha + \beta x$, hat eine Berührung der ersten Ordnung mit jeder Curve, und singulär auch eine Berührung der zweiten Ordnung [für einen Inflexionspunkt einer Curve, da für diesen singulär auch $(d^2y - d^2\eta)$ gleich Null ist]. — Der Kreis von der Gleichung: $\eta^2 + x^2 = r^2$ hat allgemein keine Berührung mit irgend einer Curve, da er nur eine willkührliche Constante r hat. Er kann nur Durchschnittspunkte mit andern Curven haben. Der Kreis mit zwei willkührlichen Constanten: $(\eta - b)^2 + x^2 = r^2$ kann mit allen Curven Berührungen der ersten Ordnung haben, und der Kreis mit drei willkührlichen Constanten, dessen Lage also

ganz und gar von den Constanten abhängt, $(\eta - b)^2 + (x - a)^2 = r^2$, kann mit jeder Curve allgemein eine Berührung der zweiten Ordnung, oder eine Osculation haben. Mehr als drei willkührliche Constanten können aber dem Kreise nicht zukommen.

6) Lehrsatz V. Wenn eine Curve $(n+1)$ willkührliche Constanten hat, so können unzählig viele Curven derselben Art (z. B. Kreise, wenn vom Kreise die Rede ist, Ellipsen, wenn von Ellipsen die Rede ist) Berührungen der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung haben. Aber die einzige Curve, die eine Berührung der n^{ten} Ordnung hat, liegt der gegebenen Curve zunächst am Berührungspunkte näher, als jede der unzählig vielen Curven, die eine Berührung der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung haben.

Erläuterung durch ein Beispiel. Alle Kreise, deren Mittelpunkte in der Normale einer Curve liegen, können mit dieser Curve eine Berührung der ersten Ordnung haben. Aber es giebt nur einen Kreis unter ihnen, der eine Berührung der zweiten Ordnung mit der Curve hat, und der näher an der Curve liegt, als alle übrigen Kreise, ihre Radien mögen nun grösser oder kleiner sein, als der Radius des osculirenden Kreises.

Beweis des Lehrsatzes. *a*) Sind $(n+1)$ willkührliche Constanten gegeben, und wird nur eine Berührung der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung verlangt, so finden bloss n Gleichungen für $(n+1)$ unbekannte Grössen statt. Dadurch sind die willkührlichen Constanten nicht bestimmt; es sind unzählig viele Auflösungen möglich, die alle der gegebenen Aufgabe genügen.

b) Die Curven, die nur eine Berührung der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung haben, machen in der Reihe $y' - \eta'$ nur die ersten n Glieder verschwinden, während diejenige Curve, die eine Berührung der n^{ten} Ordnung hat, in der nämlichen Reihe die ersten $(n+1)$ Glieder verschwinden macht. Je mehr Glieder verschwinden, desto kleiner wird die Differenz $(y' - \eta')$, und je kleiner diese Differenz der Ordinaten wird, desto näher liegen die Curven aneinander.

Zusatz. Die weitere Ausführung dieser eben so schönen als leichten Lehren über die Tangirungen der Curven ist Sache der analytischen Geometrie. Nur zwei Arten von Curven giebt es, die eine besondere Ausführung in der allgemeinen Theorie verdienen, die Parabeln, weil sie eine endliche Reihe der

Differenzialien geben, und dadurch zum geometrischen Masse aller Differenzialien werden, und die Kreise, weil sie in allen Punkten ihrer Peripherie die gleiche Krümmung haben, und dadurch als Mass der Krümmung für alle Punkte der Curven dienen.

§. 165.

Tangirende Parabeln.

1) Die Parabel von der Gleichung:

$$\eta' = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + .. + \nu x^n$$

hat mit einer Curve $y = fx$ eine Berührung der n^{ten} Ordnung, wenn für den Punkt der Berührung die $(n+1)$ Gleichungen stattfinden:

$$\eta' = y, \quad d\eta' = dy, \quad d^2\eta' = d^2y, \ldots \quad d^n\eta' = d^ny.$$

Aus den vorhergehenden Lehren ist auch bekannt, dass eine solche Parabel höchstens eine Berührung der n^{ten} Ordnung mit der gegebenen Curve haben kann.

2) Verändert man den Anfangspunkt der Abscissen der Parabel, indem man ihre neue Abscisse $\xi = x + dx$ setzt, was ganz allgemein ist, da dx alle positiven und negativen Werthe haben kann, und bezeichnet man die der Abscisse ξ entsprechende Ordinate $\eta' + \Delta\eta'$ durch η, so kann die Gleichung der tangirenden Parabel durch die aufeinanderfolgenden Differenzialien der Ordinaten y gegeben werden, und man erhält die von den willkührlichen Constanten $\alpha, \beta, \gamma \ldots \nu$ ganz unabhängige Gleichung der Parabel.

Denn es ist:

$$\eta' + \Delta\eta' = \eta' + \frac{d\eta'}{dx}dx + \frac{1}{2}\frac{d^2\eta'}{dx^2}dx^2 + .. + \frac{1}{1.2\ldots n}\frac{d^n\eta'}{dx^n}dx^2.$$

Da nun $\eta' + \Delta\eta' = \eta$, $dx = \xi - x$, $\eta' = y$, $\frac{d\eta'}{dx} = \frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2\eta'}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2}, ..$ $\frac{d^n\eta'}{dx^n} = \frac{d^ny}{dx^n}$ ist, so wird:

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x) + \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}(\xi - x)^2 + \ldots + \frac{1}{1.2..n}\frac{d^ny}{dx^n}(\xi - x)^n.$$

3) Wird $n = 1$ gesetzt, so geht die früher gefundene Gleichung der Tangente hervor:

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x).$$

4) Es bietet sich nun hier, wie bei den Tangenten, eine doppelte Reihe von Aufgaben dar:

1. Wenn ein Punkt einer Curve gegeben, also (x, y) bestimmt ist, zu diesem Punkte die tangirende Parabel n^{ter} Ordnung zu ziehen;
2. wenn irgend ein Punkt (η, ξ) gegeben ist, von diesem Punkte aus die tangirende Parabel n^{ter} Ordnung zu einer gegebenen Curve zu ziehen.

Die Behandlung dieser Aufgaben, als zu weit führend, muss der analytischen Geometrie überlassen werden.

§. 166.

Osculirende Kreise.

1) Ein Kreis kann allgemein mit jeder Curve eine Berührung zweiter Ordnung haben, wenn er seiner Lage nach ganz allgemein, d. h. mit drei willkührlichen Constanten gegeben ist. — Wäre er aber nur mit einer willkührlichen Constante, etwa dem Radius, gegeben, $\eta^2 + x^2 = r^2$, so würde er seiner Lage nach ganz bestimmt sein, und nur sein Radius könnte beliebig vergrössert oder verkleinert werden, und dadurch könnte er jede Curve in einem gegebenen Punkte (x, y) durchschneiden. Ist der Kreis mit zwei willkührlichen Constanten gegeben:

$$(\eta - b)^2 + x^2 = r^2,$$

dann kann er die Curve nicht bloss in diesem Punkte durchschneiden, sondern er kann mit ihr noch eine Berührung der ersten Ordnung haben, wenn die Constanten b und r so bestimmt werden, dass $y = \eta$, und $dy - d\eta$ wird. — Aber unzählig viele Kreise berühren die Curve in diesem Punkte ebenfalls, und unter ihnen liegt einer, vor und nach der Berührung, der Curve näher, als jeder andere, nämlich derjenige Kreis, der auch $d^2y = d^2\eta$ macht. Damit diess stattfinden könne, muss der Kreis noch eine dritte willkührliche Constante haben, und seine Gleichung muss sein:

$$(\eta - b)^2 + (x - a)^2 = r^2.$$

2) Weil dieser Kreis an der Curve näher liegt, als jeder andere Kreis, und weil demnach seine Krümmung mit der Krümmung der gegebenen Curve im gegebenen Punkte mehr überein-

stimmt, als die Krümmung jedes andern Kreises, wird er der osculatorische oder Krümmungskreis und sein Halbmesser r der Krümmungshalbmesser des gegebenen Punktes der Curve genannt. Und da der Kreis die einzige Curve ist, die in allen Punkten gleiche Krümmung, d. h. gleiche Abweichung von der Tangente hat, so ist er allein tauglich, die Krümmung der Curven durch ein gemeinschaftliches Mass zu bestimmen.

3) Es sei die Gleichung der Curve $y = fx$ gegeben. Der Krümmungskreis hat die Gleichung: $(\eta - b)^2 + (x - a)^2 = r^2$, und damit er Krümmungskreis für einen Punkt (x, y) der Curve sei, müssen die drei Bedingungs-Gleichungen stattfinden:

$$y = \eta, \quad dy = d\eta, \quad d^2y = d^2\eta.$$

Aus diesen drei Gleichungen eliminirt man a und b, und man erhält r in einem Ausdrucke, der allein von der Curve $f(x, y)$ abhängt.

Um b zu eliminiren, differenzirt man die Gleichung:

$$(\eta - b) = \sqrt{\left(r^2 - (x-a)^2\right)},$$

und man erhält:

$$(1) \quad d\eta = dy = -\frac{x-a}{\sqrt{\left(r^2-(x-a)^2\right)}}dx.$$

Um a zu eliminiren, differenzirt man $d\eta$ noch einmal, und man erhält:

$$(2) \quad d^2\eta = d^2y = -\frac{r^2dx^2}{\left(r^2-(x-a)^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Man sucht nun in den Gleichungen (1) und (2) den Werth $(x - a)$ und setzt sie einander gleich. Daraus folgt:

$$d^2y = -\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{rdx}, \quad \text{und} \quad r = -\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y}.$$

4) In diesem Ausdrucke ist dx als unabhängige Veränderliche genommen. Würde statt nach x, nach einer andern Veränderlichen v differenzirt, so würde man statt d^2y_x haben: $d^2y_v - \frac{dy}{dx}d^2x_v$, so dass der Radius würde:

$$r = -\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y_v - dy\,d^2x_v}.$$

Würde $v = y$, also dy_y constant genommen, so würde:

$$r = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dy\, d^2x_y}.$$

Würde $v = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = s$ genommen, so würde:

$$d(\sqrt{dx^2 + dy^2}) = 0,$$

also: $dx\, d^2x_s + dy\, d^2y_s = 0$, und $r = -\frac{ds\, dx}{d^2y_s} = +\frac{ds\, dy}{d^2x_s}$.

U. s. w.

5) Aus den beiden Gleichungen $r = -\frac{ds\, dx}{d^2y_s}$, $r = +\frac{ds\, dy}{d^2x_s}$ lässt sich eine sehr elegante Formel für den Krümmungshalbmesser ableiten.

Es ist nämlich $\frac{1}{r} = -\frac{d^2y_s}{ds\, dx}$, also: $\frac{1}{r^2} = \frac{(d^2y_s)^2}{ds^2\, dy^2}$.

Eben so $\frac{1}{r} = \frac{d^2x_s}{ds\, dy}$, also: $\frac{1}{r^2} = \frac{(d^2x_s)^2}{ds^2\, dx^2}$.

Daraus findet man:

$$(d^2y_s)^2 = \frac{ds^2\, dx^2}{r^2}; \quad (d^2x_s)^2 = \frac{ds^2\, dy^2}{r^2}.$$

Ihre Summe giebt:

$$(d^2y_s)^2 + (d^2x_s)^2 = \frac{ds^2(dx^2 + dy^2)}{r^2}, \text{ oder } (d^2y_s)^2 + (d^2x_s)^2 = \frac{ds^4}{r^2},$$

und daraus:

$$\frac{1}{r} = \pm \sqrt{\left(\left(\frac{d^2y_s}{dx^2 + dy^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2x_s}{dx^2 + dy^2}\right)^2\right)}.$$

§. 167.

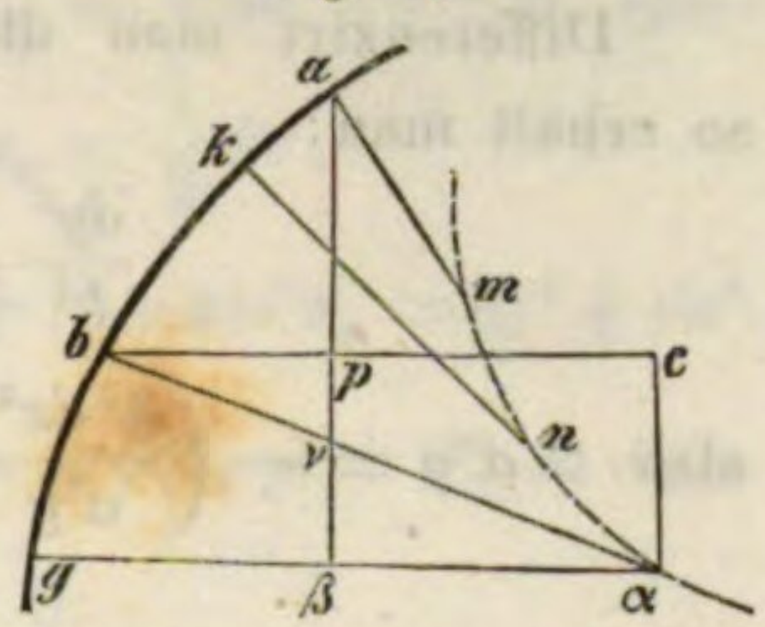
Evoluten gegebener Curven.

1) Wenn die Mittelpunkte aller aufeinanderfolgenden osculatorischen Kreise einer Curve verbunden gedacht werden, so entsteht eine neue Curve, welche die Evolute einer Curve genannt wird. Sie ist der geometrische Ort aller Mittelpunkte der Krümmungskreise.

2) Es sei *akbg* die gegebene Curve, und *mα* ihre Evolute. Der Punkt *a* sei der Anfangspunkt der Abscissen, also für den

Punkt b die Abscisse $x = ap$ und die Ordinate $y = bp$. Dem Punkte b in der Curve entspricht der Punkt α in der Evolute. Ihre Abscisse ist: $a\beta = \xi$, und ihre Ordinate ist: $\alpha\beta = -\eta$ (weil sie eine der Ordinate y entgegengesetzte Lage hat).

Fig. 24.



Es folgen nun die Gleichungen: $\eta = y - bc$, $\xi = x + ac$, und es sind die Linien bc und ac zu bestimmen.

3) Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke folgt:

$$bp : bv = bc : b\alpha, \quad \text{oder:} \quad y : norm = bc : r;$$

(worin r den Krümmungshalbmesser ausdrückt)

$$bv : vp = b\alpha : c\alpha, \quad \text{oder:} \quad norm : subn = r : c\alpha.$$

Daraus findet man:

$$bc = \frac{ry}{norm} = -\frac{(dx^2 + dy^2)}{d^2y}$$

und

$$ac = \frac{r\,subn}{norm} = -\frac{(dx^2 + dy^2)}{d^2y}\,\frac{dy}{dx}.$$

4) Es ist daher:

$$\eta = y + \frac{dx^2 + dy^2}{d^2y}$$

$$\xi = x - \frac{dx^2 + dy^2}{d^2y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Sucht man aus diesen Gleichungen die Werthe x und y, und substituirt sie in die gegebene Gleichung der Curve, $f(x, y) = 0$, so geht eine Gleichung zwischen den Coordinaten η und ξ hervor, welche die Gleichung der Evolute ist.

5) Beispiel zur Verdeutlichung. Es sei die Mittelpunkts-Gleichung der Ellipse gegeben: $\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$, und es soll ihre Evolute gesucht werden.

Aus $\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$ folgt durch Differenzirung: $\frac{ydy}{b^2} + \frac{xdx}{a^2} = 0$,

also:

$$dy = -\frac{b^2 x\,dx}{a^2 y} \quad \text{und} \quad dx^2 + dy^2 = \left(1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}\right) dx^2.$$

Differenzirt man die Gleichung: $\frac{ydy}{b^2}+\frac{xdx}{a^2}=0$ nochmal, so erhält man:

$$\frac{dy^2}{b^2}+\frac{yd^2y}{b^2}+\frac{dx^2}{a^2}=0,$$

also: $$d^2y=-\left(\frac{b^2dx^2}{a^2y}+\frac{dy^2}{y}\right)=-\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)\frac{dx^2}{y}.$$

Wird endlich aus der gegebenen Gleichung $\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}=1$ der Werth $\frac{x^2}{a^2}=1-\frac{y^2}{b^2}$ substituirt, so wird $\eta=y+\frac{dx^2+dy^2}{d^2y}$ gleich:

$$\eta=-\left(\frac{a^2-b^2}{b^4}\right)y^3, \text{ und } \xi \text{ wird: } \xi=\frac{a^2-b^2}{a^4}x^3.$$

Daraus findet man:

$$y=-\sqrt[3]{\left(\frac{b^4\eta}{a^2-b^2}\right)},$$

$$x=\sqrt[3]{\left(\frac{a^4\xi}{a^2-b^2}\right)},$$

und diese Werthe in die gegebene Gleichung substituirt, geben nach gehöriger Reduction:

$$\left(\frac{\xi}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{\eta}{a}\right)^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}},$$

welches die Gleichung der Evolute ist. Wie bekannt, ist diess die Astrois, welche durch die beiden Durchmesser der Ellipse in vier congruente Theile getheilt wird. Für den Kreis, in welchem $a=b$ ist, zieht sie sich in einen Punkt zusammen, dessen Gleichung $\xi=0$, $\eta=0$ die Gleichung des Mittelpunkts ist.

6) Statt der obigen Formeln für die Evolute lassen sich andere entwickeln, die leichter zu behandeln sind, wenn die Gleichung der Curve unentwickelt gegeben ist.

Nimmt man in den obigen Formeln auch dx veränderlich, und differenzirt man nach v, so wird:

$$\frac{\eta-y}{dx}=\frac{dx^2+dy^2}{dx\,d^2y_v-dy\,d^2x_v},$$

$$\frac{\xi-x}{dy}=-\frac{dx^2+dy^2}{dx\,d^2y_v-dy\,d^2x_v}.$$

Wird $dv = ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ gesetzt, so wird $d^2s = 0$, also:

$$dx\,d^2x + dy\,d^2y = 0, \quad \text{und} \quad (\eta - y)\,d^2y_s = \frac{1}{2}ds^2;$$

$$(\xi - x)\,d^2x_s = \frac{1}{2}ds^2, \quad \text{und} \quad (\eta - y)\,d^2y_s + (\xi - x)\,d^2x_s = dy^2 + dx^2.$$

Ist nun die Gleichung der Curve: $u = f(x, y) = 0$, so ist:

$$\left|\frac{du}{dy}\right| dy + \left|\frac{du}{dx}\right| dx = 0,$$

und $\dfrac{\eta - y}{dx} = -\dfrac{\xi - x}{dy}$ geht in folgende Gleichung über:

$$\frac{\eta - y}{\left|\frac{du}{dy}\right|} = \frac{\xi - x}{\left|\frac{du}{dx}\right|} = \frac{(\eta - y)\,d^2y_s + (\xi - x)\,d^2x_s}{\left|\frac{du}{dy}\right| d^2y_s + \left|\frac{du}{dx}\right| d^2x_s} =$$

$$= -\frac{(dy^2 + dx^2)}{\left|\frac{d^2u}{dy^2}\right| dy^2 + 2\left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right| dx\,dy + \left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| dx^2},$$

(weil aus Gleichung:

$$d^2u = 0 = \left|\frac{d^2u}{dy^2}\right| dy^2 + 2\left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right| dx\,dy + \left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| dx^2 + \left|\frac{du}{dy}\right| d^2y_s + \left|\frac{du}{dx}\right| d^2x_s$$

der obenstehende Werth des Nenners hervorgeht).

Substituirt man noch in den Zähler den Werth:

$$\frac{dy}{dx} = -\left|\frac{du}{dx}\right| : \left|\frac{du}{dy}\right|,$$

so erhält man die zwei Gleichungen:

$$\left\{\begin{matrix}\dfrac{\eta - y}{\left|\frac{du}{dy}\right|} \\ \dfrac{\xi - x}{\left|\frac{du}{dx}\right|}\end{matrix}\right\} = -\frac{\left|\frac{du}{dx}\right|^2 + \left|\frac{du}{dy}\right|^2}{\left|\frac{d^2u}{dy^2}\right| \left|\frac{du}{dx}\right|^2 - 2\left|\frac{d^2u}{dx\,dy}\right| \left|\frac{du}{dx}\right| \left|\frac{du}{dy}\right| + \left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| \left|\frac{du}{dy}\right|^2}$$

Diese Formeln in die gegebene Curve $u = f(x, y) = 0$ substituirt, geben für die Evolute die gesuchte Gleichung zwischen ihren Ordinaten η und ξ.

Beispiel. Es sei die Gleichung gegeben:

$$(1) \quad u = y^3 - 3axy + x^3 = 0,$$

so ist: $\left|\frac{du}{dy}\right| = 3y^2 - 3ax$; $\left|\frac{du}{dx}\right| = 3x^2 - 3ay$; $\left|\frac{d^2u}{dy^2}\right| = 6y$;

$$\left|\frac{d^2u}{dx^2}\right| = 6x; \quad \frac{d^2u}{dx\,dy} = -3a.$$

Es ist daher:

$$\frac{(\eta - y)}{y^2 - ax} = -\frac{(y^2 - ax)^2 + (x^2 - ay)^2}{2y(x^2 - ay)^2 + 2a(y^2 - ax)(x^2 - ay) + 2x(y^2 - ax)^2},$$

oder wenn man den Nenner durch Multiplication in einfache Grössen auflöst, und $y^3 - 3axy + x^3 = 0$ setzt:

$$(2) \quad \frac{\eta - y}{y^2 - ax} = -\frac{(y^2 - ax)^2 + (x^2 - ay)^2}{2a^3xy}.$$

Eben so ist:

$$(3) \quad \frac{\xi - x}{x^2 - ay} = -\frac{(y^2 - ax)^2 + (x^2 - ay)^2}{2a^3xy}.$$

Eliminirt man aus den Gleichungen (1) und (2), und aus den Gleichungen (1) und (3) z. B. y, so erhält man zwei neue Gleichungen (4) und (5), die nur η und x und ξ und x enthalten. Eliminirt man nun aus (4) und (5) die Grösse x, so erhält man eine Gleichung, die nur η und ξ und die constante Grösse a enthält, und welche die Coordinaten-Gleichung der Evolute ist.

§. 168.

Vergleichung des Krümmungshalbmessers mit dem Bogen der Evolute.

Lehrsatz 1. Differenzirt man die Oben gefundenen Werthe:

$$\eta = y + \frac{(dx^2 + dy^2)}{d^2y}; \quad \xi = x - \frac{(dx^2 + dy^2)\,dy}{dx\,d^2y},$$

in denen dx als constant genommen wird, so erhält man:

$$d\eta = 3dy - \frac{(dx^2 + dy^2)\,d^3y}{(d^2y)^2},$$

$$d\xi = -\frac{3dy^2}{dx} + \frac{(dx^2 + dy^2)\,dy\,d^3y}{dx\,(d^2y)^2}.$$

Addirt man ihre Quadrate, so erhält man nach gehöriger Reduction:

$$\sqrt{(d\xi^2 + d\eta^2)} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\left(\frac{(dx^2 + dy^2)\,d^3y}{(d^2y)^2} - 3dy\right).$$

Diess ist aber, wie man durch Differenzirung findet, das Differenzial des Krümmungshalbmessers. Es ist daher $\sqrt{(d\xi^2 + d\eta^2)} = dr$, und durch Integration:

$$\int\sqrt{(d\xi^2 + d\eta^2)} = r + C, \quad \text{oder:} \quad \int\sqrt{(d\xi^2 + d\eta^2)} - C = r.$$

Nun ist aber, wie bekannt, $\sqrt{(d\xi^2 + d\eta^2)}$ das Differenzial des Bogens der Evolute, und $k + \int\sqrt{(d\xi^2 + d\eta^2)}$ ist der Bogen selber von einem gegebenen Punkte an bis zum Punkte $(\eta\xi)$. Daraus folgt, dass der Bogen der Evolute bis zum Punkte $(\eta\xi)$ gleich ist dem entsprechenden Krümmungshalbmesser. In obiger (als Schema dienender) Figur ist der Bogen $m\alpha$ gleich dem *Radius Curvaturae* $b\alpha \pm C$. Die Constante C bestimmt sich daraus, dass am Anfangspunkte der Evolute der Krümmungshalbmesser gleich $\pm C$ ist. Es ist daher:

$$m\alpha = r_x - r_o.$$

Der Bogen der Evolute ist gleich dem Krümmungshalbmesser für den Punkt x, weniger dem Krümmungshalbmesser für den Punkt $x = 0$.

Lehrsatz 2. Der Krümmungshalbmesser der Curve *tangirt* jederzeit die Evolute. Diess folgt sehr einfach aus den beiden Gleichungen:

$$d\eta = 3dy - \frac{(dx^2 + dy^2)}{(d^2y)^2} d^3y,$$

$$d\xi = -\frac{3dy^2}{dx} + \frac{(dx^2 + dy^2)}{(d^2y)^2} \frac{dy}{dx} d^3y.$$

Multiplicirt man $d\eta$ mit $\frac{dy}{dx}$, so folgt nach gehöriger Reduction:

$$d\eta\, dy + d\xi\, dx = 0.$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Tangente der Evolute senkrecht auf der Tangente der Curve im Punkte (x, y) steht. Der *Radius Curvaturae* steht aber auch senkrecht auf dieser Tangente der Curve; er fällt also mit der Tangente der Evolute zusammen, d. h. er ist selbst die Tangente der Evolute.

Lehrsatz 3. Ist der Krümmungshalbmesser für den Anfangspunkt der gegebenen Curve selber gleich Null, so kann die Curve dargestellt werden, als entstünde sie durch Abwicklung aus ihrer

Evolute. Denn wird für alle Punkte die Länge des Bogens der Evolute in der Richtung ihrer Tangente in eine gerade Linie ausgedehnt, so beschreiben die Endpunkte aller dieser Tangenten die Curve *abg*, welche daher ihrerseits die Evolvente der Evolute genannt wird.

§. 169.

Formel des Krümmungshalbmessers in Polar-Coordinaten.

Die bisherigen Anwendungen haben sich auf die geradlinigen Coordinaten eingeschränkt. Die Anwendungen für Polar-Coordinaten gehen ihnen ganz parallel. Namentlich werden die Gleichungen für die tangirenden Spiralen ganz die nämlichen, wie sie für Tangenten und tangirende Parabeln gefunden worden sind.

Die Durchführung dieses Parallelismus der Formeln der zwei genannten Coordinaten-Systeme ist Sache der analytischen Geometrie. Nur die Formeln für den Krümmungshalbmesser und für die Evoluten sind noch zu geben, da Curven oft einfachere Gleichungen in Polar-Coordinaten, als in geradlinigen Coordinaten haben.

Es ist nämlich der Krümmungshalbmesser:

$$r = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dy\, d^2x_\varphi - dx\, d^2y_\varphi}.$$

Wird nun der Winkel φ als unabhängige Veränderliche genommen, so ist:

$$dx = u \sin\varphi d\varphi - \cos\varphi du,$$
$$dy = \sin\varphi du + u\cos\varphi d\varphi,$$

und durch fernere Differenzirung:

$$d^2x_\varphi = u\cos\varphi d\varphi^2 + 2\sin\varphi d\varphi\, du - \cos\varphi d^2u_\varphi,$$
$$d^2y_\varphi = \sin\varphi d^2u_\varphi + 2\cos\varphi d\varphi\, du - u\sin\varphi d\varphi^2.$$

Durch Multiplication wird [wenn überall $(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = 1$ gesetzt wird]:

$$dy\, d^2x_\varphi - dx\, d^2y_\varphi = u^2 d\varphi^3 + 2\, d\varphi\, (du)^2 - u d\varphi\, d^2u_\varphi.$$

Beim Differenzial des Bogens ist $dx^2 + dy^2 = u^2 d\varphi^2 + du^2$ gefunden worden; es ist daher:

$$r = \frac{\left(u^2 d\varphi^2 + (du)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{u^2 d\varphi^3 + 2 d\varphi\,(du)^2 - u d\varphi\, d^2 u_\varphi}.$$

Eine analoge Formel geht hervor, wenn u statt φ als unabhängig Veränderliche genommen wird.

Werden endlich die gefundenen Werthe in die Formeln der Evoluten und der Evolventen substituirt, so gehen die gesuchten Polar-Gleichungen hervor, deren Herstellung keiner weiteren Schwierigkeit unterliegt.

Cap. XXI.

Die Differenzialien der von Flächen abhängigen Functionen.

§. 170.

Eintheilung dieser Functionen.

Im geradlinigen Coordinaten-Systeme werden die Flächen am einfachsten dadurch bestimmt, dass man drei senkrecht aufeinanderstehende Ebenen, XY, XZ, YZ, nimmt, die einen Punkt 0 gemeinschaftlich haben. Jeder Punkt der Fläche wird durch die Grösse der drei Coordinaten x, y, z bestimmt, die beziehungsweise auf den Ebenen YZ, XZ, XY senkrecht stehen. Besteht zwischen diesen drei Grössen x, y, z eine allgemeine Gleichung, so ist durch sie jeder Punkt der Fläche, also die ganze Fläche selbst bestimmt.

Die senkrechten Coordinaten geben auch hier die volle Allgemeinheit der Formeln. Es ist daher nicht nöthig, zu schiefwinkeligen Coordinaten-Systemen überzugehen, für welche übrigens ganz analoge Formeln, wie für die senkrecht stehenden, gelten.

Wie die Linien, so können auch die Flächen durch Polar-Coordinaten bestimmt werden, nur tritt bei diesen eine Gleichung zwischen dem veränderlichen Radius r und zweien Winkeln v und φ ein. — Da allgemein gültige Transformations-Formeln aus einem Coordinaten-Systeme in das andere hinüberleiten, so werden wir uns darauf beschränken, die aus dem geradlinigen Coordinaten-Systeme gefundenen Resultate für das Polar-Coordinaten-System einfach zu interpretiren. Wollte man die Differenzial-Formeln

genuin aus den Polar-Coordinaten ableiten, so würden weitläufige Untersuchungen über Flächen nothwendig werden, die noch nicht einmal in der analytischen Geometrie in Angriff genommen sind.

Die Aufgabe bei Flächen zerlegt sich nun in folgende Untersuchungen:

a) über die ersten Differenzialien der Coordinaten, und der mit ihnen im Zusammenhange stehenden Normalen und Tangential-Ebenen der Flächen;

b) über die zweiten und höheren Differenzialien der Coordinaten und der mit ihnen im Zusammenhange stehenden tangirenden Flächen zweiter und höherer Ordnung;

c) die Complanation der Flächen und die Cubatur der von den Flächen, oder von Flächen und anderen ebenen Figuren begrenzten Körper.

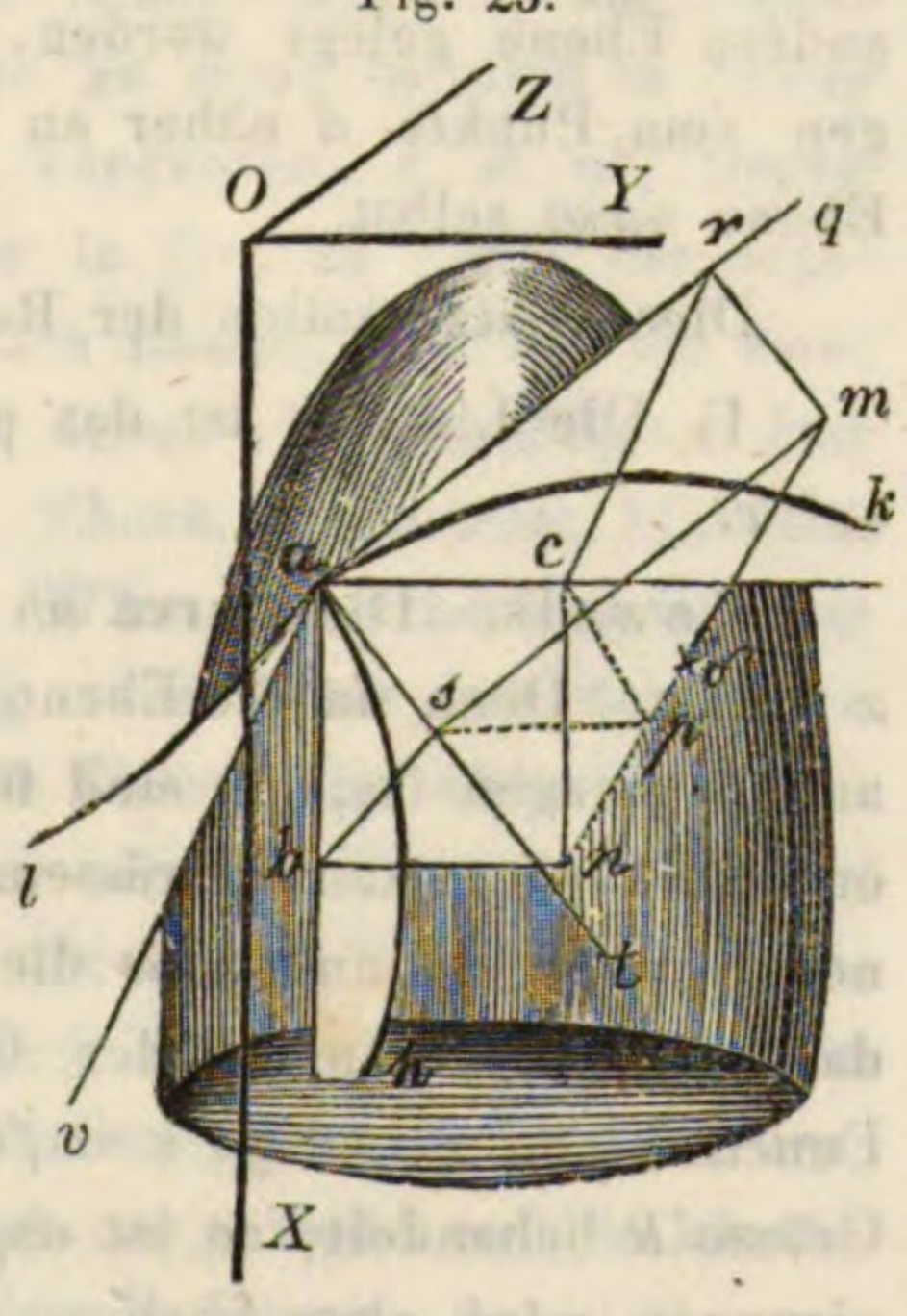
Die Untersuchungen über die Krümmungshalbmesser und die von ihnen bestimmten Evolutions-Flächen gehören zu den Anwendungen und werden bei diesen behandelt werden.

§. 171.

Die ersten Differenzialien der Coordinaten.

Es sei a ein Punkt einer gegebenen Fläche. Wird diese Fläche durch eine mit der Coordinaten-Ebene XZ parallele Ebene durchschnitten, so giebt sie als Durchschnittslinie eine ebene Curve ah, und at sei die Tangente dieser Curve im Punkte a. Wird die Fläche durch eine mit der Coordinaten-Ebene YZ parallele Ebene durchschnitten, so giebt sie als Durchschnittslinie eine ebene Curve ak, und ar sei die Tangente dieser Curve im Punkte a.

Fig. 25.



Wenn die willkührlichen Zunahmen dx und dy einzeln gleich ab und ac genommen, und in der

Ebene *tab* die Linie *bs* senkrecht auf *b*, in der Ebene *rac* die Linie *rc* senkrecht auf *c* gezogen werden, so sind *bs* und *cr* die Verlängerungen der Ordinate *z* bis zu ihren jedesmaligen Tangenten, also (wie aus den ebenen Curven bekannt ist) die ersten Differenzialien der Ordinaten *z*, oder $bs = dz_x$ (in Beziehung auf x), $cr = dz_y$ (in Beziehung auf y), oder $bs = \left|\frac{dz}{dx}\right| dx$; $cr = \left|\frac{dz}{dy}\right| dy$. Beide Linien stehen senkrecht auf der Ebene XY (die man sich als die Ebene des Papiers denken kann), und sind Verlängerungen der ihnen entsprechenden Ordinaten *z*.

Die beiden Tangenten *at* und *ar* können beliebige Winkel miteinander machen. Wird das Parallelogramm *rmsa* zwischen den beiden Tangenten gebildet, und wird vom Punkte *m* aus eine Senkrechte *mn* auf die Ebene XY gezogen, so ist *mn* das ganze erste Differenzial von *z*, oder:

$$mn = \left|\frac{dz}{dx}\right| dx + \left|\frac{dz}{dy}\right| dy = bs + cr.$$

Endlich ist die durch die beiden Tangenten *at* und *ar* gelegte Ebene (von der das Parallelogramm *rmsa* ein Theil ist), die tangirende Ebene der Fläche im Punkte *a*, d. h. die Ebene hat mit der gegebenen Fläche den Punkt *a*, oder (x, y, *z*) gemeinschaftlich, und es kann zwischen ihr und der gegebenen Fläche keine andere Ebene gelegt werden, die in beliebig kleinen Entfernungen vom Punkte *a* näher an der gegebenen Fläche läge, als die Ebene *mrsa* selbst.

Diese Sätze sollen der Reihe nach einzeln bewiesen werden.

1) Die Linie *bs* ist das partielle Differenzial von *z* in Bezug auf x.

Beweis. Die Curve *ah* hat zu ihren Coordinaten die Linien x und *z*. Denn da die Ebene *hab* parallel mit XZ, also senkrecht auf Y gezogen ist, so sind für alle Punkte dieser Curve die Coordinaten y constante Grössen. Nun ist aus der Theorie der ebenen Curven bekannt, dass die Verlängerung zur Tangente oder *bs* das erste Differenzial der Ordinate *z* ist. Wird daher *z* als Function von x und y; $z = f(x, y)$ genommen, und y als constante Grösse k behandelt, so ist $dz_{(y=k)} = bs$. Bei partiellen Differenzirungen wird aber auch y als constant genommen, wenn bloss

nach x differenzirt wird; es ist daher $dz_x = dz_{(y=k)}$, oder $\left|\frac{dz}{dx}\right| dx = bs$. — Ganz auf dieselbe Art wird bewiesen, dass $rc = dz_y = \left|\frac{dz}{dy}\right| dy$ sei.

2) Die Linie mn ist das totale Differenzial von z.

Beweis. Da:

$$mn = np + pm = bs + cr, \text{ und: } bs + cr = dz_x + dz_y,$$

so ist:

$$mn = dz_x + dz_y = dz = \left|\frac{dz}{dx}\right| dx + \left|\frac{dz}{dy}\right| dy,$$

was zu beweisen war.

Zusatz. Ist a der Punkt x, y, z, so ist b der Punkt $(x + dx, y, z)$, c der Punkt $(x, y + dy, z)$, n der Punkt $(x + dx, y + dy, z)$. Wird daher im Punkte n, $(x + dx, y + dy, z)$ eine Linie mn senkrecht errichtet, und so weit verlängert, bis sie die Ebene im Punkte m schneidet, so ist diese Linie mn, die Verlängerung zur Ebene, gleich dz, so gross oder so klein auch dx und dy genommen werden mögen. Der Punkt δ, in welchem die Linie mn die gegebene Fläche durchschneidet, ist der Punkt $(x + dx, y + dy, z + \Delta z)$, und der Punkt m selbst ist der Punkt $(x + dx, y + dy, z + dz)$.

3) Diese Ebene ist die tangirende Ebene der Fläche im Punkte a.

Beweis. Gesetzt, eine andere Ebene E habe die Eigenschaft, tangirende Ebene der Fläche zu sein, so wird in dieser Ebene E nur eine der gefundenen Tangenten, z. B. at, liegen können. Denn lägen zwei Tangenten in ihr, so würde die angenommene Ebene E mit der tangirenden Ebene, mit der sie zwei gerade Linien gemeinschaftlich hätte, selbst zusammenfallen. Der Durchschnitt dieser Ebene mit der Ebene rac müsste also von der Tangente ar verschieden sein. Wäre diese Linie näher an der Curve ak, so wäre sie beliebig nahe bei a, an der Curve näher als die Tangente, was nach der Theorie der ebenen Curven unmöglich ist. Sie ist also entfernter als die Tangente. Daraus folgt, dass die Ebene E selbst von der Fläche im Punkte a entfernter ist, als die Ebene taq, da die Curve ak in der gegebenen Fläche liegt. Es kann daher keine andere Ebene gedacht werden, die zwischen der Fläche und der Ebene taq gezogen werden könnte. Diese Ebene ist also selbst die tangirende Ebene.

Zusatz 1. Es ist einleuchtend, dass man dieselben Resultate erlangen würde, wenn man, statt z als Function von x und y zu nehmen, x als Function von y und z, oder y als Function von x und z nehmen würde. Je zwei Coordinaten haben willkührliche Zunahmen; wenn aber diese gewählt oder beliebig gross genommen sind, so ist die Zunahme der dritten Coordinate veränderlich, und zerlegt sich in die Reihe der Differenzialien. Ihre ganze Zunahme ist die Verlängerung der Ordinate, z. B. z, bis sie die Fläche durchschneidet; das erste Glied dieser Zunahme aber ist ihre Verlängerung, bis sie die tangirende Ebene durchschneidet. — Ausser der geometrischen Bedeutung des ganzen ersten Differenzials haben sich auch die geometrischen Bedeutungen und Grössen der partiellen ersten Differenzialien der Ordinaten herausgestellt.

Zusatz 2. Man findet ganz dieselben Resultate, wenn man die Ordinaten x und y um dx und dy vermindert; also statt der Ordinaten $(x+dx)$ und $(y+dy)$ die Ordinaten $(x-dx)$ und $(y-dy)$ nimmt.

Zusatz 3. Die Sätze, in denen die Differenzialien der Coordinaten der Flächen der Reihe nach bewiesen werden, gelten allgemein, so lange die Flächen allseitig continuirlich bleiben, wie diess bei allgemeinen Beweisen überhaupt vorausgesetzt wird. Die Untersuchungen über die singulären Punkte der Flächen müssen auch singulär geführt werden.

§. 172.

Gleichung der tangirenden Ebene.

Die Gleichung der durch die beiden Tangenten ta und qa gelegten Ebene taq wird auf folgende Art gefunden.

Es sei:

$$(\alpha) \quad A\xi + B\eta + C\zeta = K$$

die Gleichung dieser Ebene; ξ, η, ζ seien ihre Coordinaten. Da diese Ebene durch die drei Punkte a, s, r, oder durch die Punkte $(x,\ y,\ z)$, $(x+dx,\ y,\ z+dz_x)$, $(x,\ y+dy,\ z+dz_y)$ geht, so gelten auch die Gleichungen:

$$\text{(I.)} \quad Ax + By + Cz = K,$$

$$\text{(II.)} \quad A(x+dx) + By + C(z+dz_x) = K,$$

$$\text{(III.)} \quad Ax + B(y+dy) + C(z+dz_y) = K.$$

Die Gleichungen (I.) und (II.) geben:

$$Adx + Cdz_x = 0 \quad \frac{A}{C} = -\frac{dz_x}{dx}.$$

Die Gleichungen (I.) und (III.) geben:

$$Bdy + Cdz_y = 0 \quad \frac{B}{C} = -\frac{dz_y}{dy}.$$

Ist nun $u = 0$ die Coordinaten-Gleichung einer Fläche, so gelten die Gleichungen:

$$\left|\frac{du}{dx}\right| dx + \left|\frac{du}{dz}\right| dz_x = 0, \quad \left|\frac{du}{dy}\right| dy + \left|\frac{du}{dz}\right| dz_y = 0.$$

Es ist aber:

$$\frac{dz_x}{dx} = -\frac{\left|\frac{du}{dx}\right|}{\left|\frac{du}{dz}\right|}; \quad \frac{dz_y}{dy} = -\frac{\left|\frac{du}{dy}\right|}{\left|\frac{du}{dz}\right|},$$

folglich auch:

$$\frac{A}{C} = \frac{\left|\frac{du}{dx}\right|}{\left|\frac{du}{dz}\right|}; \quad \frac{B}{C} = \frac{\left|\frac{du}{dy}\right|}{\left|\frac{du}{dz}\right|}.$$

Da nun die Gleichungen (α) und (I.) die eine Gleichung:

$$\frac{A}{C}(x-\xi) + \frac{B}{C}(y-\eta) + (z-\zeta) = 0$$

geben, so ist die Gleichung der tangirenden Ebene *taq* folgende:

$$\left|\frac{du}{dx}\right|(x-\xi) + \left|\frac{du}{dy}\right|(y-\eta) + \left|\frac{du}{dz}\right|(z-\zeta) = 0.$$

In dieser Gleichung drücken x, y, z den Punkt a aus, zu welchem in der gegebenen Fläche eine tangirende Ebene gezogen werden soll, und ξ, η, ζ drücken die Ordinaten der tangirenden Ebene selbst aus.

Zusatz 1. Aus obiger Gleichung folgt, dass es sehr leicht ist, die tangirende Ebene herzustellen. Man nimmt die gegebene Gleichung der Fläche $u = f(x, y, z) = 0$ und differenzirt sie partiell nach x, nach y und nach z, damit man $\left|\frac{du}{dx}\right|$, $\left|\frac{du}{dy}\right|$ und $\left|\frac{du}{dz}\right|$ erhalte. Diese Ausdrücke verbindet man mit den Factoren $(x-\xi)$, $(y-\eta)$, $(z-\zeta)$, und bildet die Gleichung, wie sie Oben gegeben ist.

Zusatz 2. Ist die Gleichung der Fläche $u = f(x, y, z) = 0$ entwickelt gegeben, so dass man z als Function von x und y darstellen kann, so kann man statt der partiellen Differenzialien $\left|\frac{du}{dx}\right|$ etc. sogleich die partiellen Differenzialien dz_x, dz_y nehmen. Dann wird die Gleichung der tangirenden Ebene:

$$\left|\frac{dz}{dx}\right|(x-\xi) + \left|\frac{dz}{dy}\right|(y-\eta) - (z-\zeta) = 0.$$

Zusatz 3. Wird die Ebene *abcn*, die senkrecht auf Z steht, die also parallel mit XY ist, verlängert, bis sie die Fläche in der Curve *al* durchschneidet, so liegt die Tangente *av* dieser Curve ebenfalls in der Ebene *taq* oder in ihrer Verlängerung.

Beweis. Ein Punkt dieser Tangente ist der Punkt $(x+dx, y+dy_x, z)$. Wenn daher die Gleichung

$$\left|\frac{du}{dx}\right|(x-\xi) + \left|\frac{du}{dy}\right|(y-\eta) + \left|\frac{du}{dz}\right|(z-\zeta) = 0$$

so umgeformt werden kann, dass der Punkt $(x+dx, y+dy_x, z)$ in ihr liegt, so liegt die ganze Tangente *av* in ihr, da jener Punkt wegen der willkührlichen Grösse von dx unzählig viele Punkte der Tangente darstellt.

Wird obige Gleichung der Ebene *taq* in folgende umgeformt:

$$\frac{\left|\frac{du}{dx}\right|}{\left|\frac{du}{dy}\right|}(x-\xi) + \frac{\left|\frac{du}{dz}\right|}{\left|\frac{du}{dy}\right|}(z-\zeta) + y - \eta = 0,$$

so wird sie:

$$-\frac{dy_x}{dx}(x-\xi) - \frac{dy_z}{dz}(z-\zeta) + (y-\eta) = 0.$$

Daraus folgt, dass:

$$\frac{A}{B} = -\frac{dy_x}{dx}, \text{ und } \frac{C}{B} = -\frac{dy_z}{dz},$$

und dass die beiden Gleichungen stattfinden:

$$Adx + Bdy_x = 0, \quad Cdz + Bdy_z = 0.$$

Diese Gleichungen in Verbindung mit der Gleichung (I.) geben:

$$(m) \quad A(x+dx) + B(y+dy_x) + Cz = K,$$

$$(n) \quad Ax + B(y+dy_z) + C(z+dz) = K.$$

Die Gleichung (m) zeigt nun, dass der Punkt $(x + dx, y + dy_x, z)$ in der Ebene *taq* oder in ihrer Verlängerung liegt, was zu beweisen war.

Zusatz 4. In der Ebene *taq* liegen also die drei Tangenten der ebenen Durchschnitts-Curven *ah*, *ak* und *al*; und durch welche zwei dieser Tangenten die Ebene bestimmt werden möge, es erfolgt immer dieselbe Ebene.

§. 173.

Die Normalen der Flächen.

1) Für die Flächen giebt es nicht eine Normal-Ebene, sondern unendlich viele. Denn jede Ebene, die im Punkte *a* auf der Tangenten-Ebene senkrecht steht, ist eine Normal-Ebene. Hingegen giebt es eine Normal-Linie, nämlich diejenige Linie, die im Punkte *a* auf der Tangenten-Ebene senkrecht steht.

Eine Linie im Raume ist die Durchschnitts-Linie zweier Flächen; ihre Gleichung ist durch die zwei Gleichungen der sich durchschneidenden Flächen gegeben. In unserm Falle ist die Normale durch den Durchschnitt zweier Normal-Ebenen gegeben. Es ist gleichgültig, welche der unzählig vielen Normal-Ebenen dazu genommen werden. Man kann die zwei Normal-Ebenen wählen, deren eine durch x und deren andere durch y gelegt ist, und die im Punkte *a* beide senkrecht auf der Tangenten-Ebene stehen. Ihr Durchschnitt giebt die Normale.

Man kann aber auch einfach die Normalen der Durchschnitts-Curven *ah* und *ak* wählen. Diese Normalen repräsentiren Ebenen, die im Punkte *a* auf den entsprechenden Tangenten *at* und *ar* senkrecht stehen. Ihre Durchschnitts-Linie, d. h. das Zusammenbestehen ihrer beiden Gleichungen giebt die Gleichungen der Normale der gegebenen Fläche.

Nun ist die Gleichung der Normale für die Curve *ah*, wie bekannt:

$$(x - \xi)\,dx + (z - \zeta)\,dz_x = 0;$$

und für die Curve *ak* ebenfalls:

$$(y - \eta)\,dy + (z - \zeta)\,dz_y = 0.$$

Diess sind die Gleichungen der Normale einer Fläche.

2) Ist die Gleichung einer Fläche verwickelt gegeben: $u = f(x, y, z) = 0$, so braucht man nicht erst die Gleichung nach z aufzulösen; man kann die verlangten Differenzialien dz_x und dz_y durch die partiellen Differenzialien der gegebenen Gleichung $u = 0$ ersetzen.

Es ist nämlich, wie Oben:

$$\frac{dz_x}{dx} = -\frac{\left|\frac{du}{dx}\right|}{\left|\frac{du}{dz}\right|}; \quad \frac{dz_y}{dy} = -\frac{\left|\frac{du}{dy}\right|}{\left|\frac{du}{dz}\right|},$$

und man erhält als Gleichungen der Normale:

$$(x-\xi)\left|\frac{du}{dz}\right| - (z-\zeta)\left|\frac{du}{dx}\right| = 0,$$

$$(y-\eta)\left|\frac{du}{dz}\right| - (z-\zeta)\left|\frac{du}{dy}\right| = 0,$$

worin x, y, z den Punkt a der gegebenen Fläche, und ξ, η, ζ die Coordinaten der Normalen ausdrücken.

Zusatz. Will man die Winkel α, β, γ bestimmen, welche die Normale mit den Ordinaten x, y, z im Punkte a macht, so finden folgende Gleichungen für diese Winkel statt:

$$(1)\ \left|\frac{dz}{dx}\right| = -\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}, \qquad (2)\ \left|\frac{dz}{dy}\right| = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung der tangirenden Ebene und in die Gleichungen der Normale, so hat man diese in Ausdrücken der Winkel, welche die Normale mit den Coordinaten x, y, z im Punkte a macht.

Will man aber die Winkel α, β, γ durch die Differenzialien der Fläche ausdrücken, so hat man aus den Gleichungen (1), (2) in Verbindung mit der Gleichung (3):

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

die Mittel, die drei unbekannten Grössen α, β, γ zu bestimmen.

Man findet nach gehöriger Reduction:

$$N\cos\alpha = \left|\frac{du}{dx}\right|; \quad N\cos\beta = \left|\frac{du}{dy}\right|; \quad N\cos\gamma = \left|\frac{du}{dz}\right|,$$

worin der Kürze halber das Symbol N statt des Ausdrucks: $\sqrt{\left(\left|\frac{du}{dx}\right|^2 + \left|\frac{du}{dy}\right|^2 + \left|\frac{du}{dz}\right|^2\right)}$ substituirt wurde.

Diese Formel ist einfacher, als wenn man $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ in Ausdrücken von dx, dy, dz_x, dz_y darstellt. Sie verlangt auch nicht die oft unmögliche Auflösung der Gleichung $u = f(x, y, z) = 0$.

Die Formel (in Differenzialien der Ordinaten) wird übrigens durch Substitution:

$$M\cos\alpha = -\frac{dz_x}{dx};\quad M\cos\beta = -\frac{dz_y}{dy};\quad M\cos\gamma = 1,$$

worin das Symbol M statt des Ausdrucks steht:

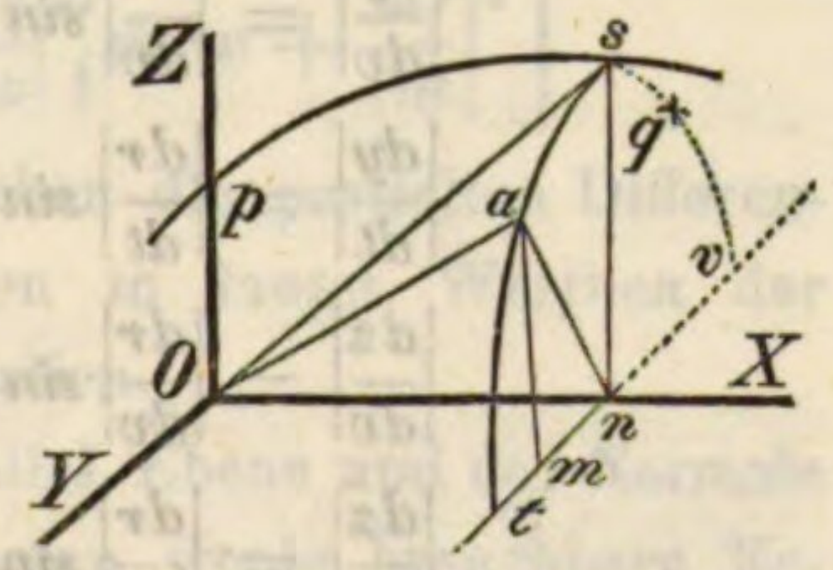
$$\sqrt{\left(\left(\frac{dz_x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz_y}{dy}\right)^2 + 1\right)}.$$

§. 174.

Die vorhergehenden Differenzialien in Ausdrücken von Polar-Coordinaten.

1) Es sei irgend eine Fläche gegeben. Eine Ebene durch ZOX durchschneide sie in der Curve ps. Ein veränderlicher Radius Os, der sich von X gegen Z bewegt, beschreibt alle Punkte dieser Curve ps, und ist eine Function des Winkels $sOn = v$. Wird durch irgend einen Punkt s eine Ebene parallel zu ZOY gelegt, so durchschneidet diese die Fläche in der Curve $tasqv$. Alle Punkte dieser Curve werden durch einen Radius Oa beschrieben, der sich durch die Curve $tasqv$ bewegt. Die Grösse des Radius Oa hängt von dem Winkel ab, den die Ebene Oan mit der Ebene ZOX oder YOX macht. Wir nehmen den letzteren Winkel und bezeichnen ihn durch t. Da die Ebene $tasv$ durch alle Punkte der Curve ps gelegt werden kann, so sind alle Punkte der Fläche Endpunkte des veränderlichen Radius $Oa = r$, der seinerseits eine Function der beiden Winkel v und t ist. Eine Gleichung zwischen r, v, t, $f(r, v, t) = 0$ ist die Polar-Gleichung einer Ebene.

Fig. 26.



2) Um Ausdrücke, die in rechtwinkeligen Coordinaten gegeben sind, in Polar-Coordinaten, und umgekehrt, zu geben, dienen die folgenden Formeln.

Es sei O der Punkt, durch den der Radius sich nach allen Richtungen bewegt, und zugleich der Anfangspunkt der rechtwinkeligen Coordinaten, so ist für jeden Punkt a der Fläche: $On = x$, $mn = y$, $am = z$.

Da On senkrecht auf der Ebene $tasv$ steht, so ist:

$$x = r\cos v, \quad an = r\sin v,$$
$$y = r\sin v\cos t, \quad z = r\sin v\sin t.$$

3) Der Radius r ist eine Function der beiden unabhängig Veränderlichen v und t, und eben so sind x, y, z, da sie durch Gleichungen mit den Grössen r, v, t verbunden sind, Functionen von diesen, wobei wieder v und t als die unabhängig Veränderlichen genommen werden. Demnach gelten die Gleichungen:

$$\left|\frac{dx}{dv}\right| = \left|\frac{dr}{dv}\right| \cos v - r\sin v;$$
$$\left|\frac{dx}{dt}\right| = \left|\frac{dr}{dt}\right| \cos v;$$
$$\left|\frac{dy}{dv}\right| = \left|\frac{dr}{dv}\right| \sin v\cos t + r\cos v\cos t;$$
$$\left|\frac{dy}{dt}\right| = \left|\frac{dr}{dt}\right| \sin v\cos t - r\sin v\sin t;$$
$$\left|\frac{dz}{dv}\right| = \left|\frac{dr}{dv}\right| \sin v\sin t + r\cos v\sin t;$$
$$\left|\frac{dz}{dt}\right| = \left|\frac{dr}{dt}\right| \sin v\sin t + r\sin v\cos t.$$

4) Man braucht die Differenzialien: $\left|\frac{dz}{dx}\right|$ und $\left|\frac{dz}{dy}\right|$, während die obigen Formeln nur $\left|\frac{dz}{dv}\right|$ und $\left|\frac{dz}{dt}\right|$ geben.

Es ist nun, wenn z als Function von x und y, und diese ihrerseits als Functionen von v und t genommen werden:

$$(1)\quad \left|\frac{dz}{dv}\right| = \left|\frac{dz}{dx}\right| \left|\frac{dx}{dv}\right| + \left|\frac{dz}{dy}\right| \left|\frac{dy}{dv}\right|,$$

$$(2)\quad \left|\frac{dz}{dt}\right| = \left|\frac{dz}{dx}\right| \left|\frac{dx}{dt}\right| + \left|\frac{dz}{dy}\right| \left|\frac{dy}{dt}\right|, \text{ etc. etc.}$$

5) Sucht man aus den Gleichungen (1) und (2) die Werthe $\left|\frac{dz}{dx}\right|$ und $\left|\frac{dz}{dy}\right|$, so findet man:

$$\left|\frac{dz}{dx}\right| = \frac{L}{N}, \quad \left|\frac{dz}{dy}\right| = \frac{M}{N},$$

wenn man der Kürze halber setzt:

$$\left|\frac{dz}{dv}\right| \left|\frac{dy}{dt}\right| - \left|\frac{dz}{dt}\right| \left|\frac{dy}{dv}\right| = L,$$

$$\left|\frac{dz}{dt}\right| \left|\frac{dx}{dv}\right| - \left|\frac{dz}{dv}\right| \left|\frac{dy}{dt}\right| = M,$$

$$\left|\frac{dx}{dv}\right| \left|\frac{dy}{dt}\right| - \left|\frac{dx}{dt}\right| \left|\frac{dy}{dv}\right| = N.$$

6) Substituirt man in L, M, N die in Nro. 3 gefundenen Werthe, so ist:

$$L = -r\left(\left|\frac{dr}{dv}\right| \sin v + r\cos v\right)\sin v,$$

$$M = r\left(\left|\frac{dr}{dv}\right| \cos v - r\sin v\right)\sin v\cos t - r\left|\frac{dr}{dt}\right| \sin t,$$

$$N = -r\left(\left|\frac{dr}{dv}\right| \cos v - r\sin v\right)\sin v\sin t - r\left|\frac{dr}{dt}\right| \cos t.$$

Es darf bemerkt werden, dass die Summe der Quadrate von L, M und N in folgende einfache Formel übergeht:

$$L^2 + M^2 + N^2 = r^2\left[\left\{r^2 + \left|\frac{dr}{dv}\right|^2\right\}\sin^2 v + \left|\frac{dr}{dt}\right|^2\right]$$

7) Die vorausgehenden Formeln geben die partiellen Differenzialien der rechtwinkeligen Coordinaten in lauter Werthen der Polar-Coordinaten und ihrer Differenzialien.

8) Für die Gleichungen der Tangential-Ebene und der Normale einer Fläche geben die Polar-Coordinaten wenig brauchbare Resultate. Denn nehmen wir eine dieser Gleichungen, z. B.:

$$y - \eta + (z - \zeta)\left|\frac{dz}{dy}\right| = 0,$$

so kann man wohl $\left|\frac{dz}{dy}\right|$ substituiren, aber wie soll man $(y-\eta)$, $(z-\zeta)$ in einfachen Ausdrücken von Polar-Coordinaten geben? Diess ist der Grund, warum man diesen Gleichungen nicht begegnet, nicht einmal bei ebenen Curven, und ist wohl auch der Grund des ziemlich allgemein verbreiteten Glaubens, dass die Polar-Coordinaten weniger leisten als die rechtwinkeligen Coordinaten. Dieser Glaube ist grundlos; die Polar-Coordinaten leisten das Nämliche, aber nur nicht gerade für die Tangenten, sondern für die Spiralen.

Im Polar-Coordinaten-System kann man die Gleichungen für tangirende Spiralen gerade so einfach darstellen, wie im recht-

winkeligen Coordinaten-System für Tangenten und tangirende Parabeln. Gerade so vertritt die Spiral-Ebene erster Ordnung von der Gleichung: $r = \alpha + \beta v + \gamma t$, in welcher die Veränderlichen v und t die Oben festgestellten Winkel ausdrücken, das Nämliche, was im rechtwinkeligen Coordinaten-System die tangirende Ebene vertritt, und man kann durch sie die partiellen Differenzialien $\left|\frac{dr}{dv}\right| dv$, $\left|\frac{dr}{dt}\right| dt$ unmittelbar construiren und geometrisch interpretiren.

Es würde die Continuität unserer Untersuchungen unterbrechen, wenn wir auf diese, noch nicht einmal von der analytischen Geometrie in Angriff genommenen Flächen, weiter eingehen wollten. Hier genügt diese einfache Bemerkung und die Hinweisung auf die Resultate, die wir für die Polar-Gleichungen der ebenen Curven und der sie tangirenden Spiralen gefunden haben.

§. 175.

Die zweiten Differenzialien der Coordinaten im rechtwinkeligen Coordinaten-System.

1) Damit die zweiten Differenzialien der Coordinaten geometrisch bestimmt werden können, muss eine solche Fläche als bestimmende Fläche gewählt werden, deren ganze Zunahme durch die beiden ersten Differenzialien vollständig gegeben ist.

Diese Fläche ist, wenn z. B. z als Function von x und y genommen wird, allgemein folgende:

$$\text{(I.)} \quad \zeta = \alpha + \beta\xi + \gamma\eta + \delta\xi^2 + \varkappa\xi\eta + \lambda\eta^2.$$

Denn werden ξ und η als die unabhängig Veränderlichen genommen, so ist:

$$\Delta\zeta = d\zeta + \frac{1}{2}d^2\zeta.$$

Die Reihe $\Delta\zeta$ ist also eine endliche Reihe und schliesst sich mit dem zweiten Glied; $\Delta\zeta$ ist eine durch die Fläche selbst gegebene Grösse, indem $\zeta + \Delta\zeta$ die Ordinate ist, die den Ordinaten $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$ entspricht.

Nun ist durch partielle Differenzirung, da $d\xi$ und $d\eta$ constant sind:

$$d\zeta = \left|\frac{d\zeta}{d\xi}\right| d\xi + \left|\frac{d\zeta}{d\eta}\right| d\eta,$$

$$d^2\zeta = \left|\frac{d^2\zeta}{d\xi^2}\right| d\xi^2 + \left|\frac{2\,d^2\zeta}{d\xi\,d\eta}\right| d\xi\,d\eta + \left|\frac{d^2\zeta}{d\eta^2}\right| d\eta^2.$$

2) Sind die Ordinaten der gegebenen Fläche x, y, z, so hat die Fläche (I.) mit der gegebenen Fläche einen Punkt gemeinschaftlich, wenn $\xi = x$, $\eta = y$, $\zeta = z$ ist. Sie hat überdiess die tangirende Ebene mit ihr gemeinschaftlich, wenn $\left|\frac{d\zeta}{d\xi}\right| = \left|\frac{dz}{dx}\right|$, $\left|\frac{d\zeta}{d\eta}\right| = \left|\frac{dz}{dy}\right|$ ist, und sie ist endlich selbst die tangirende Fläche zweiter Ordnung, wenn $\left|\frac{d^2\zeta}{d\xi^2}\right| = \left|\frac{d^2z}{dx^2}\right|$, $\left|\frac{d^2\zeta}{d\xi\,d\eta}\right| = \left|\frac{d^2z}{dx\,dy}\right|$, $\left|\frac{d^2\zeta}{d\eta^2}\right| = \left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|$ ist.

3) Da $\frac{1}{2}d^2\zeta = \Delta\zeta - d\zeta$ ist, und $\Delta\zeta$ durch die tangirende Fläche zweiter Ordnung und $d\zeta$ durch die tangirende Ebene gegeben ist, so ist auch $\frac{1}{2}d^2\zeta$ gegeben. Daraus leitet sich die geometrische Interpretation von $\frac{1}{2}d^2z$ ab.

4) Die Differenzialien $\left|\frac{d^2z}{dx^2}\right|$ und $\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|$ sind aus den tangirenden Parabeln zweiter Ordnung gegeben. Es repräsentiren nämlich d^2z_x und d^2z_y die zweiten Differenzialien der Ordinaten der ebenen Curven, die entstehen, wenn die gegebene Fläche im Punkte x, y, z durch Ebenen geschnitten werden, die senkrecht auf y und senkrecht auf x stehen. Es bleibt daher zur Bestimmung von $\left|\frac{d^2z}{dx\,dy}\right|$ die Gleichung:

$$\left|\frac{2d^2z}{dx\,dy}\right| dx\,dy = d^2z - \left(\left|\frac{d^2z}{dx^2}\right| dx^2 + \left|\frac{d^2z}{dy^2}\right| dy^2\right).$$

In dieser Gleichung ist $\left|\frac{d^2z}{dx\,dy}\right| dx\,dy$ vollkommen bestimmt, da die geometrischen Grössen rechts des Gleichheitszeichens sämmtlich gegeben sind.

5) Die Gleichung der tangirenden Fläche zweiter Ordnung wird am einfachsten durch folgende Formel ausgedrückt.

Es ist für sie:

$$z + \Delta z = z + \left|\frac{dz}{dx}\right| dx + \left|\frac{dz}{dy}\right| dy +$$
$$+ \frac{1}{2}\left|\frac{d^2z}{dx^2}\right| dx^2 + \left|\frac{d^2z}{dx\,dy}\right| dx\,dy + \frac{1}{2}\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right| dy^2.$$

Wird nun, da dx und dy jede beliebige noch so grosse Linie ausdrücken können, $x+dx=\xi$, $y+dy=\eta$ gesetzt, so dass $z+\Delta z$ in ζ übergeht, wodurch die für alle Punkte gültigen und allgemeinen Ordinaten der tangirenden Fläche zweiter Ordnung ausgedrückt werden, so folgt aus den Substitutionen: $dx=\xi-x$, $dy=\eta-y$, $\Delta z=\zeta-z$ die Gleichung:

$$\zeta-z=\left|\frac{dz}{dx}\right|(\xi-x)+\left|\frac{dz}{dy}\right|(\eta-y)+$$
$$+\frac{1}{2}\left|\frac{d^2z}{dx^2}\right|(\xi-x)^2+\left|\frac{d^2z}{dxdy}\right|(\xi-x)(\eta-y)+\frac{1}{2}\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|(\eta-y)^2.$$

6) Zieht man es vor, die tangirende Fläche zweiter Ordnung nach ξ, η, ξ^2, $\xi\eta$, η^2 geordnet zu erhalten, so ist:

$$\zeta=\alpha+\beta\xi+\gamma\eta+\delta\xi^2+\varkappa\xi\eta+\lambda\eta^2.$$

Die sechs Constanten α, β, γ, δ, $\varkappa$, λ werden durch die sechs Gleichungen bestimmt:

$$\left|\frac{d^2z}{dx^2}\right|=2\delta;\quad \left|\frac{d^2z}{dxdy}\right|=\varkappa;\quad \left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|=2\lambda;$$
$$\left|\frac{dz}{dx}\right|=\beta+2\delta x+\varkappa y;\quad \left|\frac{dz}{dy}\right|=\gamma+\varkappa x+2\lambda y;$$
$$z=\alpha+\beta x+\gamma y+\delta x^2+\varkappa xy+\lambda y^2.$$

Diese sechs Gleichungen bestimmen die Constanten, und es wird:

$$\zeta=\left(z-\left|\frac{dz}{dx}\right|x-\left|\frac{dz}{dy}\right|y+\frac{1}{2}\left|\frac{d^2z}{dx^2}\right|x^2+\left|\frac{d^2z}{dxdy}\right|xy+\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|y^2\right)+$$
$$+\left(\left|\frac{dz}{dx}\right|-\left|\frac{d^2z}{dxdy}\right|y-\left|\frac{d^2z}{dx^2}\right|x\right)\xi+\left(\left|\frac{dz}{dy}\right|-\left|\frac{d^2z}{dxdy}\right|x-\left|\frac{d^2z}{dx^2}\right|y\right)\eta+$$
$$+\frac{1}{2}\left|\frac{d^2z}{dx^2}\right|\xi^2+\left|\frac{d^2z}{dxdy}\right|\xi\eta+\frac{1}{2}\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|\eta^2.$$

Zusatz 1. Würden statt z die Ordinaten x oder y als die abhängig Veränderlichen genommen, so würde die tangirende Fläche zweiter Ordnung auf dieselbe Art gefunden, wie sie für $z=f(x, y)$ gefunden wurde. Es würde auch ganz dieselbe Fläche gefunden werden, denn diese ist immer dieselbe, welche der Coordinaten als abhängig oder als unabhängig veränderlich genommen werden möge.

Zusatz 2. Ganz auf dieselbe Art werden die dritten und höhern Differenzialien der Ordinate z bestimmt, und es finden sich

dabei keine andern als die in der Weitläuftigkeit der Formeln liegenden Schwierigkeiten.

Die Gleichungen dieser tangirenden Flächen sind:

$$\zeta = \alpha + \beta x + \ldots + \varrho x^3 + \sigma x^2 y + \tau x y^2 + \omega y^3;$$
$$\zeta = \alpha + \beta x + \ldots + \varrho x^\nu + \sigma x^{\nu-1} y + \ldots + \tau x y^{\nu-1} + \omega y^\nu.$$

Zusatz 3. Es hat auch keine weitere Schwierigkeit, die höheren Differenzialien der Ordinaten der Flächen nach dem Polar-System der Ordinaten auszudrücken, da die Uebersetzungsformeln aus dem einen Systeme in das andere allgemein gegeben sind. Die Formeln und die geometrischen Interpretationen derselben werden complicirt. Der Grund davon liegt aber, wie Oben bemerkt wurde, nicht in den Polar-Coordinaten, sondern darin, dass man sie mit Ebenen und parabolischen Flächen vergleicht, während sie, wenn sie mit Spiral-Flächen verglichen werden, wie es ihr Wesen verlangt, gerade so einfache Resultate liefern, wie die geradlinigen Coordinaten. Die Formeln werden sogar die nämlichen, und es wird nur ihre geometrische Interpretation eine andere.

§. 176.

Ueber die Eigenschaften der tangirenden Flächen zweiter Ordnung.

Bei den ebenen Curven haben wir nur eine tangirende Curve zweiter Ordnung gefunden, nämlich die Apollonische Parabel; bei den Flächen wird sich ein anderes Resultat ergeben. Die allgemeine Gleichung der tangirenden Flächen zweiter Ordnung giebt Flächen, die ihrer Gestalt nach wesentlich von einander verschieden sind, wie die nachfolgende Untersuchung zeigt.

Vereinfacht man die Gleichung:

$$z = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varkappa x y + \lambda y^2,$$

indem man die Coordinaten-Axe in der Ebene XY um den Winkel φ verändert, und $x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi$; $y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi$ substituirt, worin x' und y' die der veränderten Axe entsprechenden rechtwinkeligen Coordinaten ausdrücken, so erhält man:

$$\begin{aligned} z = \alpha &+ (\beta\cos\varphi + \gamma\sin\varphi)x' + (\gamma\cos\varphi - \beta\sin\varphi)y' + \\ &+ (\delta\cos^2\varphi + \varkappa\cos\varphi\sin\varphi + \lambda\sin^2\varphi)x'^2 + \\ &+ (2\lambda\sin\varphi\cos\varphi - \varkappa[\sin^2\varphi - \cos^2\varphi] - 2\delta\cos\varphi\sin\varphi)x'y' + \\ &+ (\delta\sin^2\varphi - \varkappa\sin\varphi\cos\varphi + \lambda\cos^2\varphi)y'^2. \end{aligned}$$

Bestimmt man den Werth von φ in der Art, dass das Glied von $x'y'$ wegfällt, so wird:

$$2\frac{(\lambda-\delta)}{\varkappa} = \frac{\sin^2\varphi - \cos^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{\cos 2\varphi}{\frac{1}{2}\sin 2\varphi}, \quad \text{und:} \quad \frac{\varkappa}{\lambda-\delta} = tang\, 2\varphi,$$

ein Ausdruck, der immer einen reellen Werth von φ giebt, so dass es immer möglich ist, das Glied mit $x'y'$ verschwinden zu machen.

Bezeichnet man die Coefficienten von x', y', x'^2, y'^2, mit B, C, D, K, so erhält man:

$$z = \alpha + Bx' + Cy' + Dx'^2 + Ky'^2.$$

In dieser Gleichung sind drei Fälle zu unterscheiden:

1) Die beiden Coefficienten D und K sind von Null verschieden.
2) Einer dieser Coefficienten ist gleich Null.
3) Die beiden Coefficienten sind gleich Null.

ad 1) Sind die beiden Coefficienten D und K von Null verschieden, so verändert man, um die Gleichung zu vereinfachen, den Anfangspunkt der Coordinaten in der Ebene $x'y'$, indem man $x' = x'' + a$, $y' = y'' + b$ setzt, und man erhält:

$$z = (a + Ba + Cb + Da^2 + Kb^2) + (B + 2Da)x'' + \\ + (C + 2Kb)y'' + Dx''^2 + Ky''^2.$$

Bestimmt man die willkührlichen Grössen a und b so, dass $a = -\frac{B}{2D}$, $b = -\frac{C}{2K}$ wird, so fallen die Glieder mit x'' und y'' aus, und man erhält, wenn die Summe der Constanten gleich S gesetzt wird:

$$z = S + Dx''^2 + Ky''^2.$$

Setzt man $z = z' + S$, indem man den Anfangspunkt der Coordinate z verändert, so erhält man die einfache Gleichung:

$$z' = Dx''^2 + Ky''^2,$$

welche zwei verschiedene Gleichungen giebt, je nachdem die Coefficienten D und K gleiche oder verschiedene Zeichen haben; so dass die Gleichungen stattfinden:

$$z' = Dx''^2 + Ky''^2, \quad z' = Dx''^2 - Ky''^2.$$

ad 2) Ist einer der Coefficienten D, K gleich Null, so sei $D = 0$, und die frühere Gleichung geht in folgende über:

$$z = \alpha + Bx' + Cy' + Ky'^2.$$

Schafft man das Glied mit y' weg, indem man $y' = y'' + b$ und $b = -\frac{C}{2K}$ setzt, so erhält man:

$$z = (\alpha + Cb + Kb^2) + Bx' + Ky''^2.$$

Und wird $z = z' + (\alpha + Cb + Kb^2)$ gesetzt, so folgt:

$$z' = Bx' + Ky''^2.$$

ad 3) Sind die beiden Coefficienten B und K gleich Null, so geht die Gleichung in folgende über:

$$z = \alpha + Bx' + Cy',$$

welches die Gleichung einer Ebene ist. Diese kann jedoch nur singulär eintreten, wie z. B. auch die gerade Linie im Inflexionspunkt einer Curve singulär statt der Parabel zweiter Ordnung eintritt.

Die tangirende Fläche zweiter Ordnung:

$$z = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varkappa xy + \lambda y^2,$$

kann daher vier, und, wenn wir den singulären Fall, dass sie eine Ebene ist, ausschliessen, drei verschiedene Gestalten annehmen, deren Gleichungen folgende sind:

(I.) $z' = Dx''^2 + Ky''^2$,

(II.) $z' = Dx''^2 - Ky''^2$,

(III.) $z' = Bx' + Ky''^2$.

1) Die Gleichung (I.), in welcher D und K einerlei Zeichen haben, giebt eine Fläche, deren Gestalt aus einigen Parallelschnitten leicht erkannt wird.

Wird sie durch eine auf der Ordinate z senkrechte Ebene durchschnitten, so ist die Durchschnitts-Curve eine *Ellipse,* weil z' constant wird. Diese Fläche wird daher in allen auf die Ordinate z senkrechten Durchschnitten in Ellipsen (in Kreisen, wenn $D = K$) durchschnitten.

Durchschnitte hingegen, die auf x'' oder y'' senkrecht sind, geben Apollonische Parabeln zu Durchschnitts-Curven. Beide Parabeln sind congruent, wenn $D = K$. Die Fläche (I.) ist daher ein *elliptisches Paraboloid,* und geht für $D = K$ in ein Rotations-Paraboloid über, wodurch die Gestalt der Fläche (I.) hinlänglich charakterisirt ist.

2) Die Gleichung (II.), in welcher die Coefficienten D und K verschiedene Zeichen haben, giebt eine Fläche von folgender

Gestalt: Wird sie durch eine auf die Ordinate z senkrechte Ebene durchschnitten, so ist die Durchschnitts-Curve eine Hyperbel, und alle auf z senkrechten Durchschnitte geben Hyperbeln, weil $z' = K$ constant wird, und $K = Dx'^2 - Ky''^2$ die Gleichung einer Hyperbel ist. Hingegen geben alle auf x'' oder y'' senkrechten Durchschnitte Apollonische Parabeln.

Die Fläche (II.) ist daher ein *hyperbolisches Paraboloid.*

3) Die Fläche (III.) hat folgende Gestalt: Ist z' constant, werden also die Durchschnitte auf die Ordinate z senkrecht geführt, so giebt die Gleichung $z' = Bx' + Ky''^2$ eine Apollonische Parabel. Ist x' constant, sind die Durchschnitte auf x' senkrecht, so giebt jene Gleichung wieder eine Apollonische Parabel; ist endlich y'' constant, also $Ky''^2 = A$, oder werden die Durchschnitte auf y'' senkrecht geführt, so giebt jene Gleichung eine gerade Linie; und alle auf y'' senkrechten Durchschnitte geben gerade Linien, die unter sich parallel sind, da die Coefficienten von z' und x' in der Gleichung $z' = Bx' + A$ constant, und von dem jedesmaligen Werthe y'' unabhängig sind. Diess ist die Eigenschaft der cylindrischen Flächen. Die Fläche (III.) ist daher ein *parabolischer Cylinder.* Der besondere Fall, dass in der Gleichung (III.) der Coefficient $B = 0$ wird, wodurch $z' = Ky''^2$ wird, ändert nichts in der Gestalt dieser Fläche; die cylindrische Seitenfläche wird nur mit der Axe x' parallel.

Wir schliessen mit dem Resultate, dass die tangirende Fläche zweiter Ordnung nur in den drei Gestalten: eines *parabolischen Cylinders,* eines *hyperbolischen Paraboloids* und eines *elliptischen Paraboloids,* und nicht in anderen Gestalten erscheinen könne. Es theilen sich daher sämmtliche Flächen in Bezug auf ihre tangirenden Flächen zweiter Ordnung in die vier Abtheilungen:

1) Ebenen, 2) Flächen, deren tangirende Fläche zweiter Ordnung parabolische Cylinder, 3) Flächen, deren tangirende Flächen zweiter Ordnung hyperbolische Paraboloide, 4) Flächen, deren tangirende Flächen zweiter Ordnung elliptische Paraboloide sind. Dadurch stellt sich uns die Aufgabe dar, die Eigenschaften und die algebraischen Kennzeichen dieser vier grossen Abtheilungen der Flächen zu bestimmen.

Wir schlagen folgenden Weg ein: Wenn eine Fläche zu den geradlinigen krummen Flächen gehört, d. h. wenn durch jeden

ihrer Punkte eine gerade Linie gezogen werden kann, die ganz in ihr liegt, so muss auch die tangirende Ebene dieses Punktes die gerade Linie mit der Fläche gemeinschaftlich haben. Denn da alle Tangenten der Durchschnitts-Curven in der tangirenden Ebene liegen, und die Durchschnitts-Curve einer geradlinigen krummen Fläche in einer bestimmten Richtung die gerade Linie selbst ist, die ihre eigene Tangente ist, so muss diese gerade Linie selbst in der tangirenden Ebene liegen.

Wird nun z als Function von x und y genommen, und werden dx und dy als willkührliche und unabhängig Veränderliche so bestimmt, dass die polare Ebene, die durch die Coordinate z, also senkrecht auf die Ebene XY und durch den Punkt $(x+dx, y+dy, z)$ gelegt wird, die gegebene Fläche in der geraden Linie, die in ihr durch den Punkt (x, y, z) gezogen werden kann, durchschneidet (was immer möglich ist, da dx und dy beliebig grosse oder kleine, von einander unabhängige Werthe haben, und da durch die verschiedenen Werthe von dx und dy alle möglichen Winkel um die Coordinate z herum bestimmt werden), so ist die ganze Zunahme von z oder Δz gleich dem ersten Differenzial dz, da Δz die Verlängerung zur Fläche, dz die Verlängerung zur tangirenden Ebene ist, die aber in der geraden Linie, welche die Fläche und ihre tangirende Ebene gemeinschaftlich haben, zusammenfallen, so dass Δz und dz dieselben geraden Linien darstellen.

Ist aber $\Delta z = dz$, dann ist nothwendig die Summe aller höheren Differenzialien von z gleich Null, da

$$\Delta z = dz + \frac{1}{2}d^2z + \frac{1}{2.3}d^3z + \ldots; \quad \Delta z - dz = 0;$$

also:
$$\frac{1}{2}d^2z + \frac{1}{2.3}d^3z + \ldots = 0.$$

Da in dieser Reihe für beliebig kleine Werthe von dx und dy jedes vorhergehende Glied grösser bleibt, als die Summe aller nachfolgenden Glieder, so folgt, dass einzeln $d^2z = 0$, $d^3z = 0$, und dass überhaupt alle höheren Differenzialien einzeln gleich Null sind. Werden diese Differenzialien in partielle Differenzialien zerlegt, so gehen die Gleichungen hervor:

$$\Delta z = \left|\frac{dz}{dx}\right| dx + \left|\frac{dz}{dy}\right|;$$

$$\left|\frac{d^2z}{dx^2}\right| dx^2 + 2\left|\frac{d^2z}{dx\,dy}\right| dx\,dy + \left|\frac{d^2z}{dy^2}\right| dy^2 = 0;$$

$$\left|\frac{d^3z}{dx^3}\right| dx^3 + 3\left|\frac{d^3z}{dx^2\,dy}\right| dx^2\,dy + 3\left|\frac{d^3z}{dx\,dy^2}\right| dx\,dy^2 + \left|\frac{d^3z}{dy^3}\right| dy^3 = 0;$$

u. s. w.

Nimmt man die zweite dieser Gleichungen und ordnet sie nach $\frac{dy}{dx}$, so erhält man:

$$\left|\frac{d^2z}{dx^2}\right| + 2\left|\frac{d^2z}{dx\,dy}\right|\frac{dy}{dx} + \left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|\frac{dy^2}{dx^2} = 0.$$

Löst man sie auf, so wird:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{\left|\frac{d^2z}{dx\,dy}\right|}{\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|} = \pm \frac{\sqrt{\left|\frac{d^2z}{dx\,dy}\right|^2 - \left|\frac{d^2z}{dx^2}\right|\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|}}{\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|}.$$

Dieser Gleichung entspricht für den Fall, dass $\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right| = 0$ wird, die andere Gleichung:

$$\frac{dx}{dy} + \frac{\left|\frac{d^2z}{dx\,dy}\right|}{\left|\frac{d^2z}{dx^2}\right|} = \pm \frac{\sqrt{\left|\frac{d^2z}{dx\,dy}\right|^2 - \left|\frac{d^2z}{dx^2}\right|\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|}}{\left|\frac{d^2z}{dx^2}\right|}.$$

Diese Gleichungen geben folgende vier verschiedene Fälle:

1) Es sind $\left|\frac{d^2z}{dx\,dy}\right|$, $\left|\frac{d^2z}{dx^2}\right|$, $\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|$ einzeln gleich Null; dann ist $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, eben so $\frac{dx}{dy} = \frac{0}{0}$; die Richtung, in welcher die Fläche durch Ebenen durchschnitten werden muss, dass sie eine gerade Linie als Durchschnitts-Curve gebe, ist unbestimmt; sie giebt in unzählig vielen Richtungen gerade Linien als Durchschnitts-Curven, d. h. sie ist selbst eine Ebene.

2) Die Grösse unter dem Wurzelzeichen ist negativ, oder $\left|\frac{d^2z}{dx^2}\right| \cdot \left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|$ ist grösser als $\left|\frac{d^2z}{dx\,dy}\right|^2$, und dann haben $\frac{dy}{dx}$ oder $\frac{dx}{dy}$ keinen reellen Werth, d. h. die Fläche kann in keiner Richtung durch eine Ebene so geschnitten werden, dass sie gerade Linien als Durchschnitts-Curven gäbe; die Fläche gehört also nicht zu

den geradlinigen krummen Flächen, sondern zu den sogenannten concav-concaven, oder convex-convexen Flächen.

3) Die Grösse unter dem Wurzelzeichen ist gleich Null; dann haben $\frac{dy}{dx}$ oder $\frac{dx}{dy}$ nur einen einzigen Werth; die Flächen können in jedem Punkte *nur nach einer Richtung* durch Ebenen in geraden Linien geschnitten werden. Diess sind die *developpablen* Flächen.

4) Die Grösse unter dem Wurzelzeichen ist positiv, oder $\left|\frac{d^2z}{dx^2}\right| . \left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|$ ist kleiner als $\left|\frac{d^2z}{dxdy}\right|^2$; die Grösse $\frac{dy}{dx}$ $\left(\text{oder } \frac{dx}{dy}\right)$ hat zwei verschiedene Werthe. Da aber eine krumme Fläche allgemein in jedem Punkte nur nach einer Richtung in geraden Linien durchschnitten werden kann, so wird einer der Werthe $\frac{dy}{dx}$ diese Richtung selbst, der andere singulär eine gerade Linie, und allgemein die Richtung angeben, in welcher die Durchschnitts-Curve der Fläche eine Curve ist, die in ihrem Durchschnitt mit der geraden Linie einen *Inflexionspunkt* hat; denn auch in diesem Falle wird singulär $d^2z = 0$. Diese Flächen werden wir als die *windschiefen* (gewunden-schiefen) Flächen kennen lernen. Oder die beiden Werthe von $\frac{dy}{dx}$, welche d^2z zu Null machen, geben statt der geraden Linien nur Curven, die in diesen Punkten einen Inflexionspunkt haben, so dass diese Flächen in jedem ihrer Punkte nach zwei Richtungen von Curven mit Inflexionspunkten durchschnitten werden können, und diess sind die sogenannten convex-concaven, oder concav-convexen Flächen, wie z. B. eine Becher-Fläche, die durch die Rotation eines Halbkreises entsteht, der seine convexe Seite der Rotations-Axe zuwendet.

Diese vier Abtheilungen der Flächen entsprechen ganz genau den vier Abtheilungen, die wir früher aus den Eigenschaften der tangirenden Flächen zweiter Ordnung gefunden haben. Die Ebenen sind in beiden Fällen dieselben, und für die übrigen Abtheilungen gilt der *Lehrsatz:* dass die concav-concaven Flächen *elliptische Paraboloide* zu tangirenden Flächen zweiter Ordnung haben, dass die *developpablen* Flächen *parabolische Cylinder,* und dass endlich die *windschiefen* und convex-concaven Flächen *hyperbolische Paraboloide* zu tangirenden Flächen zweiter Ordnung haben. Dabei ist

zu bemerken, dass die elliptischen Paraboloide selbst concav-concave Flächen sind, dass die parabolischen Cylinder selbst developpable Flächen, und dass die hyperbolischen Paraboloide selbst windschiefe Flächen sind, so dass zwischen den beiderseitigen vier Abtheilungen der Flächen die vollkommenste Uebereinstimmung herrscht.

Zusatz 1. Soll eine Fläche nur nach einer Richtung in einer geraden Linie durchschnitten werden können, so muss $\frac{dy}{dx}$ nur einen Werth haben. Da aber allgemein $\frac{dy}{dx}$ zwei Werthe hat,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left|\frac{d^2z}{dxdy}\right|}{\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|} = \pm\frac{\sqrt{\left(\left|\frac{d^2z}{dxdy}\right|^2 - \left|\frac{d^2z}{dx^2}\right|\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|\right)}}{\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|},$$

so muss für diesen Fall die Grösse unter dem Wurzelzeichen verschwinden, weil dann

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left|\frac{d^2z}{dxdy}\right|}{\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|}$$

wird, und nur einen Werth hat.

Es ist daher die Gleichung:

$$\left|\frac{d^2z}{dxdy}\right|^2 - \left|\frac{d^2z}{dx^2}\right|\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right| = 0$$

das Criterium für die developpablen Flächen, unter welche man die cylindrischen, conischen und evolutorischen Flächen subsumirt.

Zusatz 2. Hat $\frac{dy}{dx}$ zwei reelle Werthe, die beide das Differenzial d^2z zu Null machen, so sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Erster Fall: Ein Werth von $\frac{dy}{dx}$ giebt eine gerade Linie und der andere eine Durchschnitts-Curve mit einem Inflexionspunkte, was die Eigenschaft der windschiefen Flächen ist. Die beiden Werthe unterscheidet man, wenn man sie in das dritte Differenzial d^3z substituirt. Der Werth $\frac{dy}{dx}$, welcher der geraden Linie entspricht, macht d^3z zu Null, während der zweite Werth von $\frac{dy}{dx}$ diess Differenzial nicht zu Null macht.

Zweiter Fall: Beide Werthe von $\frac{dy}{dx}$ machen, in d^3z substituirt, diess Differenzial nicht zu Null. Der singuläre Fall $d^2z = 0$ rührt also von den Inflexionspunkten der Durchschnitts-Curven her.

Die Flächen, welche diese Eigenschaft haben, werden, wie bekannt, convex-concave oder concav-convexe Flächen genannt.

Zusatz 3. Wir haben durch die tangirenden Flächen zweiter Ordnung eine apriorische und rationale Eintheilung der Flächen: in Ebenen, in developpable Flächen, in windschiefe Flächen und in doppelt krumme Flächen, wie wir diejenigen Flächen nennen wollen, die nicht zu den geradlinigen krummen Flächen gehören.

Es ist eine merkwürdige Thatsache, dass die vier ebenen Curven zweiter Ordnung, die gerade Linie, die Parabel, die Hyperbel und die Ellipse, vier Abtheilungen der krummen Flächen bestimmen, die nicht bloss für Flächen der zweiten Ordnung, sondern für Flächen jeder Ordnung, sie mögen algebraisch oder transcendent sein, gültig bleiben. — Da die tangirenden Flächen dritter, vierter und höherer Ordnung fernere natürliche Unterabtheilungen aller Flächen geben, so wird durch diese tangirenden Flächen ein naturgemässes und für alle Fälle ausreichendes Eintheilungsprincip aller übrigen Flächen aufgestellt. Diese ferneren Unterabtheilungen der Flächen überschreiten die Grenzen der gegenwärtigen Untersuchung.

Cap. XXII.

Die Formeln für Complanation und Cubatur.

§. 177.

Ueber die Complanation der Flächen.

1) Bei den bisherigen Untersuchungen haben sich für alle Functionen schon die ersten Differenzialien als allgemeine Ausdrücke ergeben, d. h. als solche, die unabhängig von gegebenen, bestimmten Curven oder Flächen gelten. Bei der Complanation wird sich aber das Resultat herausstellen, dass man zum zweiten, oder wenigstens zu einem Theile des zweiten Differenzials fortgehen müsse, um allgemeine, für alle Flächen gültige Formeln aufstellen zu können, so dass, wenn S die gesuchte Function der Fläche, und ΔS die ganze Zunahme für beliebige Werthe von dx und dy ist, weder dS noch die partiellen Differenzialien $\left|\frac{dS}{dx}\right| dx$, $\left|\frac{dS}{dy}\right| dy$, sondern erst d^2S, oder wenigstens ein partielles Differenzial $\left|\frac{d^2S}{dx^2}\right| dx^2$, $\left|\frac{d^2S}{dy^2}\right| dy^2$, $\left|\frac{d^2S}{dx\,dy}\right| dx\,dy$ als allgemeines Element der Complanation aufgestellt werden kann.

2) Zwar giebt es Flächen, die schon im ersten Differenzial eine allgemeine Complanations-Formel geben, so wie es auch eine Fläche, nämlich die Ebene giebt, die eine von Differenzialien unabhängige Complanations-Formel hat. Jene Flächen, die schon im ersten Differenzial eine allgemeine Complanations-Formel geben, sind die cylindrischen und die Rotations-Flächen, von denen die ersteren die Eigenschaft haben, dass sie in allen Punkten in geraden und unter sich parallelen Linien geschnitten werden,

während die letzteren in allen ihren Axenschnitten congruente Curven und in allen ihren senkrecht auf die Axe geführten Schnitten Kreise geben. Diese ausgezeichneten Eigenschaften geben die nöthigen Anhaltspunkte zur Herstellung einer Complanations-Formel, die nur erste Differenzialien enthält.

3) Aber bei den übrigen Flächen ist diess nicht der Fall. Diess lässt sich schon a priori einsehen. Es sind zwei unabhängige Coordinaten x und y gegeben, während die dritte Ordinate z von beiden abhängig ist. Welche von den Ordinaten x und y hat den Vorzug, dass man einen Querschnitt senkrecht auf x oder senkrecht auf y führen, und entweder x um dx oder y um dy vermehren soll? Da x und y von einander ganz unabhängig sind, so ist einleuchtend, dass erst das Differenzial $\left|\frac{d^2S}{dx\,dy}\right| dx\,dy$ eine Formel geben könne, die allgemein gilt, d. h. die keinerlei Bestimmtheit und Abhängigkeit der Grössen x und y voraussetzt.

4) Denken wir uns eine Fläche S senkrecht auf x durchschnitten. Ihr Inhalt soll von $x=a$, $y=b$ bis $x=x$, $y=y$ bestimmt werden. Vermehren wir x um dx, d. h. differenziren wir partiell nach x, so entsteht eine Zunahme ΔS_x, die bei den Rotations-Flächen eine Zone, bei den allgemeinen Flächen ein bandförmiger Streifen von der senkrechten Höhe dx ist, und welcher durchaus gleiche Werthe von y hat, weil bei der partiellen Differenzirung die Ordinate y als constant genommen wird. Unten und Oben wird er von zwei Curven begrenzt, welche von den Querschnitten durch x und durch $x+dx$ abhängig sind.

Es lässt sich auch ohne Figur mit aller Klarheit einsehen, dass diese bandförmige Fläche ihrem Werthe nach zwischen zwei geradlinig krummen Flächen A und B liegt, die einerseits durch die entsprechenden Tangenten und andrerseits durch die entsprechenden Sehnen bestimmt werden, gerade so, wie die Zunahme des Bogens zwischen der Tangente, $\sqrt{dx^2+dz^2}$, und der Sehne, $\sqrt{dx^2+\Delta z^2}$, liegt. Diese beiden Flächen A und B sind geradlinig krumme Flächen (bei Rotations-Flächen, wie bekannt, Oberflächen abgekürzter Kegel, bei Cylinder-Flächen aber ebene Rechtecke, wie sich ebenfalls, auch ohne sichtbar verzeichnete Figur mit aller Bestimmtheit einsehen lässt).

Könnte man diese geradlinig krummen bandförmigen Flächen A und B berechnen, und fände man Werthe, die im ersten Gliede Mdx übereinstimmten, so wäre Mdx genau das erste partielle Differenzial $\left|\frac{dS}{dx}\right| dx$. Allein diess erste Differenzial lässt sich nicht in einer solchen allgemeinen Formel geben, wie aus folgenden Gründen erhellt:

a) Was bei einer Rotations-Fläche der Kreisbogen ist, das ist bei den allgemeinen Flächen die Curve, in welcher sie durch einen Schnitt senkrecht auf x geschnitten werden. Kreise kann man wohl allgemein rectificiren, nicht aber die Curven, ehe ihre bestimmte Gleichung gegeben ist. Doch diess liesse sich noch einbringen, wenn man das Integral: $\int \sqrt{dy^2 + dz^2}$ als Symbol der Rectification in die Formel einführte.

Fig. 12.

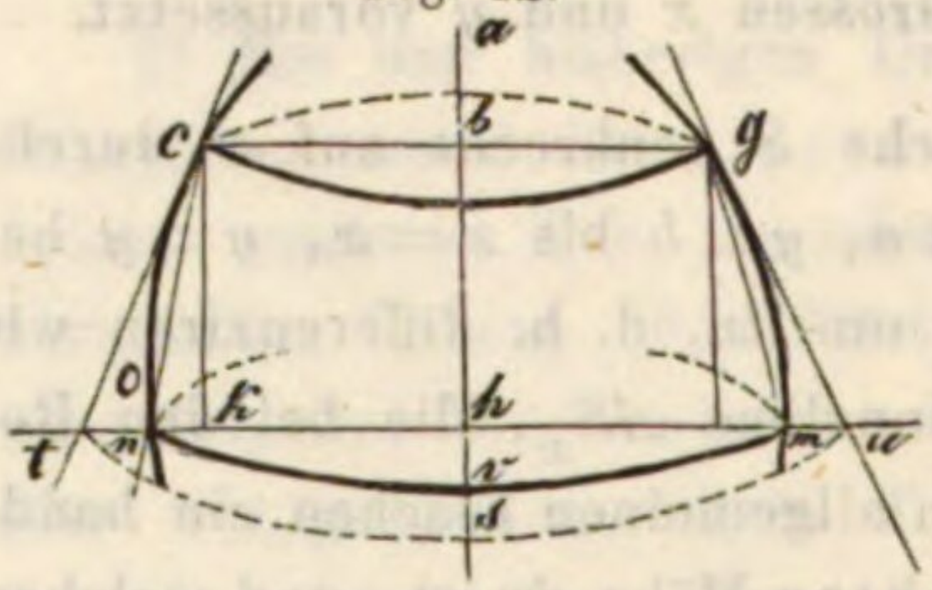
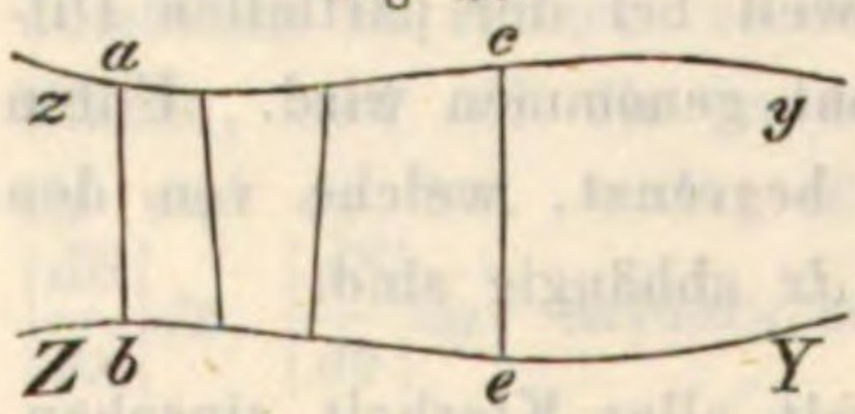


Fig. 27.



b) Bei Rotations-Flächen hat der Kegel-Mantel überall gleiche Höhe, es ist $ct = gn$, und diess gilt von allen Axenschnitten ringsherum. Aber bei den allgemeinen Flächen geben alle Schnitte, seien sie senkrecht auf YZ oder nicht, andere Werthe ct und gn, und die bandförmige, geradlinig krumme Fläche hat die Werthe ab, ce etc. verschieden, so dass ihre Berechnung selbst schon die Planirung voraussetzt.

c) Allein wenn diess auch geleistet werden könnte, so ist im allgemeinen Probleme selbst kein Anhaltspunkt gegeben, wie denn diese geraden Linien ab, ce etc. die von der Curve zy zur Curve ZY gehen, construirt werden sollen, ob durch die Durchschnitte der aufeinanderfolgenden tangirenden Ebenen oder durch senkrechte Schnitte, oder anderswie. (Die tangirende Ebene für sich allein giebt keinen Anhaltspunkt, da sie die Fläche und den Querschnitt zy nur in einem Punkte, etwa in a berührt, nicht aber längs der ganzen Curve zy liegt. Bei den Rotations-Flächen ist der Anhaltspunkt gegeben, dass sämmtliche gerade Linien der

Kegel-Fläche durch die Axenschnitte erzeugt werden, und dass sie sämmtlich constant und gleich sind. Eben so sind bei cylindrischen Flächen die geraden und unter sich parallelen Linien selbst, in denen die Cylinder-Fläche durchschnitten werden kann, als hinreichende Anhaltspunkte gegeben.)

5) Diess zwingt uns, zum zweiten Differenzial der Fläche fortzuschreiten, und zu untersuchen, ob dieses die Anhaltspunkte zu einer allgemeinen Complanations-Formel geben könne oder nicht.

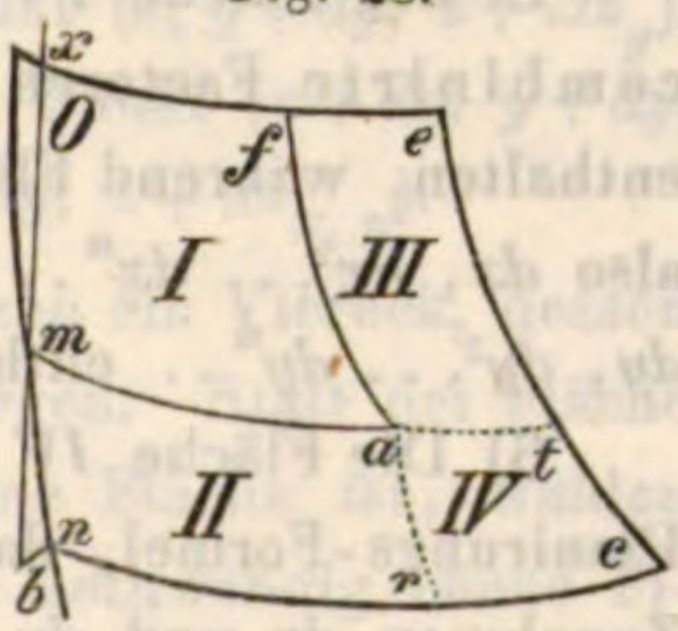
§. 178.

Partielle Differenzen und partielle Differenzialien der Flächen.

Es darf bei diesen Untersuchungen etwas verweilt werden, um so mehr, als man gewöhnlich über diese Formeln rasch hinweggeht, zufrieden, etwas zu haben, womit man rechnen kann, unbekümmert um das wahre und letzte Verständniss.

1) Es sei die Fläche (I), $Omaf$, gegeben, die planirt werden soll. Der Punkt O ist der Punkt a, b, c; der Punkt a ist der Punkt x, y, z. Wird x um $dx = mb$ vermehrt, so ist n der Punkt $(x+dx, b, z+\Delta z_x)$ und r der Punkt $(x+dx, y, z+\Delta z_x)$. (In Fläche (II) $mnar$ hat y dieselbe Grösse.) Wird y um dy vermehrt, so ist e der Punkt $(a, y+dy, z+\Delta z_y)$ und t ist der Punkt $(x, y+dy, z+\Delta z_y)$. Der Punkt c entspricht der Ordinate: $(x+dx, y+dy, z+\Delta z_{x,y})$.

Fig. 28.



Wird Fläche I durch S ausgedrückt, so ist die ganze Fläche: $I+II+III+IV$ gleich $S+\Delta S$, worin ΔS die totale Zunahme ausdrückt, wenn die Ordinaten x um dx und y um dy vermehrt werden.

2) Das totale Differenzial dS ist gleich der Summe der partiellen Differenzialien:

$$dS = \left|\frac{dS}{dx}\right| dx + \left|\frac{dS}{dy}\right| dy.$$

Ist wohl auch die totale Differenz ΔS gleich der Summe der partiellen Differenzen? Diese Frage muss mit Nein beantwortet werden, da $\Delta S_x + \Delta S_y = II + III$ ist, während $\Delta S = II + III + IV$ ist.

Diess ergiebt sich auch aus der allgemeinen Formel. Denn:

$$\Delta S_x \text{ ist gleich } dS_x + \frac{1}{2}d^2S_x + \frac{1}{2.3}d^3S_x + \ldots$$

$$\Delta S_y \text{ ist gleich } dS_y + \frac{1}{2}d^2S_y + \frac{1}{2.3}d^3S_y + \ldots$$

während ΔS gleich ist:

$$\Delta S = dS_x + dS_y + \frac{1}{2}(d^2S_{x^2} + 2d^2S_{x,y} + d^2S_{y^2}) + \ldots$$

so dass schon im zweiten Gliede ein Unterschied zwischen ΔS und $(\Delta S_x + \Delta S_y)$ offenbar wird, und die Gleichung stattfindet:

$$\Delta S - (\Delta S_x + \Delta S_y) = \frac{1}{2}(d^2S_{x,y}) + \frac{1}{2.3}(\ldots) + \ldots$$

Da ΔS_x die Fläche *II*, ΔS_y die Fläche *III*, und ΔS die Summe der Flächen *II*, *III*, *IV* ist, so ist Fläche *IV* (*artc*) gleich:

$$\Delta S - (\Delta S_x + \Delta S_y) = \frac{1}{2}d^2S_{x,y} + \frac{1}{2.3}(\ldots) + \ldots$$

In der Fläche *IV* sind alle Glieder von ΔS enthalten, die combinirte Factoren dx und dy, also $dx\,dy$, $dx^2\,dy$, .. $dx^{n-\mu}dy^{\mu}$ .. enthalten, während Fläche *II* nur Glieder mit gleichen Factoren dx, also dx, dx^2, .. dx^n .. und Fläche *III* nur Glieder mit Factoren dy, dy^2, .. dy^n .. enthält.

3) Die Fläche *IV* giebt die Anhaltspunkte für eine allgemeine Planirungs-Formel, da sie eine Function der beiden unabhängigen Zunahmen dx und dy ist.

Zusatz. Aus obiger Figur wird klar, wie die partiellen Differenzen geometrisch interpretirt werden müssen, die Zunahmen dx und dy mögen so gross oder so klein genommen werden, als man will.

§. 179.

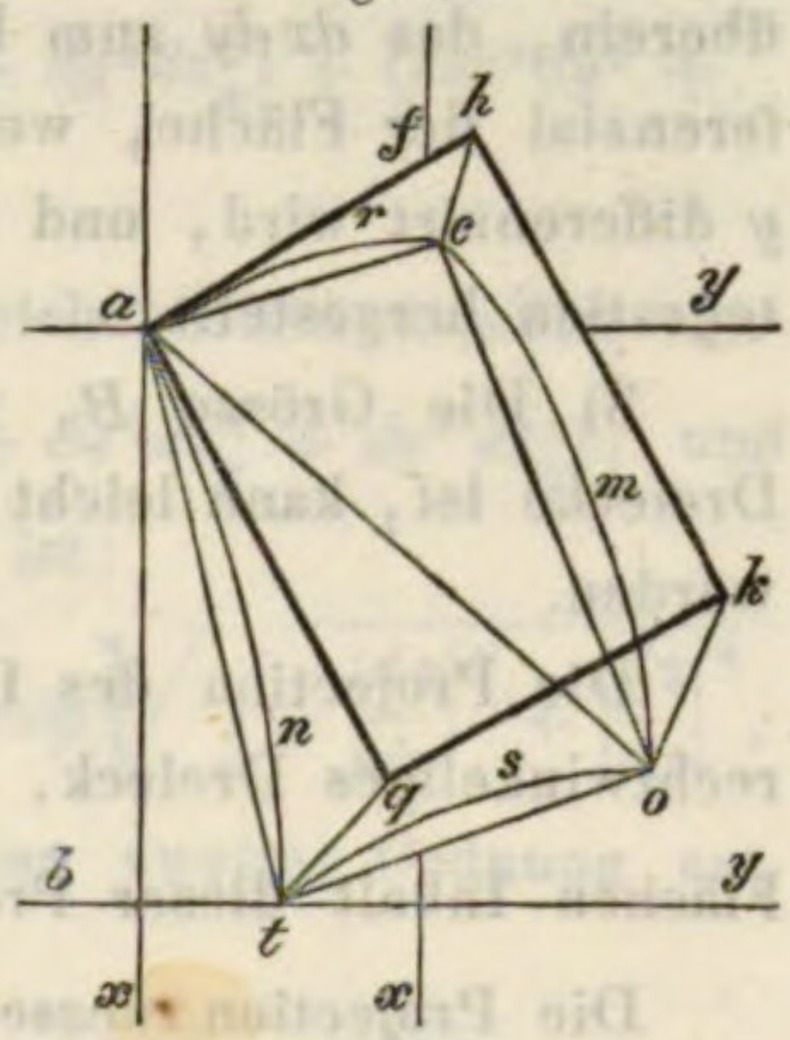
Das Flächen-Element.

1) In Figur 28 ist r der Punkt, welcher in der Fläche den Werthen $x + dx$, y, $z + \Delta z_x$ entspricht. In analoger Bezeichnung werden die Punkte t und c ausgedrückt.

In Figur 29, die statt der Fläche *IV* eintritt, ist a der Punkt x, y, z. Durch den Punkt a werde die tangirende Ebene gelegt.

Wird durch a ein Querschnitt senkrecht auf X geführt, so durchschneidet dieser die Fläche in der Curve *arc* und die tangirende Ebene in der Linie *ah*. Nimmt man $dx = ab$, und wird durch b ein Querschnitt parallel mit dem ersten geführt, so durchschneidet er die Fläche in der Curve *tso* und die tangirende Ebene in der Linie *qk*. Ebenso durchschneidet ein Querschnitt durch a, senkrecht auf Y, die Fläche in der Curve *ant*, und die tangirende Ebene in der Linie *aq*, und ein mit diesem paralleler Querschnitt, der durch die Linie *fx* gelegt wird (wenn $xx = dy$ ist), durchschneidet die Fläche in der Curve *cmo* und die tangirende Ebene in der Linie *hk*.

Fig. 29.



Dann ist a der Punkt (x, y, z), t der Punkt $(x+dx, y, z+\Delta z_x)$, q der Punkt $(x+dx, y, z+dz_x)$, c der Punkt $(x, y+dy, z+\Delta z_y)$, und h der Punkt $(x, y+dy, z+dz_y)$; o der Punkt $(x+dx, y+dy, z+\Delta z_{x,y})$, und k der Punkt $(x+dx, y+dy, z+dz_{x,y})$.

Die vier Sehnen *at*, *ac*, *co*, *to* begrenzen ein Viereck, dessen Punkte nicht nothwendig in einer Ebene liegen. Statt der Fläche dieses Vierecks, die eine geradlinig krumme Fläche ist, wählen wir die beiden Dreiecke *ato* und *aco*, die nothwendig ebene Figuren sind, und die, wie aus dem Beweise hervorgeht, dieselben Dienste thun, wie das geradlinig krumme Viereck *acot*.

2) Die von den vier Curven begrenzte Fläche (*IV*), nämlich die Fläche *antsomcra* ist immer grösser als die beiden Sehnen-Dreiecke *ato*, *aco*, und immer kleiner als die Summe folgender Figuren: des Vierecks *ahkq*, der beiden Vierecke *tqko*, *kohc*, und der zwei Dreiecke *atq* und *ach*. Denn die letztern Figuren umschliessen die Fläche, während diese selbst die beiden Sehnen-Dreiecke umschliesst.

Wir haben daher zwei Grössen A und B, die immer grösser und kleiner sind als Fläche IV, d. h.:

$$\begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \gtrless d^2S - (d^2S_x + d^2S_y) + \ldots$$

$$\gtrless \frac{1}{2}\left(2\left|\frac{d^2S}{dx\,dy}\right|dx\,dy\right) + \frac{1}{2.3}\left(\ldots\right) + \ldots$$

Stimmen nun die beiden Grössen A und B in dem Gliede überein, das $dx\,dy$ zum Factor hat, so geben sie das zweite Differenzial der Fläche, wenn diese einmal nach x und dann nach y differenzirt wird, und es ist die Basis für die nachfolgende Integration hergestellt.

3) Die Grösse B, welche die Summe der beiden Sehnen-Dreiecke ist, kann leicht auf einen analytischen Ausdruck gebracht werden.

Die Projection des Dreiecks *ato* auf der Ebene XY ist ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen Katheten dx und dy sind. Der Flächen-Inhalt dieser Projection ist also gleich $\frac{1}{2}dx\,dy$. (α)

Die Projection desselben Dreiecks auf der Ebene XZ ist ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen Katheten dx und $\Delta z_{x,y} - \Delta z_x$ sind. Nun ist $\Delta z_{x,y} - \Delta z_x$ gleich:

$$dz_y + \frac{1}{2}\left(\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right| dy^2 + 2\left|\frac{d^2z}{dx\,dy}\right| dx\,dy\right) + \frac{1}{2.3}\left(\,..\,\right) + ..$$

Der Flächen-Inhalt dieser Projection ist daher gleich:

$$(\beta)\quad \frac{1}{2}dx\,dz_y + \frac{1}{2.2}dx\left(\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right| dy^2 + 2\left|\frac{d^2z}{dx\,dy}\right| dx\,dy\right) + \frac{1}{2.2.3}dx\left(\ldots\right) + ..$$

Das einzige Glied, welches Differenzialien zweiter Ordnung enthält, ist $\frac{1}{2}dx\,dz_y$; alle übrigen Glieder enthalten Differenzialien dritter und höherer Ordnung.

Die Projection des nämlichen Dreiecks auf die Ebene YZ ist ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen Katheten dy und Δz_x sind. Der Flächen-Inhalt dieser Projection ist demnach:

$$(\gamma)\quad \frac{1}{2}dy\,dz_x + \frac{1}{2.2}dy\,d^2z_x + \ldots$$

Das einzige Glied dieser Reihe, das Differenzialien zweiter Ordnung enthält, ist: $\frac{1}{2}dy\,dz_x$.

Erhebt man den Flächen-Inhalt jeder Projection zum Quadrat, so ist:

$$\alpha^2 = \frac{1}{4}dx^2\,dy^2,$$

$$\beta^2 = \frac{1}{4}dx^2\,dz_y^2 + (Qdx^2dy^3 + Rdx^3dy^2) + \ldots,$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{4}dy^2\,dz_x^2 + (Sdx^3dy^2) + \ldots$$

Summirt man α^2, β^2, γ^2, so ist:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\frac{1}{4}(dx^2dy^2+dx^2dz_y^2+dy^2dz_x^2)+Qdx^2dy^3+$$
$$+(R+S)\,dx^3dy^2+\ldots$$

Das einzige Glied dieser Summe, welches Differenzialien vierter Ordnung enthält, ist: $\frac{1}{4}(dx^2dy^2+dx^2dz_y^2+dy^2dz_x^2)$, und wird daraus die Wurzel ausgezogen, so ist:

$$\frac{1}{2}\sqrt{(dx^2dy^2+dx^2dz_y^2+dy^2dz_x^2)}=\frac{1}{2}dx\,dy\sqrt{1+\left|\frac{dz}{dy}\right|^2+\left|\frac{dz}{dx}\right|^2},$$

das einzige Glied, welches Differenzialien zweiter Ordnung enthält, so dass die Gleichung hervorgeht:

$$\sqrt{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}=\frac{1}{2}dx\,dy\sqrt{\left(1+\left|\frac{dz}{dx}\right|^2+\left|\frac{dz}{dy}\right|^2\right)}+$$
$$+(Hdx^2dy+Kdx\,dy^2)+\ldots$$

Da nun der Flächen-Inhalt des Dreiecks *ato* gleich ist der Wurzel aus der Summe der Quadrate der drei Projectionen, so ist

$$\text{Dreieck } ato=\frac{1}{2}dx\,dy\sqrt{\left(1+\left|\frac{dz}{dx}\right|^2+\left|\frac{dz}{dy}\right|^2\right)}+$$
$$+(Hdx^2dy+Kdx\,dy^2)+..$$

Ganz auf dieselbe Art findet man

$$\text{Dreieck } aco=\frac{1}{2}dx\,dy\sqrt{\left(1+\left|\frac{dz}{dx}\right|^2+\left|\frac{dz}{dy}\right|^2\right)}+$$
$$+(H'dx^2dy+K'dx\,dy^2)+..,$$

so dass die Summe der beiden Dreiecke gleich ist:

$$B=dx\,dy\sqrt{\left(1+\left|\frac{dz}{dx}\right|^2+\left|\frac{dz}{dy}\right|^2\right)}+$$
$$+\left((H+H')\,dx^2dy+(K+K')\,dx\,dy^2\right)+\ldots$$

4) Um die Grösse $A=(ahkq+hcok+tqko+atq+ach)$ zu finden, hat man folgende Anhaltspunkte: Das Parallelogramm *ahkq* hat die drei Projectionen: $dx\,dy$, $dx\,dz_y$, $dy\,dz_x$, es ist daher der Flächen-Inhalt von *ahkq* gleich $dx\,dy\sqrt{\left(1+\left|\frac{dz}{dx}\right|^2+\left|\frac{dz}{dy}\right|^2\right)}$.

Die übrigen Figuren, nämlich die Vierecke *tqok* und *okca*, und die Dreiecke *taq* und *ahc*, haben Linien, welche erste Differen-

zialien enthalten, wie *at*, *aq*; *qk*, *to*; *oc*, *kh*; *ah*, *ac*; und Linien, welche zweite Differenzialien enthalten, wie $tq = dz_x - \Delta z_x$; $hc = dz_y - \Delta z_y$, $ok = dz_{x,y} - \Delta z_{x,y}$. Der Flächen-Inhalt einer jeden dieser Figuren ist daher nothwendig ein Differenzial dritter Ordnung, und ihre Summe giebt die Reihe:

$$(h\,dx^2dy + k\,dx\,dy^2 + ..) + (h'\,dx^2dy^2 + k'\,dx\,dy^2 + ...) + ..,$$

so dass die Summe sämmtlicher, die krumme Fläche (*antsomcra*) einschliessender Figuren gleich ist:

$$A = dx\,dy \int \left(1 + \left|\frac{dz}{dx}\right|^2 + \left|\frac{dz}{dy}\right|^2\right) + \\ + (h\,dx^2dy + ..) + h'\,(dx^2dy^2 + ...) + ...$$

5) Die beiden gefundenen Grössen A und B stimmen im ersten Gliede ihrer Reihe überein, sie sind auch zu gleicher Zeit immer grösser und kleiner als die Fläche:

$$(antsomcra) = \left|\frac{d^2S}{dx\,dy}\right| dx\,dy + \frac{1}{2.3}(L\,dx^2dy + M\,dx\,dy^2) + ...$$

Es ist daher (nach dem Schema der oft durchgeführten Beweise):

$$\left|\frac{d^2S}{dx\,dy}\right| dx\,dy = dx\,dy \int \left(1 + \left|\frac{dz}{dx}\right|^2 + \left|\frac{dz}{dy}\right|^2\right)$$

eine vollkommen präcise Gleichung, so gross oder so klein auch dx und dy genommen werden mögen. — Das Differenzial $\left|\frac{d^2S}{dx\,dy}\right| dx\,dy$ wird das Flächen-Element genannt.

§. 180.

Zusätze.

Zusatz 1. In Figur 28 könnten Flächen *II*, *III*, *IV* auch durch andere als Parallel-Schnitte, selbst durch krumme Flächen begrenzt sein. In diesem Falle stimmt Fläche *IV* nicht ganz mit Figur 29 überein, welche senkrechte Parallelschnitte voraussetzt.

Allein beide Flächen unterscheiden sich, wie man auch ohne Figur einsieht, nur in den dritten und höheren Differenzialien, da ihr Unterschied neue Factoren dz_x, dz_y einschliesst. Das partielle zweite Differenzial ist demnach für beide Flächen dasselbe, und um diess Differenzial $\left|\frac{d^2S}{dx\,dy}\right| dx\,dy$ war es zu thun. Die hin-

zukommenden dritten und höheren Differenzialien, die aus den begrenzenden Flächen abgeleitet werden, werden darum nicht vernachlässigt, sondern sie werden in die Glieder eingeordnet, in die sie gehören, die dritten in's dritte Glied, die vierten in's vierte Glied u. s. w.

Zusatz 2. Es ist nicht ersichtlich, dass man sich in den gewöhnlichen Theorien des Differenzial-Calculs mit Bestimmtheit über die geometrische und analytische Interpretation des Flächen-Elements ausgesprochen hat. Was ist denn die Grösse

$$dx\,dy\sqrt{\left(1+\left|\frac{dz}{dx}\right|^2+\left|\frac{dz}{dy}\right|^2\right)}$$

analytisch und geometrisch? Geometrisch ist sie das Parallelogramm *ahkq*, und zwar vollkommen genau, so gross oder so klein auch *dx* und *dy* genommen werden mögen. Was ist dieser Ausdruck analytisch? Es ist nichts gesagt, wenn er das Flächen-Element genannt wird. Ist *S* die Fläche, so ist:

$$\Delta S = \left|\frac{dS}{dx}\right|dx+\left|\frac{dS}{dy}\right|dy+\frac{1}{2}\left(\left|\frac{d^2S}{dx^2}\right|dx^2+2\left|\frac{d^2S}{dx\,dy}\right|dx\,dy+\left|\frac{d^2S}{dy^2}\right|dy^2\right)+$$
$$+\frac{1}{2.3}\left(\left|\frac{d^3S}{dx^3}\right|dx^3+\ldots+\left|\frac{d^3S}{dy^3}\right|dy^3\right)+\ldots$$

Das gefundene Flächen-Element ist nichts anderes als ein Theil des ganzen zweiten Differenzials, nämlich $\frac{1}{2}\left(2\left|\frac{d^2S}{dx\,dy}\right|dx\,dy\right)$, nicht mehr und nicht weniger; es ist weder $\frac{1}{2}\left|\frac{d^2S}{dx^2}\right|dx^2$ noch $\frac{1}{2}\left|\frac{d^2S}{dy^2}\right|dy^2$ im Flächen-Element enthalten, und man kann nicht die Hoffnung hegen, dass jemals $\frac{1}{2}\left|\frac{d^2S}{dx^2}\right|dx^2$ oder $\frac{1}{2}\left|\frac{d^2S}{dy^2}\right|dy^2$ in einem allgemeinen Ausdruck hergestellt werden könne, was man übrigens auch nicht nothwendig hat. Wohl aber können die Glieder des dritten Differenzials, welche die Differenzialien $dx^2\,dy$ und $dx\,dy^2$ zu Factoren haben, durch Differenzirung von

$$dx\,dy\sqrt{\left(1+\left|\frac{dz}{dx}\right|^2+\left|\frac{dz}{dy}\right|^2\right)}$$

hergestellt werden, und eben so die entsprechenden Glieder aller nachfolgenden Differenzialien.

Zusatz 3. Will man die Fläche *S* selbst finden, so muss man, nachdem die gegebene Gleichung der Fläche sub-

stituirt ist, von $\left|\frac{d^2S}{dxdy}\right|dxdy$ durch Integration zum ersten partiellen Differenzial zurückgehen, entweder zu $\left|\frac{dS}{dx}\right|dx$, wenn nach y integrirt wird, oder zu $\left|\frac{dS}{dy}\right|dy$, wenn nach x integrirt wird. Man gelangt dadurch zu den ersten Differenzialien der Flächen *II* oder *III* (Fig. 28), und indem man auf's Neue integrirt, entweder nach x, wenn zuerst nach y, oder nach y, wenn anfänglich nach x integrirt war, gelangt man zur Fläche (I), S, selber, und es ist aus der geometrischen Betrachtung, wie auch aus allgemein analytischen Gründen einleuchtend, dass man zur nämlichen Fläche I gelangt, ob man von IV durch III oder von IV durch II auf I zurückgeht.

In den Symbolen des Integral-Calculs wird S ausgedrückt:

$$S = \int_x \int_y dxdy \sqrt{\left(1 + \left|\frac{dz}{dx}\right|^2 + \left|\frac{dz}{dy}\right|^2\right)},$$

$$S = \int_y \int_x dydx \sqrt{\left(1 + \left|\frac{dz}{dx}\right|^2 + \left|\frac{dz}{dy}\right|^2\right)}.$$

Zusatz 4. Man kann also wohl auch durch zurückleitende Integration die ersten partiellen Differenzialien der Flächen darstellen, aber nicht mehr allgemein, sondern nur für jede Fläche einzeln, weil man nur integriren kann, wenn zuerst die gegebene Gleichung einer Fläche substituirt ist. Diess ist auch der Grund, warum das erste Differenzial der Fläche nicht allgemein gegeben werden kann. Diese ersten Differenzialien sind geradlinig krumme Flächen, und diese sind nicht eine Gattung von Flächen, sondern mehrere, und sind je nach den verschiedenen Gleichungen der Flächen selbst verschieden.

Zusatz 5. Die Integration

$$S = \int_x \int_y dx\,dy \sqrt{\left(1 + \left|\frac{dz}{dx}\right|^2 + \left|\frac{dz}{dy}\right|^2\right)}$$

ist die Hauptsache. Aber es ist merkwürdig, wie sich hier die gewöhnlichen Theorieen ausdrücken. Man vergisst in der Noth der Geometrie gerade das, was man im Ueberfluss der Analysis hingeworfen hatte. Man sagt: „Die Summe aller der unendlich vielen Flächen-Elemente $\left|\frac{d^2S}{dxdy}\right|dxdy$ giebt die ganze Fläche S.“ Das wäre sonderbar. Man vergisst dabei auf den Taylor'schen Lehrsatz.

Wenn man aus einer Function y_x die Function dy_x ableitet, so heisst man diess Differenziren, und wenn man aus dem gegebenen dy_x sucht, welche Function so beschaffen ist, dass sie differenzirt den Werth dy_x giebt, so wird das Aufsuchen und Herstellen der so beschaffenen Function y_x Integration genannt.

Nun ist:

$$y + \Delta y = y + dy + \frac{1}{2}d^2y + \frac{1}{2.3}d^3y + \ldots,$$

was analytisch kein Mensch beanstandet. Wem kann analytisch einfallen, zu behaupten, dass y die Summe von unendlich vielen dy sei? Nicht einmal Δy ist diese Summe, sondern sie ist die Summe von unendlich vielen Gliedern, deren eines dy, deren zweites $\frac{1}{2}d^2y$, deren drittes $\frac{1}{2.3}d^3y$ ist u. s. w.

Eben so wenig ist S die Summe von unendlich vielen Flächen-Elementen, sondern es ist:

$$S_{x,y} + \Delta S = S + \left|\frac{dS}{dx}\right|dx + \left|\frac{dS}{dy}\right|dy +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\left|\frac{d^2S}{dx^2}\right|dx^2 + 2\left|\frac{d^2S}{dx\,dy}\right|dx\,dy + \left|\frac{d^2S}{dy^2}\right|dy^2\right) + \ldots$$

In $S + \Delta S$ können zwar unendlich viele Glieder vorkommen, aber das Glied $\left|\frac{d^2S}{dx\,dy}\right|dx\,dy$ kann ganz gewiss nur einmal in dieser Summe vorkommen, nicht zweimal, geschweige unendlichemale.

Warum summirt man denn nicht, wenn man integrirt? Wäre das Integriren ein Summiren, dann wäre es wahrlich eine sehr leichte Operation. Man geht nach streng analytischen Regeln der Integration von $\left|\frac{d^2S}{dx\,dy}\right|dx\,dy$ auf $\left|\frac{dS}{dx}\right|dx$ zurück, d. h. man sucht einen Ausdruck, der, wenn er nach y differenzirt wird, im ersten Glied genau den Werth $\left|\frac{d^2S}{dx\,dy}\right|dx\,dy$ giebt. Eben so geht man durch zweite Integration auf S zurück.

Alles Uebrige, die Summirung der Flächen-Elemente etc., ist Redensart, und widerspricht geradezu demjenigen, was analytisch in der wirklichen Integration ausgeführt wird, sei es, dass sie mechanisch befolgt, sei es, dass sie aus ihren Gründen erfasst wird.

Zusatz 6. Will man die höheren Differenzialien d^3S, d^4S etc., so findet man:

$$\left|\frac{d^3S}{dx^2\,dy}\right| dx^2\,dy, \quad \left|\frac{d^3S}{dx\,dy^2}\right| dx\,dy^2, \quad \left|\frac{d^4S}{dx^3\,dy}\right| dx^3\,dy \text{ etc.}$$

analytisch durch successive Differenzirung von $\left|\frac{d^2S}{dx\,dy}\right| dx\,dy$.

Die geometrische Interpretation der gefundenen Resultate hat dann keine weitere Schwierigkeit, da man die partiellen höheren Differenzialien von z, die allein vorkommen, aus der Geometrie der ebenen Curven kennt.

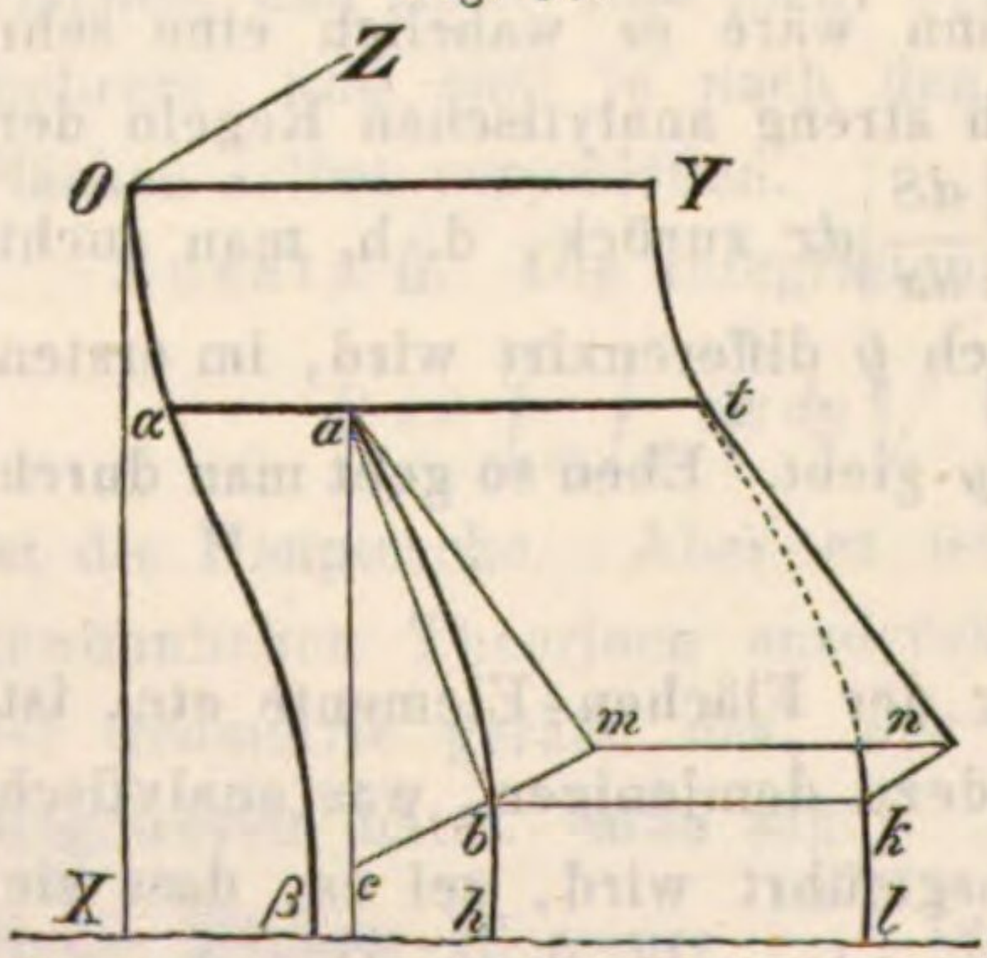
Hingegen die partiellen Differenzialien: $\left|\frac{d^3S}{dx^3}\right| dx^3$, $\left|\frac{d^3S}{dy^3}\right| dy^3$ etc. kann man nicht analytisch ableiten, also auch nicht geometrisch interpretiren, ehe nicht bestimmte Flächen gegeben sind. Sind aber diese gegeben, dann hat Ableitung und geometrische Interpretation der Differenzialien $\left|\frac{d^3S}{dx^3}\right| dx^3$ etc. keine weitere Schwierigkeit.

§. 181.

Planirung der cylindrischen Flächen.

Die cylindrischen Flächen können in allen Punkten in geraden und unter sich parallelen Linien geschnitten werden. Nimmt man die Coordinaten so, dass diese geraden Durchschnitts-Linien mit einer Coordinate, etwa mit y, zusammenfallen, oder mit ihr parallel werden, so werde die cylindrische Fläche $O\alpha\beta lktY$ in einem Punkte a, senkrecht auf x durchschnitten. Die Durchschnittslinie at ist eine gerade Linie, gleich y, wenn in der Ebene abc der Anfangspunkt der Coordinaten liegt. Wird x um $dx = ac$ vermehrt, so ist $cb = \Delta z_x$ und $cm = dz_x$. Denn wird durch a eine Ebene senkrecht auf Y gelegt, so wird die Ebene abc parallel mit der Ebene XZ.

Fig. 30.



Diese mit der Ebene XZ parallelen Durchschnitte geben in allen Punkten congruente Durchschnitts-Curven, $\alpha\beta$, abh, tkl etc.,

die Sehnen *ab* etc. und die Tangenten *am*, *tn* etc. sind in allen Punkten der Linie *at* einander gleich.

Die Zunahme der ganzen cylindrischen Fläche, welche von den Geraden $at = bk = y$ und von den Curven *ab* und *tk* begrenzt wird, liegt zwischen dem Rechteck *abkt* (worin man sich die Sehne *tk* gezogen denken muss), und zwischen der Summe der nachfolgenden Figuren: 1) des Rechtecks *amnt*, 2) des Rechtecks *bmnk*, 3) des Dreiecks *abm*, 4) des Dreiecks *knt*.

Der Flächen-Inhalt des Rechtecks *abkt* ist gleich $y\sqrt{dx^2 + \Delta z_x^2}$.
Der Flächen-Inhalt des Rechtecks *amtn* ist gleich $y\sqrt{dx^2 + dz_x^2}$.
Die übrigen Figuren, deren Flächen-Inhalt auf's Leichteste zu bestimmen wäre, übergehen wir, weil sie sämmtlich einen Factor $bm = dz_x - \Delta z_x = -\left(\frac{1}{2}d^2z_x + ..\right)$ enthalten, in welchem nur zweite und höhere Differenzialien vorkommen, so dass sie auf die Grösse des ersten Differenzials keinen Einfluss haben.

Die beiden Werthe: $y\sqrt{dx^2 + dz_x^2}$ und $y\sqrt{dx^2 + \Delta z_x^2}$ geben, wenn die Substitution: $\Delta z_x = dz_x + \frac{1}{2}d^2z_x + \ldots$ gemacht wird, die Ausdrücke:

$$y\sqrt{dx^2 + dz_x^2} \text{ und } y\sqrt{dx^2 + dz_x^2} + Mdx^2 + Ndx^3 + \ldots,$$

so dass sie beide das erste Differenzial gemeinschaftlich haben.

Bezeichnet *S* die cylindrische Fläche, so ist:

$$\Delta S = dS + \frac{1}{2}d^2S + \frac{1}{2.3}d^3S + \ldots$$

und *dS* ist vollkommen gleich $y\sqrt{dx^2 + dz_x^2}$, da ΔS zwischen zwei Werthen liegt, welche diess erste Differenzial gemeinschaftlich haben. Es ist daher $dS = y\sqrt{dx^2 + dz_x^2}$, so gross oder so klein auch *dx* genommen werden möge.

Ist nun einmal diess erste Differenzial gefunden, so werden die zweiten und höheren durch analytische Differenzial-Operationen abgeleitet, deren Resultate sehr leicht geometrisch interpretirt werden können.

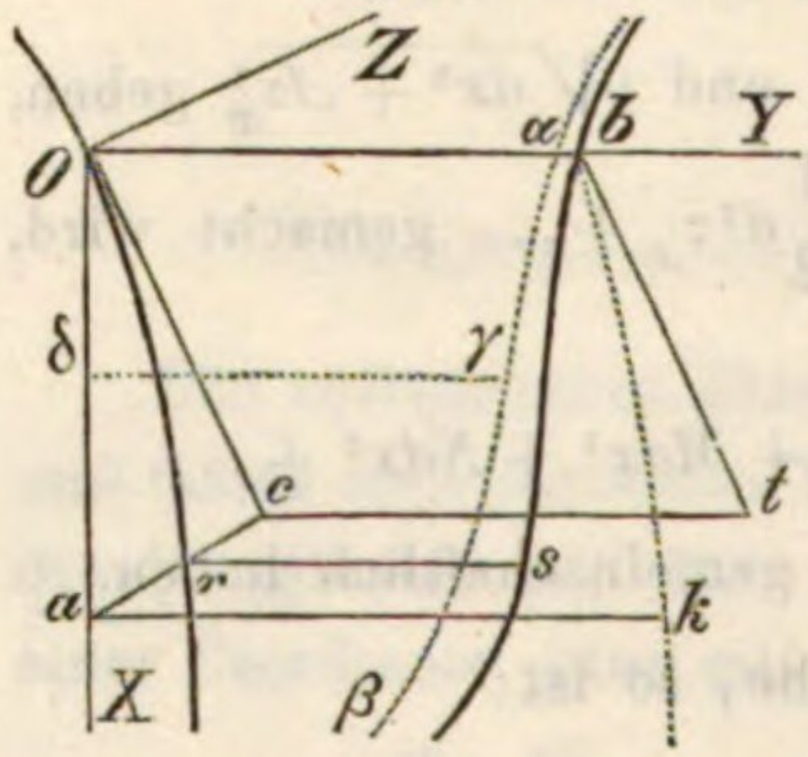
So ist z. B.:

$$d^2S = dy\sqrt{dx^2 + dz_x^2} + y\frac{dz_x d^2z_x}{\sqrt{dx^2 + dz_x^2}},$$

die Summe zweier Rechtecke, deren eines dy zur Basis und $\sqrt{dx^2+dz_x^2} = am$ zur Höhe hat, und deren zweites y zur Basis, und die vierte Proportionale von $\sqrt{dx^2+dz_x^2}$, dz_x, d^2z_x zur Höhe hat. Das ganze erste Differenzial selbst aber ist das Rechteck *amnt*, so gross oder so klein auch dx genommen werden möge.

Zusatz 1. In diesem Beweise wird vorausgesetzt, dass die cylindrische Fläche von zwei auf Y senkrechten Schnitten begrenzt wird. So können wir uns z. B. die Fläche eines Kreis-Cylinders vorstellen, dessen Axe Y horizontal liegt, und der auf beiden Seiten von senkrecht stehenden Kreisen begrenzt wird. Diess ist ein sehr specieller Fall; die Cylinder-Fläche kann auf der einen oder andern Seite oder auf beiden Seiten zugleich von beliebig schiefstehenden Schnitten, oder von beliebig andern Flächen begrenzt werden. Die Complanations-Formel muss auch für diesen allgemeinen Fall entwickelt werden.

Fig. 31.



Zusatz 2. Hier tritt nun der Lehrsatz ein, dass die gegebene Formel: $dS = y\sqrt{dx^2+dz_x^2}$ allgemein gilt, von welcher Curve *bs* die cylindrische Fläche begrenzt sein möge. Denn wird diese Fläche im Punkte O senkrecht auf Y durchschnitten, so sei $Oa = dx$, und es ist für die Durchschnitts-Curve *Or* die Linie $ar = \Delta z_x$, $ac = dz_x$. Die cylindrische Fläche werde in *b* von einer Fläche begrenzt, deren Durchschnitts-Curve mit ihr die Linie *bs* giebt. Die Projection derselben auf die Ebene XY sei die Curve $\alpha\beta\gamma$, die eine Function zwischen x und y ist, so dass αO, $\delta\gamma$ etc. die Ordinaten y, und $O\delta$ etc. ihre Abscissen ausdrücken.

Auch für diese Fläche S ist das erste Differenzial $dS = y\sqrt{dx^2+dz_x^2}$, oder das Rechteck *Ocbt*, so gross oder so klein auch dx genommen werden möge. Denn die ganze Zunahme Δs, die Fläche *Orsb*, unterscheidet sich von dem Rechtecke $y\sqrt{dx^2+dz_x^2}$ erst in Grössen, welche zweite und höhere Differenzialien enthalten, so dass das erste Glied ihrer Zunahme, nämlich dS genau dem Rechtecke $y\sqrt{dx^2+dz_x^2}$ gleich ist. Das Schema dieses Beweises braucht nicht wiederholt zu werden, da es in den vorhergehenden §§. durchgeführt wurde.

Zusatz 3. Wird die cylindrische Fläche von zwei Seiten von beliebigen Curven begrenzt, so führt man einen Schnitt senkrecht auf Y, und berechnet die beiden Theile der cylindrischen Fläche einzeln. Ist die ganze Fläche S, so sei der eine Theil S' und der andere S'', und es ist:

$$dS = dS' \pm dS'' = y' \sqrt{dx^2 + dz_x^2} \pm y'' \sqrt{dx^2 + dz_x^2} =$$
$$= (y' \pm y'') \sqrt{dx^2 + dz_x^2}.$$

Zusatz 4. Die Werthe y, y', y'' findet man aus den begrenzenden Flächen in Verbindung mit der Gleichung der cylindrischen Fläche. Sucht man in der begrenzenden Fläche die Werthe y, y', y'' und substituirt sie in $y\sqrt{dx^2 + dz_x^2}$ etc., so erhält man einen Ausdruck, der bloss x, z, dx, dz_x enthält. Der auf Y senkrechte Schnitt giebt eine Gleichung zwischen x und z. Daraus erhält man z und dz in Ausdrücken von x und dx, so dass $y\sqrt{dx^2 + dz_x^2} = f'x\,dx$ wird, ein Ausdruck, der immer integrirt werden kann.

Beispiel zur Verdeutlichung. Es sei eine kreisförmige cylindrische Fläche gegeben. Die Durchschnitts-Curve senkrecht auf Y ist ein Kreis von der Gleichung $(x-a)^2 + (z-b)^2 = r^2$. (1) Die Durchschnitts-Curve eines schiefen Schnitts ist eine Ellipse, deren Projection auf die Ebene XY eine gerade Linie ist von der Gleichung $y = \alpha + \beta x$. (2) Es ist daher:

$$dS = y\sqrt{dx^2 + dz_x^2} = (\alpha + \beta x)\sqrt{dx^2 + dz_x^2}.$$

Sucht man aus Gleichung (1) die Grössen z und dz_x in Ausdrücken von x und dx, so wird dS eine Function der Veränderlichen x, und S wird durch Integration gefunden:

$$S = \int_x y\sqrt{dx^2 + dz_x^2}.$$

Bei wirklicher Integration müssen endlich die Grenzwerthe $x = a$ und $x = b$ genommen werden, zwischen welchen die gesuchte Fläche liegt.

Zusatz 5. Aus der Complanations-Formel für cylindrische Flächen kann man sich auf's Neue überzeugen, was die allgemeine Complanations-Formel $dx\,dy\sqrt{1 + \left|\frac{dz}{dx}\right|^2 + \left|\frac{dz}{dy}\right|^2}$ ausdrückt.

Differenzirt man nämlich $y\sqrt{dx^2+dz_x^2}$ noch einmal, so erhält man:

$$dy\sqrt{dx^2+dz_x^2}+y\frac{dz\,d^2z_x}{\sqrt{dx^2+dz_x^2}}.$$

Für cylindrische Flächen wird in der allgemeinen Formel dz_y gleich Null, sie wird demnach:

$$dx\,dy\sqrt{1+\left|\frac{dz}{dx}\right|^2}=dy\sqrt{dx^2+dz_x^2}.$$

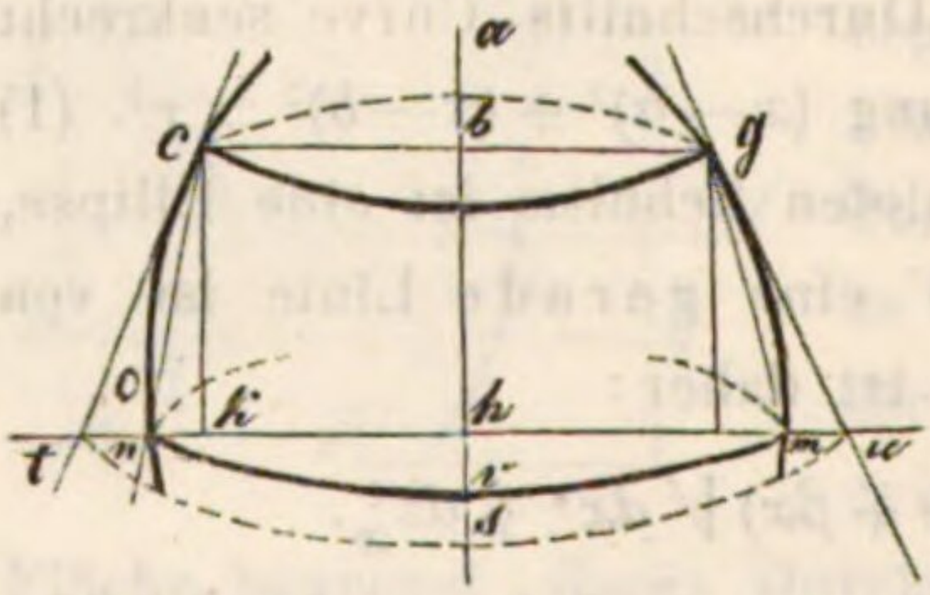
Sie giebt nur einen Theil des ganzen zweiten Differenzials, nämlich den Theil, der $dx\,dy$ zum Factor hat, was auch im Beweise allgemein erörtert worden ist.

§. 182.

Rotations-Flächen.

1) Die Formel für die Planirung der Rotations-Flächen, ist schon §. 149. entwickelt worden.

Fig. 12.

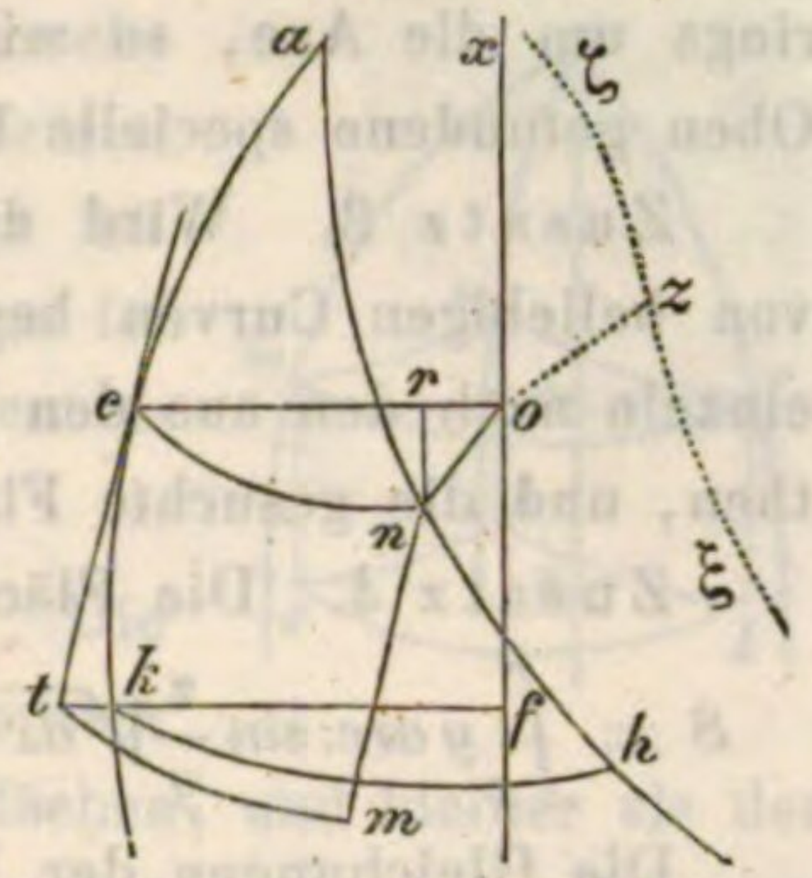


Bewegt sich eine Curve *con* um eine Axe *as*, die mit X, mit Y oder mit Z zusammenfallen möge, also z. B. mit X, so beschreibt die Curve eine Rotations-Fläche. Wird x um $dx=bh$ vermehrt, so nimmt die Fläche S um ΔS zu, und das erste Glied dieser Zunahme, dS, ist $2\pi y\sqrt{dx^2+dy^2}$, weil die Fläche ΔS zwischen den beiden Cylinder-Flächen liegt, deren eine durch die Sehne *cn* und deren andere durch die Tangente *ct* beschrieben wird, Flächen, die im ersten Gliede: $2\pi y\sqrt{dx^2+dy^2}$ übereinstimmen, und die sich erst in dem zweiten und in den höheren Differenzialien unterscheiden. Das erste Differenzial dS ist also ein Cylinder-Mantel, dessen Basis der Kreis $acg=2y\pi$ und dessen Höhe die Linie $ct=\sqrt{dx^2+dy^2}$ ist.

2) Diese Formel, die sich auf die Rotations-Fläche rings um die Axe bezieht, ist zu wenig allgemein. Denn die Rotations-Fläche *acn* kann auf einer Seite, oder auch auf beiden Seiten durch Curven *an* etc. begrenzt sein, die entweder von Axen-

Schnitten oder von anderen begrenzenden Flächen herrühren, und deren Projectionen in der Ebene XZ die Curven $\zeta z \xi$ etc. sein mögen. Wird x im Punkte o um $dx = of$ vermehrt, so ist die ganze Zunahme der Fläche ΔS gleich $ckhn$, und das erste Glied dieser Zunahme, dS, ist gleich dem senkrechten Cylinder-Mantel $cnmt$, dessen Basis der Kreisbogen cn und dessen Höhe die Linie $ct = \sqrt{dx^2 + dy_x^2}$ ist, so gross oder so klein auch dx genommen werden möge.

Fig. 32.



Der Beweis dieses Satzes wird gerade so, wie alle früheren Beweise geführt. Die beiden Flächen $cknh$ und $cntm$ unterscheiden sich erst in den zweiten und höheren Differenzialien, so dass nothwendigerweise $cntm$ das ganze erste Differenzial der Fläche ist, so gross oder so klein auch dx genommen werden möge.

3) Es kommt noch darauf an, die cylindrische Fläche dS auf einen analytischen Ausdruck zu bringen. Dieser ist:

$$dS = cn \,.\, ct = cn \sqrt{dx^2 + dy_x^2}.$$

Der Bogen cn ist ein Kreisbogen, der dem Winkel con entspricht, und in allen Punkten ist $co = no$ (was eine Formel für das erste Differenzial der Fläche möglich macht). Für den Punkt n ist $nr = z$ und $co = no = y$; es ist daher:

$$cn = y \, arc.\, sin \, nr = y \, arc.\, sin \frac{z}{y}.$$

Dieser Werth in obige Formel substituirt, giebt:

$$dS = y \, arc.\, sin \frac{z}{y} \sqrt{dx^2 + dy_x^2}.$$

Zusatz 1. Es ist einleuchtend, dass diese Formel, je nachdem man die Lage der Coordinaten-Ebenen nimmt, mit folgender zusammenfällt:

$$dS = z \, arc.\, sin \frac{y}{z} \sqrt{dx^2 + dz_x^2}.$$

Zusatz 2. Nimmt man einen Quadranten der Rotations-Fläche, also $y = z$, so wird:

$$dS = y \, arc.\, sin \, 1 \sqrt{dx^2 + dy_x^2} = \frac{1}{2} \pi y \sqrt{dx^2 + dy_x^2}.$$

Nimmt man die vier Quadranten, also die Rotations-Fläche rings um die Axe, so wird $dS = 2\pi y \sqrt{dx^2 + dy_x^2}$, so dass die Oben gefundene specielle Formel wieder hervorgeht.

Zusatz 3. Wird die Rotations-Fläche auf beiden Seiten von beliebigen Curven begrenzt, so berechnet man dS' und dS'' einzeln nach den aus den begrenzenden Curven abgeleiteten Werthen, und die gesuchte Fläche folgt aus $dS = dS' \pm dS''$.

Zusatz 4. Die Fläche selbst findet man durch Integration:

$$S = \int_x y \, arc.\, sin \frac{z}{y} \sqrt{dx^2 + dy_x^2} = \int_x z \, arc.\, sin \frac{y}{z} \sqrt{dx^2 + dz_x^2}.$$

Die Gleichungen der Rotations-Fläche und der begrenzenden Flächen geben die Mittel an die Hand, in Formel S die Grössen y, z und ihre Differenzialien zu eliminiren, so dass S in ein Integral von der Form übergeht: $S = \int_x f'x\,dx$, eine Operation, die jederzeit ausgeführt werden kann.

Das Integral muss endlich, wie sich von selbst versteht, von bestimmten Werthen $x = a$ bis $x = b$ genommen werden, wodurch die Constante bestimmt wird.

§. 183.

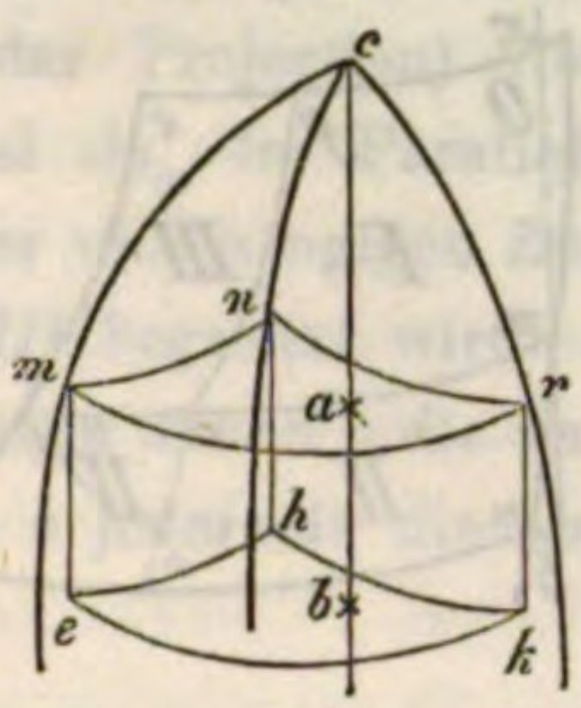
Cubatur der Körper.

1) Die Formel für die Cubatur der Rotations-Körper haben wir §. 150 gegeben. Es sei K der Inhalt der Rotations-Körper. Wird durch x ein Schnitt senkrecht geführt, und x um dx vermehrt, so ist die ganze Zunahme ΔK ein abgekürzter Rotations-Körper, und das erste Glied dieser Zunahme, dK, ist ein senkrechter Cylinder, dessen Basis der Querschnitt durch x und dessen Höhe dx ist. Dieser Querschnitt V ist aber ein Kreis, dessen Radius gleich y ist, es ist daher $dK = Vdx = y^2\pi dx$, so gross oder so klein dx genommen werden möge.

2) Die allgemeine Formel der Cubatur stimmt im Ganzen mit der Formel der Rotations-Körper Vdx überein. Ist cmn irgend eine Fläche, die von zweien oder mehreren anderen Flächen ncr, mcr etc. begrenzt wird (Flächen, die auch Ebenen, Parallelschnitte oder Axenschnitte sein können), wird ferner x im Punkte a um $dx = ab$ vermehrt, so ist die ganze Zunahme des Körpers $cmnr$ ein abge-

kürzter Körper von der Höhe dx, und das erste Glied dieser Zunahme ist ein senkrechter Cylinder, dessen Höhe $ab = dx$ und dessen Basis die Fläche des Querschnitts mnr ist. Wird diese Figur durch V bezeichnet, so ist $dK = Vdx$, so gross oder so klein dx genommen werden möge.

Fig. 33.



Der Beweis ist wieder sehr leicht. Die ganze Zunahme des Körpers ΔK ist grösser als der Körper, der von den Sehnen-Flächen, und kleiner als der Körper, der von den Tangenten-Flächen begrenzt wird. Wie nun auch diese begrenzenden geradlinig krummen Flächen beschaffen sein mögen, so hat doch jede ein und dasselbe Glied Vdx, und sie unterscheiden sich nur in den zweiten und in den höheren Differenzialien. Das erste Differenzial dK ist daher nothwendig gleich Vdx.

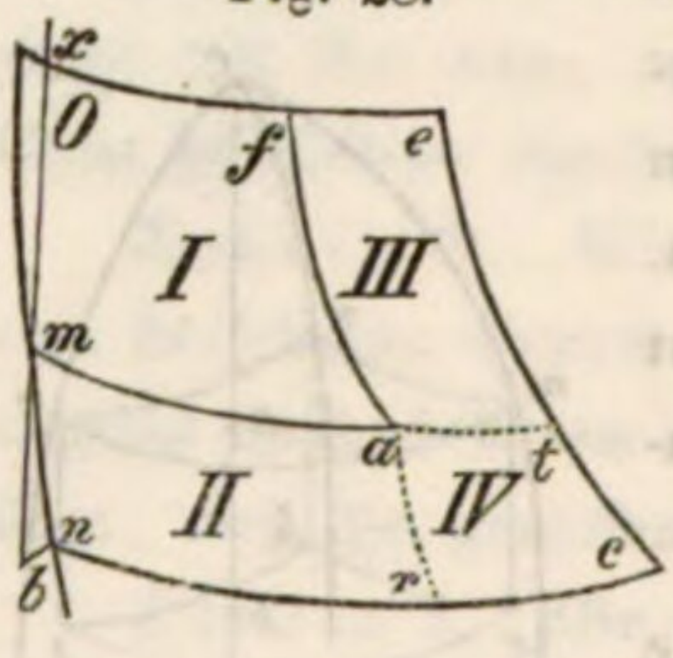
Zusatz 1. Der Grund, warum ein erstes allgemeines Differenzial der Körper möglich ist, während doch ein erstes allgemeines Differenzial der Fläche als unmöglich erkannt wurde, liegt darin, dass in die Formel die Grösse dx eintritt, die für alle Punkte dieselbe ist, während in die Planirungs-Formel die Grösse $\sqrt{dx^2 + dy_x^2}$ oder $\sqrt{dx^2 + dz_x^2}$ eintreten müsste, welche nur für Rotations- und Cylinder-Flächen, aber nicht für alle Flächen in allen Punkten denselben Werth hat.

Zusatz 2. Der Querschnitt V ist eine Function zwischen y und z, und wird nach der Formel der Quadratur ebener Curven, nach $\int_y ydz$ oder $\int_z zdy$ gefunden. — Hat man in der begrenzenden Fläche die Mittel, die Grössen y und z und ihre Differenzialien durch Functionen von x auszudrücken, so hat die Integration $K = \int_x Vdx$, welche den cubischen Inhalt der Körper ausdrückt, keine weitere Schwierigkeit.

Zusatz 3. Das Nachfolgende dient zum letzten Verständniss des Körper-Differenzials.

Sucht man den körperlichen Inhalt von $x = a$, $y = b$, $z = c$ bis $x = x$, $y = y$, $z = z$, so legt man die Coordinaten-Ebenen

Fig. 28.



durch den Punkt (a, b, c), und K ist derjenige Körper, der von den (als rückwärts verlängert gedachten Coordinaten-Figuren: $\int ydx$, $\int zdx$, $\int zdy$ und von der Fläche I begrenzt wird.

Führt man einen Querschnitt durch x, und vermehrt man x um $dx=mb$, so ist die Zunahme des Körpers oder ΔK_x derjenige Körper, dessen Höhe gleich dx, dessen obere horizontale Begrenzungs-Ebene gleich $\int zdy$, dessen untere, mit $\int zdy$ parallele Begrenzungs-Figur von den geraden Linien $y+\Delta y_x$, $z+\Delta z_x$ und von den ihnen entsprechenden Bogen eingeschlossen wird, dessen beide senkrecht stehenden Begrenzungs-Figuren von y, dx, $y+\Delta y_x$ und dem entsprechenden Bogen, ferner von z, dz, $z+\Delta z_x$ und dem entsprechenden Bogen eingeschlossen werden, der endlich von II begrenzt wird. Das erste Differenzial ist der Cylinder Vdx, dessen Basis die horizontale Figur $\int zdy$ und dessen Höhe dx ist.

Würde man einen Querschnitt durch y führen, so verhielte sich Alles auf analoge Art, man erhielte analytisch:

$$dK_y = V'dy = dy\int zdx,$$

und die ΔK_y begrenzende Fläche wäre III.

Führt man die Querschnitte durch x und y zugleich, so erhält man einen Körper, der mit einem senkrechten Parallelopipedum Aehnlichkeit hat, dessen Kanten dx (zweimal), dy (zweimal), ferner z, $z+\Delta z_x$, $z+\Delta z_y$, $z+\Delta z_{x,y}$ sind, und der schliesslich von IV begrenzt wird.

Das erste Glied dieser Zunahme ist das senkrechte Parallelopipedum, dessen Kanten z, dx, dy sind. Diess findet man auch analytisch. Denn differenzirt man $dK = dx\int zdy$, so erhält man: $zdxdy$, was der Ausdruck für das gefundene Parallelopipedum ist.

Zusatz 4. Wir haben im Zusatz 3 die Werthe dx, Δy_x, dy_x, während doch x und y in der Gleichung der Fläche von einander unabhängig sind. Diess kommt daher, weil durch die Parallelschnitte die Gleichung einer Ebene mit der Gleichung der Fläche combinirt wird. Dadurch hat man zwei Gleichungen mit drei

Unbekannten, die eine Gleichung mit zwei Unbekannten, x, y, geben, die also für den Parallelschnitt (in der Projection) von einander abhängig werden. Diess Differenzial dy_x im Parallelschnitt hat ganz und gar nichts gemein mit der unabhängigen Zunahme dy, die den Körper bedingt, der von *III* begrenzt wird.

Zusatz 5. Es ist einleuchtend, dass, wenn x und y die unabhängig Veränderlichen sind, die Coordinate z jederzeit die abhängig Veränderliche sein müsse, so dass

$$\Delta z_{x,y} = dz_{x,y} + \frac{1}{2} d^2 z_{x,y} + \frac{1}{2.3} d^3 z_{x,y} + \cdots$$

von den Werthen dx und dy zugleich abhängt.

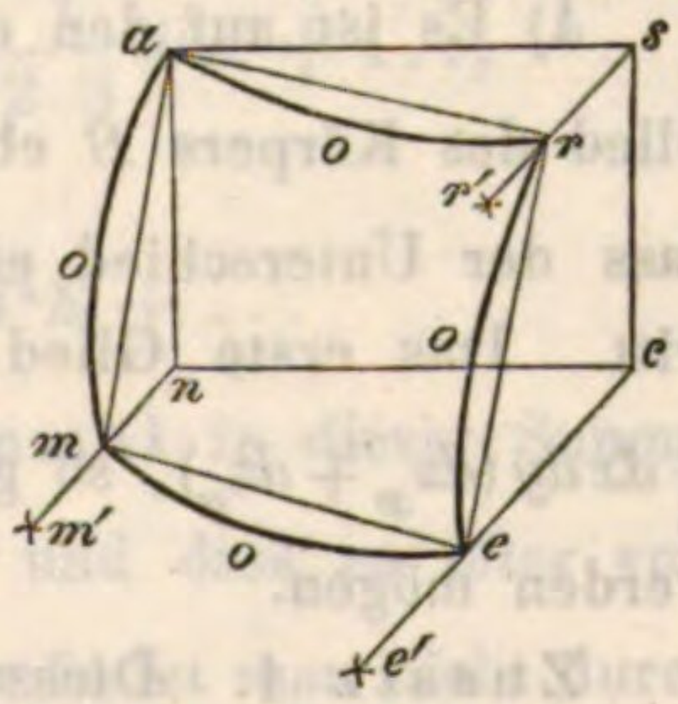
Diess ist auch in allen Theorieen des Differenzial-Calculs sowohl analytisch als geometrisch anerkannt. Es ist daher um so schwerer, sich zu erklären, wie gerade beim Differenzial der Körper die Coordinaten x, y, z miteinander als unabhängig Variable genommen werden. Diess ist eine Unbestimmtheit der gewöhnlichen Theorieen; denn eine der Variabeln muss abhängig sein, und es ist unmöglich, dass dx, dy, dz miteinander drei unabhängige, also willkührliche, d. h. constante Grössen sind.

§. 184.

Das Körper-Element.

1) Wird x um dx und zugleich y um dy vermehrt, so erhält man als Zunahme den Oben beschriebenen Körper, der von *IV* (Fig. 28.) und von den übrigen bezeichneten Figuren begrenzt wird. Will man die Zunahme dieses Körpers, d. h. schneidet man das Parallelopipedum $z\,dx\,dy$ davon weg, so ist diess der Körper (Γ), *ancsrema*, worin $an = sc = dx$, $as = nc = dy$, $mn = \Delta z_x$, $sr = \Delta z_y$, $ce = \Delta z_{x,y}$ ist. Drücken nm', sr', ce' die Linien dz_x, dz_y, $dz_{x,y}$ aus, und werden die Linien am', ar', $r'e'$ und $m'e'$ gezogen gedacht, so sind diess die Kanten eines neuen Körpers, A, der den ersten durchgängig einschliesst, während dieser ein drittes Polyëder, B, einschliesst, dessen Kanten die Sehnen am, me, er, ar, mn, ec, rs, as, sc, cn, an sind.

Fig. 34.



2) Wir wollen untersuchen, ob diese beiden Körper A und B in ihrem ersten Gliede übereinstimmen oder nicht, und ob diese in Differenzialien gegeben werden können oder nicht.

Um den Körper B zu bestimmen, denken wir die Linien ae und ac gezogen, und durch sie das Dreieck acc gelegt. Der Körper $ameca$ ist eine vierseitige Pyramide, deren Basis $mnce$ und deren Höhe dx ist. Im Viereck $mnce$ ist $nc = y$, $mn = \Delta z_x$, $ce = \Delta z_{x,y}$, und mn und ec stehen senkrecht auf nc.

Es ist daher:

$$mnce = dy \,.\, \Delta z_x + \frac{1}{2} dy (\Delta z_{x,y} - \Delta z_x),$$

und der cubische Inhalt der Pyramide I ist gleich:

$$\frac{1}{3} dx\, dy \left(\Delta z_x + \frac{1}{2} (\Delta z_{x,y} - \Delta z_x) \right).$$

Ebenso ist der cubische Inhalt der Pyramide $aecsr$, oder Pyramide II gleich:

$$\frac{1}{3} dx\, dy \left(\Delta z_y + \frac{1}{2} (\Delta z_{x,y} - \Delta z_y) \right).$$

Der cubische Inhalt von B ist demnach:

$$\frac{1}{6} dx\, dy (\Delta z_x + \Delta z_y) + \frac{1}{3} dx\, dy (\Delta z_{x,y}).$$

3) Auf gleiche Weise ist der cubische Inhalt des Körpers A gleich:

$$\frac{1}{6} dx\, dy (dz_x + dz_y) + \frac{1}{3} dx\, dy\, dz_{x,y},$$

oder, da $dz_{x,y} = dz_x + dz_y$ ist:

$$A = \frac{1}{2} dx\, dy (dz_x + dz_y).$$

4) Es ist auf den ersten Blick einleuchtend, dass das erste Glied des Körpers B ebenfalls gleich $\frac{1}{2} dx\, dy (dz_x + dz_y)$ ist, und dass der Unterschied erst in den nachfolgenden Gliedern hervortritt. Das erste Glied des Körpers Γ ist daher genau gleich $\frac{1}{2} dx\, dy (dz_x + dz_y)$, so gross oder so klein auch dx, dy genommen werden mögen.

Zusatz 1. Diess ist ein Resultat, das sich unter die Differenzialien einreiht. Denkt man sich dz_x und dz_y mit den Factoren dx und dy, also $dz_x = \frac{dz}{dx} dx$, $dz_y = \frac{dz}{dy} dy$, so ist:

$$\frac{1}{2}dx\,dy(dz_x + dz_y) = \frac{1}{2}dx^2\,dy\left|\frac{dz}{dx}\right| + \frac{1}{2}dx\,dy^2\left|\frac{dz}{dy}\right|.$$

Ist nun K eine Function von x, y, z, und z die abhängige Variable, so enthält das dritte Differenzial d^3K Glieder, die dx^3, $dx^2\,dy$, $dx\,dy^2$, dy^3 zu Factoren haben. Der Körper Γ ist daher ein Theil des dritten Differenzials. Um die andern Theile von d^3K zu finden, müsste man d^2K_x noch einmal nach x und d^2K_y noch einmal nach y differenziren, wodurch man Körper erhalten würde, deren Kanten zum Theil von tangirenden Parabeln zweiter Ordnung abhängen, während Γ derjenige Theil des dritten Differenzials ist, dessen Kanten sämmtlich von den Tangenten, die durch dz_x und dz_y bestimmt werden, abhängig sind.

Zusatz 2. Die Grösse 2Γ nennt man das Körper-Element. In den gewöhnlichen Theorieen wird statt $dx\,dy(dz_x + dz_y)$ gefunden: $dx\,dy\,dz$. Diess Resultat ist nur in dem Fall gültig, dass man sich unter dz den Werth $(dz_x + dz_y)$, also das totale Differenzial von z denkt.

Zusatz 3. Im Integral-Calcul hat man die Mittel, von dem Körper Γ zum Körper $z\,dx\,dy$ (der ein Theil des zweiten Differenzials ist), von diesem zum Körper $dx\int z\,dy$ (der ein Theil des ersten Differenzials ist), und von diesem zu $\int_x dx\int_y z\,dy = K$ zurückzugehen, wodurch der gesuchte cubische Inhalt bestimmt ist.

Daraus ist einleuchtend, was es ausdrücken soll, wenn gesagt wird: „Der Körper ist die Summe von unendlich vielen Körper-Elementen $dx\,dy\,dz$.“ So einfach geht es nicht. Der Körper ist gleich:

$$K + \Delta K = K + dK + \frac{1}{2}d^2K + \frac{1}{2.3}d^3K + \ldots,$$

und der Körper

$$\Delta K = dK + \frac{1}{2}d^2K + \frac{1}{2.3}d^3K + \ldots$$

Das Element $dx\,dy\,dz$ kommt nur einmal in dieser Summe vor, nämlich im dritten Gliede $\frac{1}{2.3}d^3K$, und dass es öfter vorkommen könne, ist unmöglich. Den Körper findet man nicht durch Summiren, sondern durch Integriren.

Zusatz 4. Wäre das Körper-Element gleich $dx\,dy\,dz$ in dem Sinne, wie es oft genommen wird, dass die Grössen dx, dy, dz,

einzeln constant, und unabhängig wären, so wären alle höheren Differenzialien der Körper gleich Null, was ganz augenscheinlich falsch ist.

Ist K der Körper, so ist $\left|\frac{dK}{dx}\right|dx$ das erste Glied des Körpers Vdx, dessen einzige krumme Fläche (in Figur 28) mit II bezeichnet ist. Eben so ist $\left|\frac{dK}{dy}\right|dy$ das erste Glied des Körpers, dessen krumme Fläche mit III bezeichnet ist. — Ferner ist $\left|\frac{d^2K}{dx^2}\right|dx^2$ der Körper, der durch Differenzirung von $\left|\frac{dK}{dx}\right|dx$ entsteht, und dessen geometrische Interpretation keine Schwierigkeit hat. Dasselbe gilt von $\left|\frac{d^2K}{dy^2}\right|dy^2$. Und $\left|\frac{d^2K}{dx\,dy}\right|dx\,dy$ ist gleich $z\,dx\,dy$, d. h. ein senkrechtes Parallelopipedum zwischen z, dx, dy. Da nun

$$\Delta K = \left|\frac{dK}{dx}\right|dx + \left|\frac{dK}{dy}\right|dy + \frac{1}{2}\left(\left|\frac{d^2K}{dx^2}\right|dx^2 + 2\left|\frac{d^2K}{dx\,dy}\right|dx\,dy + \left|\frac{d^2K}{dy^2}\right|dy^2\right) +$$

$$+ \frac{1}{2.3}\left(\left|\frac{d^3K}{dx^3}\right|dx^3 + 3\left|\frac{d^3K}{dx^2dy}\right|dx^2dy + 3\left|\frac{d^3K}{dx\,dy^2}\right|dx\,dy^2 + \left|\frac{d^3K}{dy^3}\right|dy^3\right) + ..$$

so kann jedes einzelne dieser Glieder ohne Schwierigkeit geometrisch interpretirt werden. Und zwar ist der Körper

$$\Gamma = \frac{1}{2}dx^2\,dy\left|\frac{dz}{dx}\right| + \frac{1}{2}dx\,dy^2\left|\frac{dz}{dy}\right|$$

gleich: $$\frac{1}{2.3}\left(3\left|\frac{d^3K}{dx^2\,dy}\right|dx^2\,dy + 3\left|\frac{d^3K}{dx\,dy^2}\right|dx\,dy^2\right),$$

also: $$\left|\frac{d^3K}{dx^2\,dy}\right|dx + \left|\frac{d^3K}{dx\,dy^2}\right|dy = \left|\frac{dz}{dx}\right|dx + \left|\frac{dz}{dy}\right|dy.$$

U. s. w.

Die ganze Summe aller dieser und der nachfolgenden Differenzialien ist endlich gleich dem Körper ΔK, der durch die gegebene Fläche selbst gegeben ist.

Zusatz 5. Da $\frac{1}{2.3}\left(3\left|\frac{d^3K}{dx^2dy}\right|dx^2dy + 3\left|\frac{d^3K}{dx\,dy^2}\right|dx\,dy^2\right)$ mit dem Factor $\frac{1}{2.3}.3 = \frac{1}{2}$ verbunden ist, so kann man, da bei den Differenzialien von den Zahlen-Coefficienten der einzelnen Glieder abgesehen wird, die Grösse

$$\left(\left|\frac{d^3K}{dx^2\,dy}\right|dx^2\,dy + \left|\frac{d^3K}{dx\,dy^2}\right|dx\,dy^2\right) = 2\Gamma = dx\,dy\,dz$$

das Körper-Element nennen, obgleich diess in der Taylor'schen Reihe nur als $\frac{1}{2}dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}dx\,dy\,(dz_x + dz_y)$ eintritt. Thut man

diess, so ist die Integration aller Rücksicht auf die Zahlen-Coefficienten entledigt, und braucht sich bloss in den ihr eigenthümlichen Operationen zu bewegen.

Zusatz 6. Um der blossen geometrischen Betrachtung willen würde man niemals zum Körper-Element fortschreiten, das eine dreifache und keineswegs leichte Integration verlangt, da man ja allgemeine Formeln der Cubatur hat, die nur eine zweimalige Integration, ja sogar solche, die nur eine einmalige Integration verlangen. Dieses Fortschreiten zu einem dritten Differenzial geschieht um der Aufgaben willen, die in der Mechanik gegeben sind, wenn z. B. nicht das Volumen, sondern die Masse eines Körpers verlangt wird, dessen Dichtigkeit veränderlich ist, und von den Coordinaten abhängt, so dass man Ausdrücke nöthig hat von folgender Form:

$$M = \int_x \int_y \int_z V\,dx\,dy\,dz.$$

Denn man soll die ganze Zunahme der Masse finden, die von der Zunahme der Ordinaten dx, dy, dz zugleich abhängt. Das erste analytisch angebbare Glied dieser gesuchten Zunahme kann demnach offenbar nur ein drittes Differenzial sein.

§. 185.

Die Complanations-Formel der Flächen in Polar-Coordinaten.

1) Will man statt der Formel

$$d^2S = dx\,dy\sqrt{\left(1 + \left|\frac{dz}{dx}\right|^2 + \left|\frac{dz}{dy}\right|^2\right)}$$

einen Ausdruck in Polar-Coordinaten, r, v, t, so führt man statt der unabhängigen Variabeln x und y die unabhängigen Variabeln v und t ein, wenn man r als die abhängige Variable nimmt. (Siehe §. 174.)

Man braucht nun zuerst das Product $dx\,dy$ in Werthen von

$$\left|\frac{dx}{dv}\right|dv,\quad \left|\frac{dx}{dt}\right|dt,\quad \left|\frac{dy}{dv}\right|dv,\quad \left|\frac{dy}{dt}\right|dt.$$

2) Man würde irren, wenn man die partiellen Differenzialien setzte:

$$dx = \left|\frac{dx}{dv}\right|dv + \left|\frac{dx}{dt}\right|dt;\quad dy = \left|\frac{dy}{dv}\right|dv + \left|\frac{dy}{dt}\right|dt;$$

denn in diesem Falle würde man unbewusst x und y von einander abhängig setzen, weil sie als Functionen der beiden Veränderlichen v und t genommen würden. Aber x und y sind und bleiben eben so von einander unabhängig, wie v und t.

3) Nimmt man

$$dx = \left|\frac{dx}{dv}\right| dv; \quad dy = \left|\frac{dy}{dv}\right| dv + \left|\frac{dv}{dt}\right| dt,$$

so bleiben x und y von einander unabhängig, wie auch in der That $x = r\cos v$; $y = r\sin v\cos t$ gesetzt wird, so dass y durch die beliebigen Werthe von t unabhängig von x bleibt.

4) Aber x als Function von v und t zugleich gedacht, kann nur in dem Falle von y unabhängig bleiben, wenn es als Function von v und t zugleich genommen constant bleibt, so dass es immer denselben Werth behält, welchen Werth auch y für beliebige v und t annehmen möge.

5) Diess giebt die Mittel an die Hand, das Product $dx\,dy$ zu bestimmen.

Es ist:

$$dy = \left|\frac{dy}{dv}\right| dv + \left|\frac{dy}{dt}\right| dt,$$

$$dx = \left|\frac{dx}{dv}\right| dv + \left|\frac{dx}{dt}\right| dt = 0.$$

Sucht man in der zweiten Gleichung den Werth von dv und substituirt ihn in die erste, so erhält man:

$$dy = \left|\frac{dy}{dt}\right| dt - \left|\frac{dy}{dv}\right| \left|\frac{dx}{dt}\right| dt : \frac{dx}{dv}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit der ebenfalls gültigen Gleichung $dx = \left|\frac{dx}{dv}\right| dv$, so wird:

$$dy\,dx = \left(\left|\frac{dy}{dt}\right| \left|\frac{dx}{dv}\right| - \left|\frac{dy}{dv}\right| \left|\frac{dx}{dt}\right|\right) dv\,dt, \quad = N\,dv\,dt,$$

ein Ausdruck, den man statt $dx\,dy$ in die gefundene Complanations-Formel substituiren muss.

6) Die Substitution von $\sqrt{\left(1 + \left|\frac{dz}{dx}\right|^2 + \left|\frac{dz}{dy}\right|^2\right)}$ ergiebt sich aus den Formeln des §. 174.

Es wird:

$$1 + \left|\frac{dz}{dx}\right|^2 + \left|\frac{dz}{dy}\right|^2 = \frac{N^2 + L^2 + M^2}{N^2}$$

und:

$$dxdy\sqrt{\left(1+\left|\frac{dz}{dx}\right|^2+\left|\frac{dz}{dy}\right|^2\right)} = dv\,dt\sqrt{N^2+L^2+M^2} =$$

$$= r\,dv\,dt\sqrt{\left(\right\}r^2+\left|\frac{dr}{du}\right|^2\left\{\right)\sin^2 u+\left|\frac{dr}{dt}\right|^2\Big)},$$

welches das partielle zweite Differenzial der Fläche d^2S in Ausdrücken von Polar-Coordinaten ist.

§. 186.

Die Cubatur-Formel in Polar-Coordinaten.

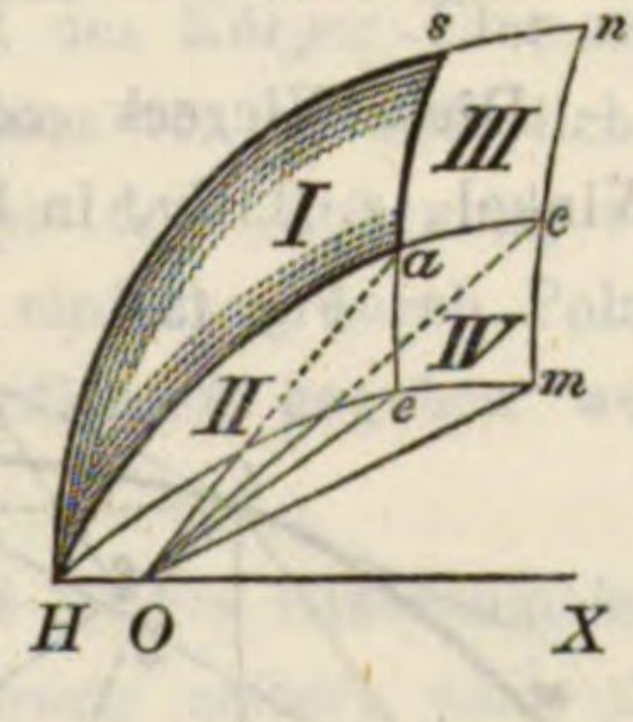
Die Substitution der Werthe dx, dy, dz in die Formel $2\Gamma = dx\,dy\,dz$ giebt:

$$2\Gamma = r^2 \sin v\, dv\, dt\, dr_{v,t}.$$

Dieses Resultat findet man auch sehr einfach aus folgender geometrischen Betrachtung.

1) Es sei eine Fläche Hsa (I) gegeben, die von $v=\alpha$ bis $v=v$, und von $t=\beta$ bis $t=t$ geht, und worin a den Punkt (r, v, t) bezeichnet. Der Winkel Hoa sei v. Wird v um dv vermehrt, so nimmt der Bogen Ha um ac, und die Fläche I nimmt um Fläche III zu. Wird Winkel t um dt vermehrt, so nimmt der Bogen sa um ae, und Fläche I um Fläche II zu. Der Punkt m ist der Punkt $(r+dr_{v,t},\ v+dv,\ t+dt)$, und die ganze Zunahme der Fläche ΔS ist gleich $(II+III+IV)$.

Fig. 35.



Der Körper K ist eine Pyramide, die ihre Basis in I und ihre Spitze in O hat, und die ganze Zunahme des Körpers, oder ΔK, ist gleich der Summe der drei Pyramiden, die ihre Spitze in O und ihre Basis beziehungsweise in II, in III und in IV haben.

Nun ist:

$$\Delta K = \left|\frac{dK}{dv}\right|dv+\left|\frac{dK}{dt}\right|dt+\frac{1}{2}\left(\left|\frac{d^2K}{dv^2}\right|dv^2+2\left|\frac{d^2K}{dv\,dt}\right|dv\,dt+\left|\frac{d^2K}{dt^2}\right|dt^2\right)+..$$

Die Pyramide, deren Basis III ist, enthält die Glieder:

$$\left|\frac{dK}{dv}\right|dv+\frac{1}{2}\left|\frac{d^2K}{dv^2}\right|dv^2+\frac{1}{2.3}\left|\frac{d^3K}{dv^3}\right|dv^3+..$$

Die Pyramide, deren Basis *II* ist, enthält die Glieder:

$$\left|\frac{dK}{dt}\right| dt + \frac{1}{2}\left|\frac{d^2K}{dt^2}\right| dt^2 + \frac{1}{2.3}\left|\frac{d^3K}{dt^3}\right| dt^3 + \ldots,$$

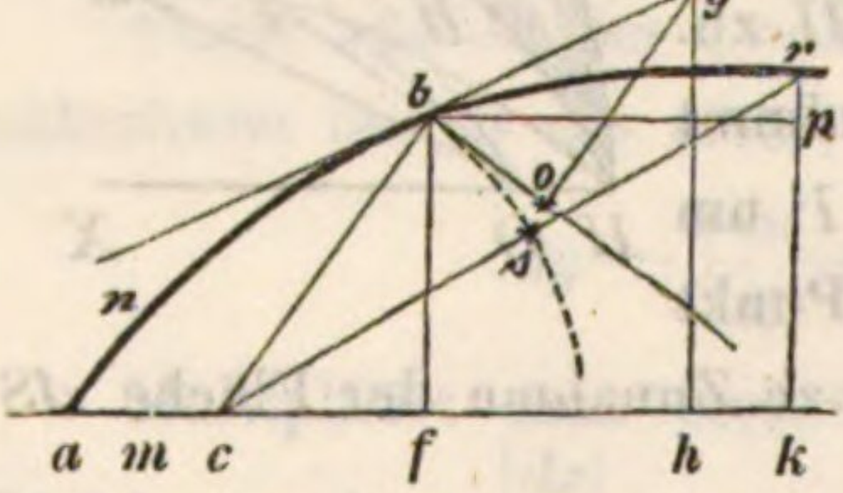
und die Pyramide, deren Basis *IV* ist, enthält die Glieder:

$$\left|\frac{d^2K}{dv\,dt}\right| dv\,dt + \frac{1}{2}\left(\left|\frac{d^3K}{dv^2\,dt}\right| dv^2\,dt + \left|\frac{d^3K}{dv\,dt^2}\right| dv\,dt^2\right) + \ldots,$$

wobei vorausgesetzt wird, dass r als Function von v und t genommen, also $dr = \left|\frac{dr}{dv}\right| dv + \left|\frac{dr}{dt}\right| dt$ etc. gesetzt ist, so dass nur die Factoren dv und dt eintreten, und dass die Differenzialien dr, d^2r etc. durch dv, dt ausgedrückt werden.

2) Lassen wir die Pyramiden *II* und *III*, die das erste Differenzial geben können, ausser unsrer Untersuchung, und wenden wir uns zur Pyramide *IV*, so ist ihre Basis das Viereck *aecm*.

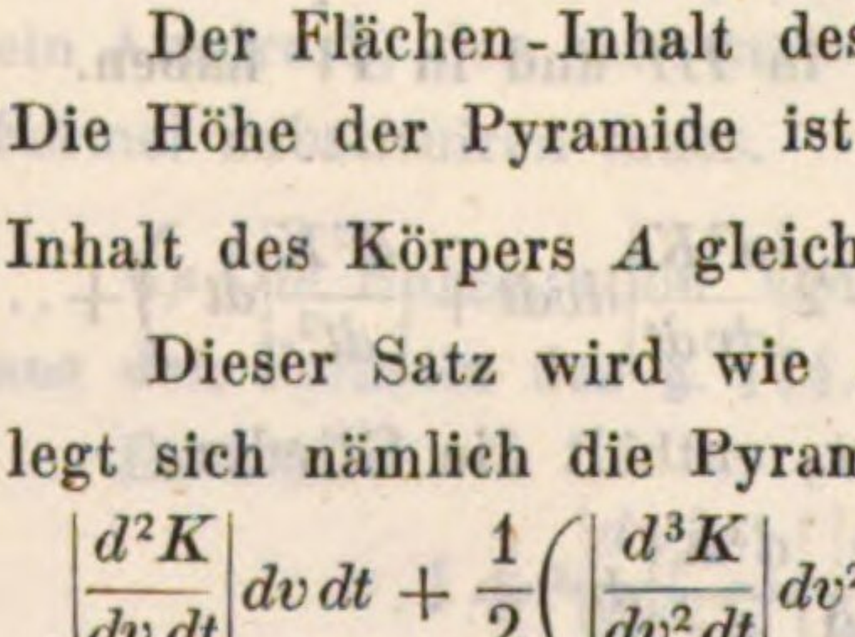
Fig. 36.



Diese Pyramide zerlegt sich in eine wohlgeordnete Reihe von Gliedern, und es ist leicht einzusehen, dass das erste Glied eine Pyramide *A* ist, deren Basis das Viereck *ecab* ist, und deren Spitze in *O* ist.

Diess Viereck *ecab* findet man, wenn man die Zunahme der Winkel, z. B. dv, in Kreisbogen *bs* oder in Tangenten *bo* ausdrückt.

Fig. 15.



Nimmt man die Zunahme des einen Winkels in Kreisbogen, die des andern in Tangenten, so erhält man ein cylindrisches Viereck, nimmt man beide in Tangenten, so erhält man ein rechtwinkeliges Viereck. Diese Bogen (oder Tangenten) stehen beide auf $r = cb$ senkrecht. Aber sie stehen auch senkrecht aufeinander, weil (Fig. 26) die Ebenen, in denen die Winkel v und t genommen werden, aufeinander senkrecht stehen.

Der Flächen-Inhalt des Vierecks ist demnach $r\,dv \,.\, r \sin v\,dt$. Die Höhe der Pyramide ist gleich r; es ist daher der cubische Inhalt des Körpers *A* gleich $\frac{1}{3} r^3 \sin v\,dv\,dt$.

Dieser Satz wird wie alle übrigen Sätze bewiesen. Es zerlegt sich nämlich die Pyramide *IV* in die Reihe der Glieder:

$$\left|\frac{d^2K}{dv\,dt}\right| dv\,dt + \frac{1}{2}\left(\left|\frac{d^3K}{dv^2\,dt}\right| dv^2\,dt + \left|\frac{d^3K}{dv\,dt^2}\right| dv\,dt^2\right) + \frac{1}{2.3}(\ldots) + \ldots$$

und Pyramide A ist die einzige Pyramide, die $dv\,dt$ zum Factor hat, indem die übrigen Pyramiden der ganzen Reihe die Factoren $dv^2\,dt$, $dv\,dt^2$, $dv^3\,dt$ etc. haben. Man führt den Beweis wieder mittelst Sehnen- und Tangenten-Ebenen, wodurch man zwei Pyramiden erhält, zwischen welchen die Pyramide IV liegt.

3) Sucht man nun das Körper-Element selbst, so ist das Differenzial in Beziehung auf r gleich

$$d\left(\frac{1}{3}r^3 \sin v\, dv\, dt\right) = r^2 \sin v\, dv\, dt\, dr_{v,t} =$$

$$= r^2 \sin v \left|\frac{dr}{dv}\right| dv^2\, dt + r^2 \sin v \left|\frac{dr}{dt}\right| dv\, dt^2.$$

Geometrisch ist diess entweder ein senkrechtes Parallelopipedum, dessen drei aufeinanderstehende Kanten folgende sind: $r\,dv$, $r \sin v dt$, $dr_{v,t}$, oder ein Körper, dessen senkrechte Höhe gleich $dr_{v,t}$, und dessen cylindrische Grundfläche gleich $rdv \times r \sin v dt$ ist. Der Werth $dr_{v,t}$ ist in Fig. 15 geometrisch gegeben, indem dort einzeln $\left|\frac{dr}{dv}\right| dv$ und $\left|\frac{dr}{dt}\right| dt$ construirt sind.

Zusatz 1. Vorzüglich diese Formel des Körper-Elements dient zur Bestimmung der Masse eines Körpers von veränderlicher Dichtigkeit, da diese meistens eine Function der Entfernung von einem Punkte O ist, deren Ausdruck also einfacher durch Polar-Coordinaten als durch rechtwinkelige Coordinaten gegeben werden kann.

Zusatz 2. Will man die vierten und höhern Differenzialien des Körpers, so hat weder die Differenzirung selbst, noch die geometrische Interpretation ihrer Resultate eine Schwierigkeit, da man alle Grössen, die in diesen Differenzialien vorkommen, einzeln kennt. Sie enthalten nämlich nur Ausdrücke, wie $d^n r_{v,t}$, und die Differenzialien des Radius kann man sämmtlich entweder aus den tangirenden Parabeln oder aus den tangirenden Spiralen ableiten.

Cap. XXIII.

Die Anwendung des Differenzial-Calculs auf Curven von doppelter Krümmung.

§. 187.

Analyse der Aufgaben, die bei diesen Untersuchungen vorkommen.

Die Curven von doppelter Krümmung sind Durchschnitts-Linien zweier Flächen. Zum Unterschiede von ebenen Curven werden sie auch räumliche Curven genannt.

Durchschneiden sich zwei Flächen, so sind zwei Gleichungen gegeben: $u = f(x, y, z)$, $v = \varphi(x, y, z)$.

Das Zusammenbestehen dieser Gleichungen, also dass beide zugleich gelten, giebt die Durchschnitts-Curve, die auch beiden Flächen gemeinschaftlich ist. Es wird daher die Curve im Raume durch die Gleichungen der beiden Flächen charakterisirt, deren Durchschnittslinie sie ist. Durch eine einzige Gleichung kann sie nicht ausgedrückt werden. Alle Punkte, die den Coordinaten x, y, z in beiden Flächen entsprechen, sind eben so viele Punkte der Durchschnitts-Curve, woraus folgt, dass diese durch jene beiden Gleichungen in allen ihren Punkten vollkommen bestimmt ist. — Dasselbe gilt, wenn die Flächen in Polar-Coordinaten gegeben sind.

Ist die eine dieser Flächen eine Ebene, so ist die Curve eine ebene Curve im Raume, und jede ebene Curve kann als ein Durchschnitt zweier Flächen, deren eine eine Ebene ist, betrachtet werden, z. B. der Kreis, als Durchschnitts-Linie einer Ebene und einer Kugel-Oberfläche.

Bei Curven doppelter Krümmung finden zwei Gleichungen zwischen drei Veränderlichen statt, es müssen daher zwei Ordinaten, z. B. y und z, abhängig veränderlich sein, und nur eine, z. B. x, kann unabhängig veränderlich sein. Für beliebige und unabhängige Zunahmen von x erfolgen ganz abhängige Zunahmen der beiden andern Coordinaten, Δy_x und Δz_x zugleich.

Eliminirt man aus den beiden Gleichungen:

$$u = f(x, y, z) = 0 \quad \text{und} \quad v = \varphi(x, y, z) = 0$$

die eine Veränderliche, z. B. z, so erfolgt eine Gleichung zwischen x und y, $y = fx$; eliminirt man die andere Veränderliche y, so erfolgt eine Gleichung zwischen x und z, $z = \varphi x$. Diese beiden Gleichungen nennt man die Projectionen der Curve auf die Ebenen XY und XZ. Und sie sind es auch. Denn fällt man von allen Punkten der Curve senkrechte Linien auf die Ebene XY, so beschreiben die Fusspunkte dieser Senkrechten eine ebene Curve, welche die Projection der gegebenen Curve in der Ebene XY ist, und für welche die Gleichung $y = fx$ stattfindet, die man erhält, wenn man in beiden Gleichungen $u = 0$, $v = 0$ die Veränderliche z eliminirt. Dasselbe gilt von der Projection auf der Ebene XZ. Die Senkrechten, die von allen Punkten der Curve auf die Ebenen XY und XZ gefällt werden, geben Cylinder-Flächen, deren Leitlinien die Projectionen $y = fx$, $z = \varphi x$ sind. Es können daher auch alle Curven im Raume als Durchschnitte zweier Cylinder-Flächen betrachtet werden, die man erhält, wenn man aus den beiden gegebenen Gleichungen $u = 0$, $v = 0$ die neuen Gleichungen $y = fx$, $z = \varphi x$ ableitet.

In dieser Auffassung der Curven doppelter Krümmung werden alle Aufgaben ausserordentlich leicht, ja sie sind in der Theorie der ebenen Curven bereits gelöst, so dass ihre Resultate fast nur aufgezählt zu werden brauchen.

Die Aufgaben, die gelöst werden sollen, sind aber folgende:

1) Die Bestimmung der ersten, zweiten und höhern Differenzialien der Ordinaten, und der von ihren Werthen abhängigen singulären Punkte der Curven;
2) die Gleichungen der Tangenten und Asymptoten;
3) die Gleichungen der Normal-Ebenen und der Normalen;
4) die Rectification der Curven;
5) die Gleichung der osculirenden Ebene.

Die Gleichungen der osculirenden Kreise nebst den von diesen abhängigen Evoluten gehören in das Gebiet der Anwendungen, können aber wegen ihrer nahen Beziehung zur osculirenden Ebene sogleich hier behandelt werden.

Weitere Aufgaben kommen nicht vor. So tritt z. B. nicht die Aufgabe der Quadratur ein, wie diess bei ebenen Curven der Fall ist. Denn betrachtet man z. B. die Fläche, die entsteht, wenn von allen Punkten der Curve gerade oder krumme Linien an eine Axe X gezogen werden, wie z. B. bei der Schrauben-Fläche, so werden diese Flächen nach irgend einem gegebenen Gesetze gebildet, d. h. sie sind geradlinig krumme oder doppelt krumme Flächen, und ihre Quadratur (Complanation) ist im vorhergehenden Capitel bereits gefunden worden. Dasselbe ist der Fall mit dem Probleme der Cubatur. Und somit lassen sich alle Aufgaben, die auf die Curven doppelter Krümmung Bezug haben, sehr leicht überschauen.

§. 188.

Die Differenzialien der Coordinaten der räumlichen Curven.

Wird die unabhängig veränderliche Abscisse x um eine beliebige Grösse dx vermehrt, so sind die Zunahmen der Ordinaten y und z beziehungsweise Δy_x und Δz_x, und $\big((x+dx), (y+\Delta y_x), (z+\Delta z_x)\big)$ ist der Punkt der Curve, welche der Abscisse $(x+dx)$ entspricht. Es ist nun die Frage, was die Differenzialien dy_x, d^2y_x, ... dz_x, d^2z_x .. einzeln sind.

Wenn wir unsere frühere Terminologie beibehalten, so ist die Antwort darauf folgende:

1) Das erste Differenzial dy_x ist die Verlängerung zur Tangente in der Projection auf XY, eben so ist in dieser Projection die Grösse $\frac{1}{2}d^2y_x$ die Verlängerung zur tangirenden Parabel zweiter Ordnung; $\frac{1}{2.3}d^3y_x$ die Verlängerung zur tangirenden Parabel dritter Ordnung u. s. w.

2) In der Projection auf die Ebene XZ ist dz_x die Verlängerung der Ordinate z zur Tangente; $\frac{1}{2}d^2z_x$ die Verlängerung

zur tangirenden Parabel zweiter Ordnung; $\frac{1}{2.3}d^3z_x$ die Verlängerung zur tangirenden Parabel dritter Ordnung u. s. w.

3) Werden an allen Punkten dieser Tangenten und tangirenden Parabeln senkrechte Linien errichtet, also cylindrische Flächen construirt, deren Leitlinien die Tangenten und tangirenden Parabeln sind (und auch die Ebene ist bekanntlich eine cylindrische Fläche), so geben die Durchschnitts-Curven dieser auf den Ebenen XY und XZ senkrecht stehenden cylindrischen Flächen diejenigen Curven, welche in ihren verschiedenen Combinationen die Differenzialien von y und z einzeln enthalten.

a) Die gegebene Curve enthält alle Punkte x, y, z, oder, was dasselbe ist, $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$.

b) Die Durchschnitts-Curve der beiden Tangenten-Flächen (Ebenen) ist die gerade Linie, welche die Tangente der gegebenen räumlichen Curve ist, in der also alle Punkte $(x+dx)$, $(y+dy_x)$, $(z+dz_x)$ liegen.

c) Die Durchschnitts-Curve der Tangenten-Ebene auf XY und der parabolischen Cylinder-Ebene zweiter Ordnung auf XZ giebt eine räumliche Curve, welche alle Punkte $(x+dx)$, $(y+dy_x)$, $\left(z+dz_x+\frac{1}{2}d^2z_x\right)$ enthält.

d) Die Durchschnitts-Curve der Tangenten-Ebene auf XZ und der parabolischen Cylinder-Ebene zweiter Ordnung auf XY giebt eine räumliche Curve, welche alle Punkte $(x+dx)$, $\left(y+dy_x+\frac{1}{2}d^2y\right)$, $(z+dz_x)$ enthält.

e) Die Durchschnitts-Curve der beiden parabolischen Cylinder-Ebenen zweiter Ordnung giebt eine Curve doppelter Krümmung, die alle Punkte $(x+dx)$, $\left(y+dy_x+\frac{1}{2}d^2y_x\right)$, $\left(z+dz_x+\frac{1}{2}d^2z_x\right)$ enthält.

Diese letztere Curve ist näher an der gegebenen Curve als die Curven *c*) und *d*). — Diese tangirenden Curven doppelter Krümmung haben keine besondere Benennung; man könnte sie etwa Paraboloinen nennen, so dass die Curve *e*) die tangirende Paraboloine zweiter Ordnung wäre. Eben so könnte man die tangirenden Paraboloinen dritter und höherer Ordnung durch eigene Benennung auszeichnen.

Die geometrische Construction aller Curven, welche die höheren Differenzialien der Ordinaten y und z in allen ihren möglichen Combinationen enthalten, hat keine Schwierigkeit, da die geometrische Interpretation dieser Differenzialien für ebene Curven gegeben ist.

Auf gleiche Weise werden die singulären Punkte und die Gleichungen der Tangenten und Asymptoten bestimmt. Man sucht die Werthe von x, y und z, welche für die Projectionen, die ebene Curven sind, singuläre Werthe geben, und die so gefundenen Werthe bestimmen auch die singulären Punkte der räumlichen Curve.

§. 189.

Gleichungen der Tangenten und Asymptoten.

1) Die tangirende Parabel n^{ter} Ordnung in der Ebene XY hat die Gleichung:

$$(\eta - y) = \frac{dy}{dx}(\xi - x) + \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}(\xi - x)^2 + .. + \frac{1}{1.2..n}\frac{d^ny}{dx^n}(\xi - x)^n.$$

Die tangirende Parabel n^{ter} Ordnung in der Ebene XZ hat die Gleichung:

$$(\zeta - z) = \frac{dz}{dx}(\xi - x) + \frac{1}{2}\frac{d^2z}{dx^2}(\xi - x)^2 + .. + \frac{1}{1.2..n}\frac{d^nz}{dx^n}(\xi - x)^n.$$

Diese Gleichungen repräsentiren Cylinder-Flächen, deren Durchschnitt eine Curve ist, welche die Differenzialien bis zu d^ny_x und d^ny_z enthält.

Brechen diese Gleichungen mit dem zweiten Gliede ab, so entstehen die Formeln:

$$(\eta - y) = \frac{dy}{dx}(\xi - x); \quad (\zeta - z) = \frac{dz}{dx}(\xi - x),$$

welche die beiden Gleichungen der Tangente für die Curve doppelter Krümmung sind, und worin x, y, z den gegebenen Punkt der Curve ausdrücken, während ξ, η, ζ die Ordinaten der geraden Linie im Raume sind, welche die gegebene Curve im Punkte x, y, z tangirt.

Der Beweis dieser Sätze ist so einfach, dass er füglich übergangen werden kann.

Alle Lehrsätze über Tangirungen der Curven, die Probleme, sowohl zu einem gegebenen Punkte der Curve, als auch von einem ausserhalb der Curve gegebenen Punkte Tangenten zu dieser zu

ziehen, können einfach aus der Theorie der ebenen Curven herübergenommen werden.

2) Um die Asymptote einer Curve doppelter Krümmung zu bestimmen, untersucht man, ob ihre beiden Projectionen Asymptoten haben und welche sie haben. Die beiden Gleichungen, welche hervorgehen, geben dann die Asymptoten der Curve. Diese beiden Gleichungen repräsentiren zwei Ebenen, die beziehungsweise auf XY und XZ senkrecht stehen, und deren Durchschnitts-Linie die gesuchte Asymptote ist. Zur Bestimmung der Asymptoten braucht man die Werthe $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$. Da es oft schwierig und oft unmöglich ist, die beiden Gleichungen $u=0$, $v=0$ nach y oder z aufzulösen, so bestimmt man am einfachsten die gesuchten Werthe $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ durch die partiellen Differenzialien $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$, $\frac{dv}{dx}$ etc.

Es ist nämlich, wie bekannt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left|\frac{du}{dx}\right|\left|\frac{dv}{dz}\right| - \left|\frac{dv}{dx}\right|\left|\frac{du}{dz}\right|}{\left|\frac{dv}{dy}\right|\left|\frac{du}{dz}\right| - \left|\frac{du}{dy}\right|\left|\frac{dv}{dz}\right|},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\left|\frac{du}{dx}\right|\left|\frac{dv}{dy}\right| - \left|\frac{dv}{dx}\right|\left|\frac{du}{dy}\right|}{\left|\frac{dv}{dz}\right|\left|\frac{du}{dy}\right| - \left|\frac{du}{dz}\right|\left|\frac{dv}{dy}\right|}.$$

Giebt wohl eine Projection eine Asymptoten-Gleichung, hingegen die andere Projection nicht, so hat die Curve überhaupt keine Asymptote. Dasselbe gilt, wenn keine der beiden Projectionen Asymptoten hat. Findet man für jede Projection mehrere Asymptoten, so giebt das System der zusammenbestehenden Werthe die Anzahl der möglichen Asymptoten der Curve.

Beispiele zur Verdeutlichung.

Beispiel 1. Es sei die Curve gegeben:

$$u = z^3 - x^3 - y^3 - a^3 = 0,$$
$$v = y^2(bx + x^2) - \frac{1}{4}b^2x^2 = 0.$$

Diese zwei Gleichungen drücken zwei Flächen aus; die Gleichung $v=0$ ist eine cylindrische Fläche, die senkrecht auf der

Ebene XY und parallel mit Z ist, und deren Projection auf der Ebene XY die Gleichung $v=0$ angiebt. Die erstere Fläche u ist eine leicht construirbare Fläche; die Ordinate z wächst mit den Werthen x und y. Für $x=0$ und $y=0$ wird $z=a$, die Fläche geht also nicht durch den Anfangspunkt O der Coordinaten. Sie bleibt um $z=a$ über demselben, und erhöht sich fortwährend über die Ebene XY. — Der Durchschnitt beider Flächen stellt die gegebene Curve dar.

Bestimmung der Asymptoten. Da

$$\left|\frac{du}{dx}\right| = -3x^2; \quad \left|\frac{du}{dy}\right| = -3y^2; \quad \left|\frac{du}{dz}\right| = 3z^2;$$

$$\left|\frac{dv}{dx}\right| = y^2(b+2x) - \frac{1}{2}b^2x; \quad \left|\frac{dv}{dy}\right| = 2yx(b+x); \quad \left|\frac{dv}{dz}\right| = 0,$$

so ist:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y(b+2x)}{2x(b+x)} + \frac{1}{4}\frac{b^2}{y(b+x)}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x^2}{z^2} - \frac{y^3}{2xz^2}\cdot\frac{b+2x}{b+x} + \frac{1}{4}\frac{b^2y}{z^2(b+x)}.$$

Für $x=\infty$ wird $\frac{dy}{dx}=\frac{\eta}{\xi}$, $\frac{dz}{dx}=\frac{\zeta}{\xi}$; es ist daher:

$$\frac{\eta}{\xi} = -\frac{y}{2x}\cdot\left(\frac{\frac{b}{x}+2}{\frac{b}{x}+1}\right) + \frac{1}{4}\frac{b^2}{x}\cdot\frac{1}{y\left(\frac{b}{x}+1\right)}$$

$$= -\frac{2y}{2x},$$

oder, da für $x=\infty$, abgesehen von den Constanten, $\frac{\eta}{\xi}=\frac{y}{x}$ ist, so ist: $\frac{\eta}{\xi}=-\frac{\eta}{\xi}$, $\frac{\eta}{\xi}=0$, oder die Asymptoten sind parallel mit der Ebene XZ, ihre Projection parallel mit der Axe X.

Ferner ist:

$$\frac{\zeta}{\xi} = \frac{x^2}{z^2} - \frac{\frac{y^3}{x^3}}{\frac{2z^2}{x^2}}\left(\frac{\frac{b}{x}+2}{\frac{b}{x}+1}\right) + \frac{1}{4}\frac{b^2y}{x}\cdot\frac{1}{z^2\left(1+\frac{b}{x}\right)}.$$

Da für $x=\infty$ die Werthe $\frac{y}{x}=\frac{\eta}{\xi}=0$ und $\frac{z}{x}=\frac{\zeta}{\xi}$ eintreten, so ist:

$$\frac{\zeta}{\xi}=\frac{\xi^2}{\zeta^2}, \quad \frac{\zeta^3}{\xi^3}=1, \quad \frac{\zeta}{\xi}=1.$$

Damit die Constanten bestimmt werden, substituirt man $y = \frac{\eta}{\xi} x + m$, also:

$$y = m; \quad z = \frac{\zeta}{\xi} x + \mu; \quad z = x + \mu,$$

in die gegebenen Gleichungen.

Die zweite Gleichung $v = 0$ giebt den Werth $m = \pm \frac{b}{2}$ und die erste Gleichung giebt daraus den Werth $\mu = 0$. Die beiden Gleichungen der Asymptote sind also: $\eta = \pm \frac{b}{2}$, $\zeta = \xi$.

Die Curve hat also zwei Zweige und zwei Asymptoten, die in gleichen Entfernungen rechts und links von der Coordinaten-Ebene XZ mit ihr parallel laufen, die Axe Y selber in der Entfernung $y = \pm \frac{b}{2}$ durchschneiden, und den rechten Winkel der Ordinaten x, z im Punkte $y = \pm \frac{b}{2}$ halbiren. Beide Asymptoten liegen in einer und derselben Ebene. In der nämlichen Ebene liegen aber alle Asymptoten, wenn die Constante b variirt. Diese Ebene ist die Asymptoten-Ebene, die also ganz in der Axe Y liegt und den Raum zwischen X und Z halbirt.

Beispiel 2. Es seien die Gleichungen der Curve gegeben:

$$u = z^3 + x^3 + y^3 - a^3 = 0,$$
$$v = xy + yz + xz - b^2 = 0;$$

es sollen ihre Asymptoten bestimmt werden.

Da $\frac{du}{dx} = 3x^2$, $\frac{du}{dy} = 3y^2$, $\frac{du}{dz} = 3z^2$;

$\frac{dv}{dx} = y + z$; $\frac{dv}{dy} = x + z$; $\frac{dv}{dz} = x + y$ ist,

so wird:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{z^2(y+z) - x^2(x+y)}{y^2(x+y) - z^2(x+z)} = \frac{\frac{z^2}{x^2}\left(\frac{y}{x} + \frac{z}{x}\right) - \left(1 + \frac{y}{x}\right)}{\frac{y^2}{x^2}\left(1 + \frac{y}{x}\right) - \frac{z^2}{x^2}\left(1 + \frac{z}{x}\right)};$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x^2(x+z) - y^2(y+z)}{y^2(x+y) - z^2(x+z)} = \frac{1 + \frac{z}{x} - \frac{y^2}{x^2}\left(\frac{y}{x} + \frac{z}{x}\right)}{\frac{y^2}{x^2}\left(1 + \frac{y}{x}\right) - \frac{z^2}{x^2}\left(1 + \frac{z}{x}\right)}.$$

Da in beiden Gleichungen der Curve die Grössen x, y, z beliebig vertauscht werden können, ohne dass die Gleichungen ver-

ändert werden, da also diese beiden Gleichungen symmetrische Functionen der drei Coordinaten sind, so müssen $\frac{z}{x}$, $\frac{y}{x}$, $\frac{z}{y}$ einander gleich sein.

Setzt man sie in den Gleichungen $\frac{dy}{dx} = \frac{\eta}{\xi} = \frac{\zeta}{\xi} = \frac{dz}{dx}$ einander gleich, also jeden dieser Werthe z. B. $= \frac{\eta}{\xi}$, so erhält man aus der ersten Gleichung:

$$\frac{2\eta^3}{\xi^3} - 1 - \frac{\eta}{\xi} = 0,$$

und aus der zweiten:

$$1 + \frac{\eta}{\xi} - \frac{2\eta^3}{\xi^3} = 0,$$

also aus beiden Gleichungen übereinstimmend den einzigen reellen Werth: $\frac{\eta}{\xi} = 1 = \frac{\zeta}{\xi}$.

In der That überzeugt man sich leicht, dass, wenn man in den beiden Gleichungen $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ die eine dieser Grössen, z. B. $\frac{dy}{dx} = 1 = \frac{\eta}{\xi}$ setzt, für die andere Grösse auch nur der einzige reelle Werth $= 1$ gefunden wird. Denn die erste Gleichung giebt dann:

$$1 = \frac{\frac{\zeta^2}{\xi^2} + \frac{\zeta^3}{\xi^3} - 2}{2 - \frac{\zeta^2}{\xi^2} - \frac{\zeta^3}{\xi^3}} \quad \text{oder} \quad \frac{\zeta^3}{\xi^3} + \frac{\zeta^2}{\xi^2} - 2 = 0,$$

also $\frac{\zeta}{\xi} = 1$; die beiden andern Werthe sind imaginär. Die zweite Gleichung giebt:

$$\frac{\zeta}{\xi} = \frac{1 + \frac{\zeta}{\xi} - 1 - \frac{\zeta}{\xi}}{2 - \frac{\zeta^2}{\xi^2} - \frac{\zeta^3}{\xi^3}}; \quad \text{also:} \quad \left(\frac{\zeta^3}{\xi^3} + \frac{\zeta^2}{\xi^2} - 2\right)\frac{\zeta}{\xi} = 0,$$

die mit der früheren Gleichung übereinstimmt.

Darum müssen auch die beiden imaginären Werthe von $\frac{\eta}{\xi}$ mit den beiden imaginären Werthen von $\frac{\zeta}{\xi}$ übereinstimmen.

Da $\frac{\eta}{\xi} = 1$, $\frac{\zeta}{\xi} = 1$, so ist auch $\frac{\eta}{\zeta} = 1$. Je zwei von diesen Gleichungen bestimmen die Asymptote der Curve vollständig, da die Constanten gleich Null sind. — Die geometrische Con-

struction dieser Asymptote ist höchst einfach. Construirt man im Anfangspunkt der Coordinaten O einen Cubus aus drei gleichen Längen der Axen X, Y, Z, so fällt die durch O gehende Diagonale des Cubus mit der Asymptote zusammen.

§. 190.

Gleichung der Normal-Ebene.

Jede gerade Linie, die auf der Tangente senkrecht steht, ist eine Normale. Da die Tangente eine Linie im Raume ist, so können ringsherum in einem und demselben Punkte unzählig viele Linien auf ihr senkrecht stehen. Es giebt daher nicht eine, sondern unzählig viele Normalen zu jedem Punkte einer Curve, die sämmtlich in einer und derselben Ebene liegen. Diese Ebene, die auf der Tangente senkrecht steht, wird die Normal-Ebene genannt. Wird eine bestimmte Normale verlangt, so muss noch eine zweite Ebene gegeben sein, die ebenfalls durch den Punkt x, y, z geht, und deren Durchschnitts-Linie mit der Normal-Ebene die verlangte Normale giebt.

Da die Normal-Ebene auf der Tangente senkrecht steht, und da die Gleichungen der Tangente

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x); \quad (\zeta - z) = \frac{dz}{dx}(\xi - x)$$

bekannt sind, so ist die Gleichung der Normal-Ebene nach bekannten Lehren der analytischen Geometrie:

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy_x + (\zeta - z)\,dz_x = 0.$$

Zusatz. Für verwickelt gegebene Gleichungen der Flächen $u = f(x, y, z) = 0$, $v = \varphi(x, y, z) = 0$ stellt man die Werthe dy_x und dz_x durch die Ausdrücke der partiellen Differenzialien von u und v her, wie sie im vorhergehenden §. gegeben sind.

§. 191.

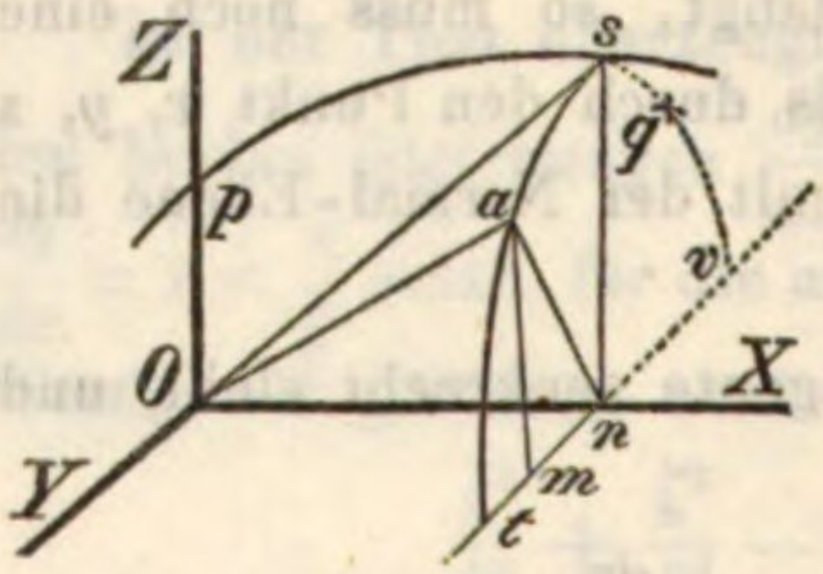
Die Polar-Coordinaten für Curven doppelter Krümmung.

1) Wenn zwei Flächen in Polar-Coordinaten gegeben sind, so giebt ihre Durchschnitts-Linie eine Curve doppelter Krümmung. Die beiden Gleichungen: $f(r, v, t) = 0$ und $\varphi(r, v, t) = 0$ sind

die Gleichungen der Curve. In ihnen ist nur eine Coordinate, etwa r, die unabhängig Veränderliche; denn es sind zwei Gleichungen mit drei Unbekannten gegeben, aus welchen durch Elimination von v oder t die zwei neuen Gleichungen: $\psi(r, v) = 0$, $\Psi(r, t) = 0$ gebildet werden, in welchen v und t zu gleicher Zeit von r abhängig sind.

2) Im geradlinigen Coordinaten-System sind die zwei neugebildeten Gleichungen $\psi(x, y) = 0$, $\Psi(x, z) = 0$, wie bekannt, die Projectionen auf den Ebenen XY und XZ, und als Flächen sind sie Cylinder-Flächen, die auf diesen Ebenen senkrecht stehen. Was sind denn diese beiden neugebildeten Gleichungen $\psi(r, v) = 0$, $\Psi(r, t) = 0$ im Polar-Coordinaten-System? — Dass sie nicht Projectionen, noch auch cylindrische Flächen sind, ist einleuchtend. Sie sind Rotations-Flächen. Und zwar ist, wenn die Curve *sat* einen Kreisbogen ausdrückt, und wenn $\angle aOn = v$ gesetzt wird: $\psi(r, v) = 0$ eine Rotations-Fläche, die durch Umdrehung der Curve ps um die Axe OX entsteht; und ist $\angle anm = t$, so ist $\Psi(r, t) = 0$ die Rotations-Fläche, die durch Umdrehung einer entsprechenden Curve um die Axe OY entsteht.

Fig. 26.



Diess sehen wir a priori ein, so dass es nicht nöthig ist, auf weitläufige Untersuchungen über die Rotations-Flächen einzugehen. Denn Gleichung $\psi(r, v) = 0$ giebt eine Fläche, in welcher r und v von t unabhängig sind. Das ist bei Rotations-Flächen der Fall. Der Winkel, den eine Sehne mit der Rotations-Axe macht, ist ringsherum um die Axe in allen vom Winkel t abhängigen Lagen einer und derselbe. Dasselbe gilt von der Fläche, welche die Gleichung $\Psi(r, t) = 0$ hat.

Was die cylindrischen Projections-Flächen für die rechtwinkeligen Coordinaten, das sind die Rotations-Flächen für die Polar-Coordinaten.

Wir könnten nun die Differenzialien der Winkel und des Radius genuin aus den Polar-Coordinaten, d. h. aus den Rotations-Flächen der tangirenden Spiralen erster, zweiter, dritter und höherer Ordnung ableiten. Ihre Durchschnitte geben Curven doppelter Krümmung, die man Spiralinen nennen könnte, und

deren Bogen die ersten, zweiten, dritten und höheren Differenzialien der Polar-Coordinaten bestimmen.

Da jedoch die Uebersetzungs-Formeln aus einem Coordinaten-System in's andere gegeben sind, so überlassen wir der analytischen Geometrie diese, übrigens nicht schwierige, Aufgabe, und leiten die Differenzialien der Polar-Coordinaten aus den rechtwinkeligen Coordinaten ab.

Zu bemerken ist, dass hier partielle Differenzialien nicht Platz greifen können, da nur eine der drei Variabeln unabhängig veränderlich ist. Es treten daher, da die Gleichungen gelten:

(1) $x = r \cos v$, (2) $y = r \sin v \cos t$, (3) $z = r \sin v \sin t$,

wenn differenzirt wird, folgende Gleichungen ein:

(4) $dx = dr \cos v - r \sin v dv$,

(5) $dy = dr \sin v \cos t + r \cos v \cos t dv - r \sin v \sin t dt$,

(6) $dz = dr \sin v \sin t + r \cos v \sin t dv + r \sin v \cos t dt$.

Diese Werthe, statt dx, dy, dz, in die früheren Ausdrücke substituirt, geben alle Formeln in Polar-Coordinaten und ihren Differenzialien.

3) Eliminirt man aus Gleichungen (2) und (3) den Werth t, und aus der neuen Gleichung, in Verbindung mit (1) den Werth v, so erhält man r in Ausdrücken von x, y, z, also auch dr in Ausdrücken von x, y, z und ihren Differenzialien. Dasselbe kann für v und t hergestellt werden, woraus dann ihre geometrische Interpretation abgeleitet wird. Differenzirt man diesen Ausdruck auf's Neue, so erhält man die zweiten und höheren Differenzialien, deren geometrische Interpretation weitläuftig ist, und die, wie schon öfter bemerkt wurde, nur dann einfach und elegant werden kann, wenn die Polar-Coordinaten, statt auf Tangenten und Parabeln, naturgemäss auf Spiralen erster, zweiter und höherer Ordnung bezogen werden.

§. 192.

Rectification der Curven doppelter Krümmung.

1) Was bei ebenen Curven bemerkt wurde, dass es keine Gleichung giebt, in welche man nur die Coordinaten einer gegebenen Curve zu substituiren brauchte, damit man die Länge des Bogens dieser Curve habe, diess gilt auch von Curven doppelter

Krümmung. Sonst aber geben auch hier die Differenzialien diese auf's Höchste gewünschten Gleichungen, und zwar schon die ersten Differenzialien, so dass, wenn B die Function des Bogens ausdrückt, der Ausdruck dB in Coordinaten und ihren Differenzialien gegeben werden kann, wodurch man mittelbar, durch Integration, erreicht, was man will, nämlich die Function B in Ausdrücken der Coordinaten.

Ist unter den Coordinaten x, y, z die Grösse x die unabhängig Veränderliche, so ist:

$$B + \Delta B_x = B + dB_x + \frac{1}{2}d^2B_x + \frac{1}{2.3}d^3B_x + \ldots$$

Die Grösse B ist der Bogen von $x=a$ bis $x=x$, ΔB ist der Bogen von $x=x$ bis $x=x+dx$; dB_x ist das erste Glied von ΔB_x u. s. w.

Für diess erste Glied dB_x gilt, so gross oder so klein auch dx sein möge, die vollkommen präcise Gleichung:

$$dB_x = \sqrt{dx^2 + dy_x^2 + dz_x^2} = dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}}.$$

Substituirt man aus $y=\psi x$ und $z=\Psi x$ die Werthe

$$dy = \frac{d(\psi x)}{dx}dx, \quad dz = \frac{d(\Psi x)}{dx}dx,$$

so enthält $dB_x = dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}}$ nur Functionen von x, deren Integration immer möglich ist, so dass

$$B = \int dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}} + C$$

die verlangte Grösse des Bogens ausdrückt.

2) Die geometrische Interpretation von

$$dB_x = \sqrt{dx^2 + dy_x^2 + dz_x^2}$$

ist, dass dB_x den Theil der Tangente darstellt, der zwischen den Punkten x, y, z und $(x+dx)$, $(y+dy_x)$, $(z+dz_x)$ liegt, so gross auch dx genommen werden möge.

3) Der Beweis der obigen Sätze kann auf doppelte Art geführt werden.

a) Das Differenzial des Bogens, dB_x, muss gleich $\sqrt{dx^2 + dy_x^2 + dz_x^2}$ sein. Denn wäre es etwa gleich

$$\alpha\sqrt{dx^2 + \beta dy_x^2 + \gamma dz_x^2},$$

so wäre das Differenzial der Projection des Bogens auf die Ebene XY, da für diese Projection das Differenzial dz gleich Null wird, gleich $\alpha\sqrt{dx^2+\beta dy_x^2}$, was unmöglich ist, da das Differenzial des Bogens der Projection gleich $\sqrt{dx^2+dy_x^2}$ ist. Es muss demnach $\alpha=1$ und $\beta=1$ sein. Auf gleiche Art beweist man aus der Projection auf die Ebene XZ, dass auch $\gamma=1$ sein müsse, so dass die Gleichung stattfindet:

$$dB_x=\sqrt{dx^2+dy_x^2+dz_x^2}.$$

b) Genuin aus der geometrischen Construction wird dieser Satz auf folgende Art bewiesen.

Ist a der Punkt x, y, z, und wird x um $dx=ah$ vermehrt, so ist die Zunahme des Bogens gleich $aoc=\Delta B_x$. Der Punkt c ist der Punkt $(x+dx)$, $(y+\Delta y_x)$, $(z+\Delta z_x)$, und ist at die Tangente der Curve im Punkte a, so ist t der Punkt $(x+dx)$, $(y+dy_x)$, $(z+dz_x)$. Tangente und Curve liegen übrigens nicht in Einer Ebene. In der mit ZY parallelen Ebene, in welcher ch und th liegen, ist ch die Hypothenuse eines (nicht verzeichneten) Dreiecks, dessen Katheten Δy_x und Δz_x sind. Eben so ist th die Hypothenuse eines (gleichfalls nicht verzeichneten) Dreiecks, dessen Katheten dy_x und dz_x sind. Die Linie tc ist von dem Winkel $thc=\omega$ abhängig, den die durch tah und cah gelegten Ebenen miteinander machen. Werden die Winkel, die in der Ebene ZY durch Sehnen- und Tangenten-Dreiecke gebildet werden, mit φ bezeichnet, so ist dieser Winkel eine Function der Differenz: $(\Delta\varphi_x-d\varphi_x)$, also:

Fig. 37.

$$f\left(\frac{1}{2}d^2\varphi_x+\frac{1}{2.3}d^3\varphi_x+\cdots\right),$$

ein Differenzial-Ausdruck zweiter Ordnung.

Nun ist der Bogen aoc grösser als die Sehne ac, also:

$$\text{Bogen } aoc>\sqrt{dx^2+\Delta y_x^2+\Delta z_x^2},$$

und kleiner als $at+tc$, weil diese beiden Linien den Bogen einschliessen. — Die Linie at ist gleich $\sqrt{dx^2+dy_x^2+dz_x^2}$, und tc ist gleich:

$$\sqrt{(ch^2 + th^2 - 2ch \,.\, th \cos(\omega)} =$$
$$\sqrt{\left(ch^2 - 2ch \,.\, th + th^2 - 2ch \,.\, th\,(1 + \cos\omega)\right)} =$$
$$\sqrt{\left((ch - th)^2 - 4ch \,.\, th \sin^2 \frac{1}{2}\omega\right)}.$$

Da $ch = \sqrt{\Delta y_x^2 + \Delta z_x^2}$ und $th = \sqrt{dy_x^2 + dz_x^2}$ ist, so ist ihre Differenz $(ch - th)$ eine Grösse, welche nur zweite und höhere Potenzen von dx enthält. Dasselbe gilt von dem Ausdruck: $4ch \,.\, th \,.\, \sin^2 \frac{1}{2}\omega$, da der Winkel $\omega = \Delta\varphi - d\varphi$ nur zweite und höhere Differenzialien enthält. Die Linie tc wird also ein Ausdruck von der Form: $Kdx^2 + Ldx^3 + \ldots$, und die Summe der Linien $at + tc$ wird:

$$dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}} + Kdx^2 + Ldx^3 + \ldots$$

Substituirt man in die Sehne ac statt Δy_x und Δz_x die entsprechenden Reihen, so wird:

$$ac = dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}} + Mdx^2 + Ndx^3 + \ldots$$

Die Grössen $at + tc$ einerseits und ac andrerseits, zwischen welchen der Bogen $aoc = \Delta B$ liegt, stimmen im ersten Gliede überein; es ist demnach das erste Glied von ΔB, d. h. dB genau gleich $dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}}$, so gross oder so klein auch dx genommen werden möge, was zu beweisen war.

Zusatz 1. Will man die höheren Differenzialien, so findet man sie durch wiederholte Differenzirung. So ist z. B.

$$d\left(\sqrt{dx^2 + dy_x^2 + dz_x^2}\right) = \frac{dy\,d^2y_x + dz\,d^2z_x}{\sqrt{dx^2 + dy_x^2 + dz_x^2}}.$$

Da man d^2y_x und d^2z_x aus den ebenen Curven kennt, so unterliegt die geometrische Construction von $\frac{dy\,d^2y_x + dz\,d^2z_x}{\sqrt{dx^2 + dy_x^2 + dz_x^2}}$ keiner weitern Schwierigkeit.

Die ganze Zunahme ΔB wird daher:

$$\Delta B = \sqrt{dx^2 + dy_x^2 + dz_x^2} + \frac{1}{2}\frac{dy\,d^2y_x + dz\,d^2z_x}{\sqrt{dx^2 + dy_x^2 + dz_x^2}} +$$
$$+ \frac{1}{2.3}\left(..\right) + ..$$

Zusatz 2. Sucht man das Differenzial des Bogens in Polar-Coordinaten, so substituirt man die Grössen:

$$dx = dr\cos v - r\sin v dv;$$
$$dy = dr\sin v\cos t + r\cos v\cos t dv - r\sin v\sin t dt;$$
$$dz = dr\sin v\sin t + r\cos v\sin t dv + r\sin v\cos t dt.$$

Werden die Ausdrücke $dx^2 + dy^2 + dz^2$ substituirt, und überall $\sin^2 v + \cos^2 v = 1$, $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ genommen, so geht dB in folgenden einfachen Ausdruck über:

$$dB = \sqrt{dr^2 + r^2 dv^2 + r^2\sin^2 v dt^2}.$$

Nimmt man eine der Grössen r, v, t als die unabhängig Veränderliche, so findet man d^2B, d^3B ... durch wiederholte Differenzirung.

Ist der Winkel $t = 0$, so geht die Curve doppelter Krümmung in eine ebene Curve über, eben so wenn $v = \frac{1}{2}\pi$, weil sich dann der Radius r in einer auf der Ebene XZ senkrechten Ebene bewegt, und die allgemeine Differenzial-Formel des Bogens wird:

$$dB = \sqrt{dr^2 + r^2 dv^2} \text{ oder } = \sqrt{dr^2 + r^2 dt^2},$$

wie wir auch für ebene Curven gefunden haben.

Wird Winkel v eine constante Grösse $= \alpha$, so wird:

$$dB = \sqrt{dr^2 + r^2\sin^2\alpha dt^2},$$

welches ebenfalls das Differenzial einer ebenen Curve ist, und das sich nur aus dem Grunde von $\sqrt{dr^2 + r^2 dt^2}$ unterscheidet, weil der veränderliche Winkel t nicht mehr direkt in der Ebene der Curve, in welcher der Anfangspunkt des Radius, O, liegt, genommen wird, da $\angle t$ (Fig. 26) gleich $\angle anm$ ist.

Zusatz 3. Die Probleme der Quadratur sind bereits im vorhergehenden Capitel gelöst. Eine schöne Anwendung ergiebt sich, wenn man die cylindrischen Flächen der Projectionen und die *Rotations*-Flächen, welche bei Polar-Coordinaten die Projectionen der rechtwinkeligen Coordinaten vertreten, untersucht und berechnet.

Diese cylindrischen Flächen werden einerseits von den Projections-Linien und andrerseits von der Curve doppelter Krümmung begrenzt, und das Differenzial der Projections-Fläche, die z. B. auf der Ebene XY senkrecht steht, ist:

$$dF = z\sqrt{dx^2 + dy_x^2}.$$

In analoger Weise findet man die Projections-Fläche, die auf der Ebene XZ senkrecht steht.

Die Rotations-Flächen werden einerseits von den ebenen Curven $\psi(r, v) = 0$ oder $\Psi(r, t) = 0$ und andrerseits von der Curve doppelter Krümmung begrenzt.

Die Formel ihrer Complanation ist:

$$dF = z\,arc.\,sin\frac{y}{z}\sqrt{dx^2 + dz^2} \quad \text{oder} \quad dF = y\,arc.\,sin\frac{z}{y}\sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

In Polar-Coordinaten ist z. B.

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dr^2 + r^2\,dv^2}, \quad y\,arc.\,sin\frac{z}{y} = rt\sin v,$$

so dass die Gleichung hervorgeht:

$$dF = rt\sin v\sqrt{dr^2 + r^2\,dv^2}.$$

§. 193.

Die osculirende Ebene der Curven doppelter Krümmung.

1) Durch die Tangente, welche zum Punkte a einer Curve doppelter Krümmung gezogen ist, können ringsherum unendlich viele Ebenen gelegt werden, die sämmtlich die Curve tangiren, deren Gleichung also unbestimmt ist, d. h. eine oder mehrere willkührliche Constanten enthält. (Dasselbe findet auch bei ebenen Curven statt. Durch die Tangenten einer ebenen Curve können unendlich viele tangirende Ebenen gelegt werden, die sämmtlich den Punkt a mit der Curve gemeinschaftlich, aber grössere oder kleinere Entfernungen von den übrigen Punkten der ebenen Curve haben. Eine dieser Ebenen hat die kleinste Entfernung von allen Punkten der ebenen Curve, ja sogar die Entfernung Null, nämlich diejenige Ebene, in welcher die Curve ganz und gar liegt, und die ebenfalls durch die Tangente geht, weil diese in ihr liegt.)

Diess kann nun bei Curven doppelter Krümmung nicht in gleichem Maasse stattfinden, denn es liegen niemals zwei aufeinanderfolgende Punkte solcher Curven in einer Ebene. Dessenungeachtet liegen von allen tangirenden Ebenen, die durch den Punkt a gehen, einige näher, andere ferner von den übrigen vorhergehenden oder nachfolgenden Punkten der Curve; und diejenige Ebene, deren

Entfernung von diesen Punkten ein Kleinstes ist, (die also der Ebene analog ist, *in* welcher die ebenen Curven liegen), wird die osculirende Ebene der Curven doppelter Krümmung genannt. Es kommt darauf an, diese Ebene zu bestimmen.

2) Eine Ebene liegt um so näher an einer Curve, je mehr sie Punkte, die durch die Differenzialien bestimmt werden, der Reihe nach mit dieser gemeinschaftlich hat. Hat sie den Punkt x, y, z, so durchschneidet sie die Curve; hat sie überdiess den Punkt $x+dx$, $y+dy_x$, $z+dz_x$, so tangirt sie die Curve; hat sie endlich noch den Punkt $x+dx$, $y+dy_x+\frac{1}{2}d^2y_x$, $z+dz_x+\frac{1}{2}d^2z_x$, so osculirt sie die Curve. — Da eine Ebene durch drei Punkte vollkommen bestimmt ist, so kann es nur eine einzige osculirende Ebene zu einer Curve geben. — Damit die Formeln harmonischer erscheinen, nehmen wir eine vierte Variable s als die unabhängig Veränderliche, so dass der dritte Punkt der Ebene folgender wird:

$$x+dx_s+\frac{1}{2}d^2x_s,\quad y+dy_s+\frac{1}{2}d^2y_s,\quad z+dz_s+\frac{1}{2}d^2z_s.$$

Ist die allgemeine Gleichung der Ebene:

$$A\xi+B\eta+C\zeta+K=0,$$

so gelten für die osculirende Ebene folgende drei Gleichungen:

(1) $Ax+By+Cz+K=0$;

(2) $A(x+dx_s)+B(y+dy_s)+C(z+dz_s)+K=0$;

$$(3)\quad A\left(x+dx_s+\frac{1}{2}d^2x_s\right)+B\left(y+dy_s+\frac{1}{2}d^2y_s\right)+$$
$$+C\left(z+dz_s+\frac{1}{2}d^2z_s\right)+K=0.$$

Subtrahirt man die Gleichungen (1) und (2), und (2) und (3), so folgen die Gleichungen:

(I) $Adx_s+Bdy_s+Cdz_s=0$,

(II) $Ad^2x_s+Bd^2y_s+Cd^2z_s=0$,

aus denen man die Werthe findet:

$$\frac{A}{C}=\frac{dy_s\,d^2z_s-dz_s\,d^2y_s}{dx_s\,d^2y_s-dy_s\,d^2x_s},\quad \frac{B}{C}=\frac{dz_s\,d^2x_s-dx_s\,d^2z_s}{dx_s\,d^2y_s-dy_s\,d^2x_s}.$$

Subtrahirt man $Ax+By+Cz+K=0$ von $A\xi+B\eta+C\zeta+K=0$, so folgt:

$$\text{(III)}\quad (\xi - x)(dy_s d^2z_s - dz_s d^2y_s) + (\eta - y)(dz_s d^2x_s - dx_s d^2z_s) + \\ + (\zeta - z)(dx_s d^2y_s - dy_s d^2x_s) = 0,$$

wodurch die osculirende Ebene vollkommen bestimmt ist.

Für Gleichung (III) schreiben wir der Kürze halber:

$$(\xi - x)X + (\eta - y)Y + (\zeta - z)Z = 0,$$

indem X statt $dy_s d^2z_s - dz_s d^2y_s$, Y statt $dz_s d^2x_s - dx_s d^2z_s$, Z statt $dx_s d^2y_s - dy_s d^2x_s$ substituirt wird.

Zusatz 1. Setzt man $s = x$, so fallen die Ausdrücke weg, die d^2x_x enthalten. Analoges folgt, wenn man $s = y$ oder $s = z$ setzt. Substituirt man für s eine bestimmte Function, z. B.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

so hat man eine Bedingungs-Gleichung zwischen dx^2, dy^2, dz^2, welche die Ausdrücke umformt und vereinfacht, wie Cap. VII, §. 52 ff. auseinandergesetzt wurde.

Zusatz 2. In dieser osculirenden Ebene liegt auch der Krümmungs-Kreis der Curve doppelter Krümmung. Diess ist derjenige Kreis, der die Eigenschaft hat, dass seine Krümmung mit der Krümmung der Curve mehr übereinstimmt, als die Krümmung jedes andern Kreises. Läge nun dieser Kreis nicht in der osculirenden Ebene, sondern in einer andern Ebene, so würde ein Kreis von gleichem Radius, der in der osculirenden Ebene läge, mit der Krümmung der Curve mehr übereinstimmen, da sich die osculirende Ebene an die Curve näher anschmiegt, als jede andere Ebene, es würde daher nicht der erste, sondern der zweite Kreis der Krümmungs-Kreis sein. Daraus folgt, dass dieser immer in der osculirenden Ebene liegen müsse.

§. 194.

Der osculatorische Kreis.

1) Die allgemeine Gleichung der Kugel-Fläche ist:

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = \varrho^2,$$

worin x, y, z den Punkt a der Curve, ξ, η, ζ die Ordinaten der Kugel, und ϱ den Radius derselben ausdrücken.

Der Durchschnitt dieser Kugel-Fläche mit der osculirenden Ebene:

$$(\xi - x)X + (\eta - y)Y + (\zeta - z)Z = 0$$

giebt einen Kreis, der in der osculirenden Ebene liegt.

Damit dieser Kreis der osculirende sei, ist erforderlich, dass er, vor und nach der Berührung mit der Curve, eine kleinere Entfernung von ihr habe, als jeder andere Kreis. Je mehr daher Differenzialien in $(\Delta\xi - \Delta x)$, $(\Delta\eta - \Delta y)$, $(\Delta\zeta - \Delta z)$ verschwinden können, desto kleiner wird diese Differenz. Die Glieder in den Reihen $(\Delta\xi - \Delta x)$ etc. fallen aber aus, 1) wenn $d\xi = dx$, $d\eta = dy$, $d\zeta = dz$, d. h. wenn Curve und Kreis eine gemeinschaftliche Tangente haben, 2) wenn $d^2\xi = d^2x$, $d^2\eta = d^2y$, $d^2\zeta = d^2z$, d. h. wenn Curve und Kreis eine gemeinschaftliche Paraboloine haben u. s. w. Es ist nun die Frage, wie viele solcher Glieder verschwinden können. Da vier unbekannte Grössen vorhanden sind, so können allgemein nicht mehr als vier Gleichungen eintreten. — Zwei Gleichungen sind gegeben, die der Kugel und die der osculirenden Ebene, es können also nur noch zwei weitere Gleichungen genommen werden, die eine, die aus $d\xi = dx$, $d\eta = dy$, $d\zeta = dz$, und die andere, die aus $d^2\xi = d^2x$, $d^2\eta = d^2y$, $d^2\zeta = d^2z$ hervorgeht.

2) Um möglichen Missverständnissen vorzubeugen, bemerke ich, dass, weil zwei Gleichungen für drei Variable gegeben sind, nur noch eine dieser Variablen als unabhängig veränderlich genommen werden könne, wofür auch eine vierte Variable s eintreten kann, so dass x, y, z als von s zugleich abhängig erscheinen.

3) Man liest auch öfter die Bemerkung, dass der Krümmungs-Kreis durch zwei und drei aufeinanderfolgende Punkte der Curve gehe. Diess ist in jeder Hinsicht falsch. Der Krümmungs-Kreis ginge durch einen zweiten Punkt der Curve, wenn er nebst dem Punkt x, y, z noch den Punkt $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ gemeinschaftlich hätte. Diesen Punkt kann er nicht mit der Curve gemeinschaftlich haben, und die Gemeinschaft der Punkte $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, und $x + dx + \frac{1}{2}d^2x$, $y + dy + \frac{1}{2}d^2y$, $z + dz + \frac{1}{2}d^2z$ bestimmen nur die Nähe seiner Lage an der Curve, denn die bezeichneten Punkte sind selbst nicht Punkte der Curve, sondern der Tangente und der Paraboloine. Also weit entfernt, dass der Krümmungs-Kreis durch drei aufeinanderfolgende Punkte der Curve gehen könne, kann er nicht einmal einen zweiten Punkt mit ihr gemein haben, die Differenzialien dx, dy, dz etc. mögen so gross oder so klein genommen werden, als man will.

4) Um die vier Grössen ξ, η, ζ, ϱ bestimmen zu können, hat man zuerst die Gleichung der osculirenden Ebene:

$$(\xi - x)X + (\eta - y)Y + (\zeta - z)Z = 0, \tag{I}$$

dann die Gleichung der Kugel-Fläche:

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = \varrho^2. \tag{II}$$

Um die dritte Gleichung zu erhalten, differenzirt man Gleichung (II) nach ξ, η, ζ. Die Formeln werden symmetrischer, wenn man nach einer vierten Veränderlichen v differenzirt und $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$ setzt, ohne darum ds constant zu nehmen, was nur dann geschieht, wenn man $v = s$ setzt.

Damit aber diese dritte Gleichung den Bedingungen der Osculation entspreche, muss $d\xi = dx$, $d\eta = dy$, $d\zeta = dz$ sein. Werden diese Werthe statt $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ substituirt, so folgt:

$$\Big((\xi - x)\,d\xi + (\eta - y)\,d\eta + (\zeta - z)\,d\zeta = 0\Big)$$

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0. \tag{III}$$

Diese Gleichung ist zugleich, wie man sieht, die Gleichung der Normal-Ebene.

Die vierte Gleichung erhält man durch Differenzirung der Gleichung (III):

$$(\xi - x)\,d\xi + (\eta - y)\,d\eta + (\zeta - z)\,dz = 0;$$

und wenn wieder statt $d\xi$, $d^2\xi$; $d\eta$, $d^2\eta$; $d\zeta$, $d^2\zeta$ beziehungsweise die Werthe dx, d^2x; dy, d^2y; dz, d^2z substituirt werden, so folgt:

$$(\xi - x)d^2x + (\eta - y)d^2y + (\zeta - z)d^2z - dx^2 - dy^2 - dz^2 = 0, \tag{IV}$$

oder: $$(\xi - x)\,d^2x + (\eta - y)\,d^2y + (\zeta - z)\,d^2z - ds^2 = 0.$$

5) Eliminirt man aus Gleichung (III) und (IV) einmal $(\zeta - z)$, und das andremal $(\eta - y)$, so folgt, wenn X, Y, Z die §. 193. (III) angegebenen Werthe ausdrücken:

$$\begin{cases} (\eta - y) = \dfrac{Y}{X}(\xi - x) - \dfrac{ds^2\,dz}{X} \\ (\zeta - z) = \dfrac{Z}{X}(\xi - x) + \dfrac{ds^2\,dy}{X} \end{cases} \tag{V}$$

6) Aus diesen zwei Gleichungen (V) in Verbindung mit Gleichung (I) findet man die Werthe von $(\xi - x)$, $(\eta - y)$, $(\zeta - z)$ einzeln:

$$\text{(VI)}\qquad \begin{cases} \xi - x = \dfrac{Y\,dz - Z\,dy}{X^2 + Y^2 + Z^2}\,ds^2, \\ (\eta - y) = \dfrac{Z\,dx - X\,dz}{X^2 + Y^2 + Z^2}\,ds^2, \\ \zeta - z = \dfrac{X\,dy - Y\,dx}{X^2 + Y^2 + Z^2}\,ds^2. \end{cases}$$

Diese Werthe in Gleichung (II) substituirt geben den Krümmungshalbmesser:

$$\text{(VII)}\quad \varrho = \frac{\sqrt{(Y\,dz - Z\,dy)^2 + (Z\,dx - X\,dz)^2 + (X\,dy - Y\,dx)^2}}{X^2 + Y^2 + Z^2}\,ds^2.$$

7) Führt man die Operationen $(Y\,dz - Z\,dy)$ etc. aus, so wird:

$$(Y\,dz - Z\,dy) = \\ = (dx^2 + dy^2 + dz^2)\,d^2x - dx\,(dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z).$$

Wird $(dx^2 + dy^2 + dz^2) = ds^2$ gesetzt, so wird:

$$dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z = ds\,d^2s,$$

also: $$Y\,dz - Z\,dy = ds^2\,d^2x - dx\,ds\,d^2s = ds^3\,d\left(\frac{dx}{ds}\right).$$

Auf gleiche Weise werden

$$Z\,dx - X\,dz = ds^3\,d\left(\frac{dy}{ds}\right), \quad X\,dy - Y\,dx = ds^3\,d\left(\frac{dz}{ds}\right),$$

also (wenn man die Werthe $dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z$ und $ds\,d^2s$ für einander setzt):

$$(Y\,dz - Z\,dy)^2 + (Z\,dx - X\,dz)^2 + (X\,dy - Y\,dx)^2 = \\ = [(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2]\,ds^4.$$

Eben so wird

$$X^2 + Y^2 + Z^2 \text{ gleich } [(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2]\,ds^2,$$

so dass die einfache Gleichung hervorgeht:

$$\text{(VIII)}\qquad \varrho = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}},$$

die sich auch in folgender Gestalt darstellen lässt:

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{\left[\dfrac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds}\right]^2 + \left[\dfrac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds}\right]^2 + \left[\dfrac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds}\right]^2}}.$$

8) Dieser Werth in die Gleichungen (VI) substituirt, giebt:

$$\text{(IX)}\qquad \begin{cases} \xi - x = \varrho^2 \dfrac{d\left(\dfrac{dx}{ds}\right)}{ds}, \\ \eta - y = \varrho^2 \dfrac{d\left(\dfrac{dy}{ds}\right)}{ds}, \\ \zeta - z = \varrho^2 \dfrac{d\left(\dfrac{dz}{ds}\right)}{ds}. \end{cases}$$

9) Setzt man die Veränderliche v, nach welcher differenzirt wurde, gleich s, dann wird d^2s gleich Null, und es folgt:

$$\text{(X)}\qquad \varrho = \frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2z}{ds^2}\right)^2}},$$

und:

$$\text{(XI)}\quad \xi - x = \varrho^2 \frac{d^2x}{ds^2},\quad \eta - y = \varrho^2 \frac{d^2y}{ds^2},\quad \zeta - z = \varrho^2 \frac{d^2z}{ds^2}.$$

10) Setzt man aber $v = x$, oder $= y$, oder $= z$, dann fallen beziehungsweise d^2x, d^2y, d^2z aus. Setzt man, was gewöhnlich geschieht $v = x$, d. h. nimmt man x als die unabhängig Veränderliche, so folgen die Gleichungen:

$$\text{(XII)}\quad \varrho = \frac{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\left(\dfrac{dy}{dx}\dfrac{d^2z}{dx^2} - \dfrac{dz}{dx}\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2z}{dx^2}\right)^2}},$$

$$\text{(XIII)}\qquad \begin{cases} \xi - x = -\varrho^2 \dfrac{\dfrac{dy}{dx}\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dz}{dx}\dfrac{d^2z}{dx^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2\right]^2}, \\ \eta - y = \varrho^2 \dfrac{\left(\dfrac{dz}{dx}\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx}\dfrac{d^2z}{dx^2}\right)\dfrac{dz}{dx} + \dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2\right]^2}, \\ \zeta - z = \varrho^2 \dfrac{\left(\dfrac{dy}{dx}\dfrac{d^2z}{dx^2} - \dfrac{dz}{dx}\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{d^2z}{dx^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2\right]^2}. \end{cases}$$

§. 195.

Zusätze.

Zusatz 1. Die Gleichungen (IX), (XI), (XIII) sind die Gleichungen des Krümmungs-Mittelpunktes. Werden die Grössen x, y, z veränderlich genommen, so repräsentiren diese Gleichungen die Krümmungs-Mittelpunkte aller Punkte der gegebenen Curve. Sind y und z, durch x ausgedrückt, $y = \varphi x$, $y = \psi x$ (was durch die beiden Gleichungen der gegebenen Curve immer möglich ist), so enthalten die drei Gleichungen IX, oder XI, oder XIII, also z. B. die drei Gleichungen (XIII) vier veränderliche Grössen x, ξ, η, ζ. Wird x in der ersten Gleichung gesucht und durch ξ ausgedrückt $x = F\xi$, und wird dieser Werth in die zweite und dritte Gleichung substituirt, so geben diese zwei Gleichungen, welche nur noch Functionen von ξ, η, ζ sind: $\eta = \Phi\xi$, $\zeta = \Psi\xi$. Diess sind zwei cylindrische Projections-Flächen, deren Durchschnitts-Linie eine Curve von doppelter Krümmung giebt, welche alle Krümmungs-Mittelpunkte der gegebenen Curve enthält. Diese Linie ist, wie bei den ebenen Curven, die Evolute der gegebenen Curve doppelter Krümmung und hat analoge Eigenschaften, wie die Evolute der ebenen Curven, Eigenschaften, die sich sämmtlich aus den vorhergehenden Gleichungen in Verbindung mit dem Differenzial des Bogens: $d\sigma = \sqrt{d\xi^2 + d\eta_\xi^2 + d\zeta_\xi^2}$, ableiten lassen, und keiner weitern geometrischen Hilfsmittel bedürfen.

Zusatz 2. Die Uebersetzung der obigen Formeln in das System der Polar-Coordinaten giebt ganz weitläufige Resultate. Die Schuld liegt nicht an den Polar-Coordinaten, sondern daran, dass man die Curve der geraden Linie anwenden will, wo die Natur der Polar-Coordinaten andere Curven verlangt. Die genuine und ausführliche Untersuchung darüber ist Sache der analytischen Geometrie.

Zusatz 3. Die vorausgehende naturgemässe Ableitung des Krümmungshalbmessers gewährt eine vollkommene geometrische Anschauung und Interpretation. Die Gleichung (I) ist die osculirende Ebene, die Gleichung (III) die Normal-Ebene. Der Durchschnitt dieser beiden Ebenen giebt die gerade Linie, in welcher der Krümmungs-Mittelpunkt liegt. Die Gleichung (IV) in Ver-

bindung mit Gleichung (II) bestimmt endlich diesen Punkt vollends, indem sie die Länge des Krümmungshalbmessers giebt. Bei dieser Ableitung wird überall von endlichen und greifbaren Grössen ausgegangen, und auf Grössen der nämlichen Art geschlossen.

Die gewöhnliche Ableitung hingegen ist von der Art, dass man mit grösster Theilnahme dem Scharfsinne folgt, der durch klippenvolle Windungen endlich zur sichern Formel gelangt, um die es zu thun ist. „Man nimmt zwei benachbarte Normal-Ebenen, die sich in einer geraden Linie durchschneiden," was vollkommen geometrisch interpretirbar ist. „Hierauf setzt man statt Δx, Δy, Δz die Werthe dx, dy, dz, um anzudeuten, dass die zweite Normal-Ebene mit der ersten zusammenfalle," was nicht nur falsch, sondern auch ganz und gar ungeometrisch ist. Denn in Wahrheit fallen die beiden Normal-Ebenen nur zusammen, wenn $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$, $\Delta z = 0$ gesetzt wird. „Ferner behält man trotz dieses Zusammenfallens noch ihre erste Durchschnitts-Linie bei," was wieder ungeometrisch ist, denn zwei zusammenfallende Ebenen liegen ganz in einander und durchschneiden sich gar nicht. Aber diese beibehaltene Durchschnitts-Linie dient dazu, dass man auf sie eine Senkrechte ziehen kann, und diese Senkrechte ist der *Radius Curvaturae* — ohne Beweis und ohne Anschaulichkeit.

Wenn man nun diese Menge von Suppositionen, Wendungen und Vertauschungen hinnimmt, so erhält man am Ende die Formel des *Radius Curvaturae.* Diese Formel ist allerdings richtig und von hohem Werthe; dass sie aber richtig ist, das fand man nicht aus diesen Suppositionen etc., das zeigten Instinct, Versuche und nachfolgende Rechnungen, welche die Stelle der genuin aus der Natur der Sache gewonnenen Erkenntniss einnahmen.

Cap. XXIV.

Einige Anwendungen der vorhergehenden Lehren.

§. 196.

Die Krümmungs-Verhältnisse der Flächen.

Der Kreis ist ein vollkommenes Maass der Krümmung eines jeden Punktes der Curven. Nicht so verhält es sich mit der Kugel-Fläche in Bezug auf die Krümmung der Flächen. Denn die Kugel-Fläche hat in allen Normal-Schnitten dieselbe Krümmung und denselben Radius, die Flächen hingegen können in einem Schnitte durch ihre Normale den Radius ϱ, in einem zweiten Schnitte durch dieselbe Normale einen zehnfach grösseren oder kleineren Radius haben, und so ringsherum in allen Normal-Schnitten, wo sie sogar unendlich grosse Radien haben können, wie z. B. die developpablen, convex-concaven und windschiefen Flächen.

Um daher die Krümmung einer Fläche in jedem Punkte kennen zu lernen, legt man durch den gegebenen Punkt eine Normale auf die Fläche, und durch diese Normale ringsherum eine Reihe von Ebenen, und untersucht die Krümmungen, welche die Durchschnitts-Curven dieser Ebenen und der Fläche haben. — Solche Schnitte durch die Normale einer Fläche nennt man Normal-Schnitte.

Nimmt man x als unabhängig Veränderliche, so ist nach dem vorhergehenden Capitel die Krümmung jeder Durchschnitts-Curve:

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{(dy_x d^2z_x - d^2y_x dz_x)^2 + (dx\,d^2y_x)^2 + (dx\,d^2z_x)^2}{(dx^2 + dy_x^2 + dz_x^2)^3}.$$

In dieser Gleichung ist nur eine Grösse unabhängig veränderlich, weil ausser der Gleichung der Fläche, $u = f(x, y, z) = 0$, noch die Gleichung der Ebene durch die Normale vorausgesetzt wird.

§. 197.

Gleichung der Ebene, die durch die Normale gelegt wird.

Die Normale ist eine gerade Linie und bestimmt nur zwei Punkte; damit aber eine Ebene bestimmt sei, müssen drei Punkte gegeben sein. In der That kann man auch durch ein Normale nicht bloss eine, sondern unzählig viele Ebenen legen. Es ist daher nicht möglich, die Gleichung der Normal-Ebene zu bestimmen, sondern man kann nur Relationen angeben, welche eine Ebene so bestimmen, dass sie durch die Normale geht.

Ist

$$(1)\quad \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 1$$

die Gleichung einer solchen Ebene, so muss auch gelten:

$$(2)\quad \alpha x + \beta y + \gamma z = 1,$$

weil die Normale durch den Punkt (x, y, z) geht.

Für die Normale selbst gelten die Gleichungen:

$$(3)\quad (\xi - x) + (\zeta - z)\left|\frac{dz}{dx}\right| = 0; \quad (\eta - y) + (\zeta - z)\left|\frac{dz}{dy}\right| = 0.$$

Nimmt man aus (3) die Werthe ξ und η, und substituirt sie in (1), so folgt:

$$(4)\quad \left(\gamma - \alpha\left|\frac{dz}{dx}\right| - \beta\left|\frac{dz}{dy}\right|\right)\zeta + \alpha x + \beta y + \left(\alpha\left|\frac{dz}{dx}\right| + \beta\left|\frac{dz}{dy}\right|\right)z = 1.$$

Da ζ von den Werthen ξ und η abhängig ist, diese aber in Gleichung (4) nicht enthalten sind, so kann diese Gleichung nur bestehen, wenn der Coefficient von ζ gleich Null ist.

Daraus folgen die Relationen:

$$(5)\quad \gamma = \alpha\left|\frac{dz}{dx}\right| + \beta\left|\frac{dz}{dy}\right|, \text{ und Gleichung (2): } \alpha x + \beta y + \gamma z = 1.$$

Diese Gleichungen sollen die Mittel an die Hand geben, die Werthe d^2y_x, d^2z_x zu bestimmen, die in der Gleichung

$$(6)\quad \frac{1}{\varrho^2} = \frac{(dy_x\, d^2z_x - dz_x\, d^2y_x)^2 + (dx\, d^2y_x)^2 + (dx\, d^2z_x)^2}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^3}$$

enthalten sind.

§. 198.

Ausführung dieser Operationen.

Der kürzeren Schreibart willen setzen wir:

$$\left|\frac{dz}{dx}\right| = p, \quad \left|\frac{dz}{dy}\right| = q, \quad \left|\frac{d^2z}{dx^2}\right| = r, \quad \left|\frac{d^2z}{dxdy}\right| = s, \quad \left|\frac{d^2z}{dy^2}\right| = t.$$

Das totale Differenzial der Ordinate z in der Fläche ist:

$$dz = \left|\frac{dz}{dx}\right| dx + \left|\frac{dz}{dy}\right| dy = pdx + qdy.$$

Eben so ist das zweite totale Differenzial (da nur noch x als unabhängig Veränderliche genommen werden kann):

$$(7) \quad d^2z_x = rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2 + qd^2y_x.$$

Die Differenzialien der Relation (2) $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$ sind:

$$(8) \quad \alpha dx + \beta dy + \gamma dz = 0; \quad \beta d^2y_x + \gamma d^2z_x = 0.$$

Durch Elimination erhält man aus den beiderseitigen ersten Differenzialien:

$$(9) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha + p\gamma}{\beta + q\gamma}; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{p\beta - q\alpha}{\beta + q\gamma}.$$

Die Gleichungen (7) und (8), welche beide d^2y_x und d^2z_x enthalten, geben:

$$(10) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M\gamma}{\beta + q\gamma}, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{M\beta}{\beta + q\gamma},$$

wenn man der Kürze halber setzt:

$$r + 2s\frac{dy}{dx} + t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = M.$$

Diese Werthe in Formel (6) substituirt, geben die Krümmung $\frac{1}{\varrho^2}$ in einem Ausdrucke, der nur noch die Veränderliche $\frac{dy}{dx}$ enthält, die nicht mehr eliminirt werden kann, da die Normal-Schnitte selbst unbestimmt und von der Veränderlichen $\frac{dy}{dx}$ abhängig sind.

Ehe wir diese Substitution vornehmen, setzen wir die bekannten Transformationen. Es ist:

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dx^2} = \frac{(\beta + q\gamma)^2 + (\alpha + p\gamma)^2 + (p\beta - q\alpha)^2}{(\beta + q\gamma)^2}.$$

Berücksichtigt man die Gleichung $\gamma = p\alpha + q\beta$, und setzt man: $1 + p^2 + q^2 = N^2$, so wird der Zähler:

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(1 + p^2 + q^2) - \alpha^2 p^2 - 2\alpha\beta pq - \beta^2 q^2 + \gamma^2 =$$
$$= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(1 + p^2 + q^2) = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) N^2.$$

Es ist demnach:

$$(11) \quad \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dx^2} = \frac{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) N^2}{(\beta + q\gamma)^2}.$$

Nun wird:

$$(12) \quad \frac{dy\, d^2z - dz\, d^2y}{dx^3} = \frac{-\beta(\alpha + \gamma p) + \gamma(\beta p - \alpha q)}{(\beta + \gamma q)^2} M = -\frac{\alpha M}{\beta + \gamma q}$$

und

$$(13) \quad \left(\frac{dy\, d^2z - dz\, d^2y}{dx^3}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2 = \frac{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) M^2}{(\beta + \gamma q)^2}.$$

Diess in Formel (6) substituirt, giebt:

$$(14) \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{M(\beta + \gamma q)^2}{N^3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} = \frac{M dx^2}{N(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$$

$\left(\text{wenn man aus Formel (11) den Werth } \frac{N^2}{(\beta + \gamma q)^2} \text{ einsetzt}\right)$.

Bezeichnet man die Variable $\frac{dy}{dx}$ mit y', und substituirt man $dz = p\,dx + q\,dy$ und $M = r + 2sy' + ty'^2$, so wird:

$$(15) \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{r + 2sy' + ty'^2}{N[1 + y'^2 + (p + qy')^2]},$$

ein Ausdruck, in welchem y' als die einzige Variable erscheint, indem alle übrigen Grössen: r, s, t, N, p, q, von dem gegebenen Punkte der Fläche, deren Krümmung bestimmt werden soll, abhängen, während $y' = \frac{dy}{dx}$ von den nicht gegebenen Schnitten abhängig ist, die ringsherum durch die Normale beliebig geführt werden können.

§. 199.

Maximum und Minimum der Krümmungshalbmesser.

Diese verschiedenen Normal-Schnitte geben verschiedene Krümmungshalbmesser, und da der letzte Schnitt wieder auf den ersten zurückkommt, so müssen Maxima und Minima der Radien eintreten. — Es liegt nahe, zu untersuchen, welches Verhältniss zwischen den verschiedenen Maximis und Minimis stattfinde.

Diess findet man, wenn man ϱ nach y' differenzirt und $d\varrho = 0$ setzt, wie bekannt ist.

Nun ist:

$$(r + 2sy' + ty'^2)\varrho = N[1 + y'^2 + (p + qy')^2],$$

und wenn differenzirt und $d\varrho = 0$ gesetzt wird:

$$(s + ty')\varrho = N[y' + (p + qy')q].$$

Substituirt man den Werth ϱ aus (15), so entsteht die Gleichung:

$$\frac{r + 2sy' + ty'^2}{s + ty'} = \frac{1 + y'^2 + (p + qy')^2}{pq + (1 + q^2)y'},$$

die nach Potenzen von y' geordnet folgende wird:

$$(16)\quad [(1 + q^2)s - pqt]y'^2 + [(1 + q^2)r - (1 + p^2)t]y' + \\ + pqr - (1 + p^2)s = 0.$$

Diese Gleichung hat zwei Wurzeln y'. Es giebt daher zwei Werthe von $y' = \frac{dy}{dx}$, die den *Radius Curvaturae* der Normalschnitte zu einem Maximum oder Minimum machen. Da die Reihe der Normalschnitte in sich selbst zurückkehrt, so ist einleuchtend, dass ein Werth y' ein Maximum, und der andere Werth y' ein Minimum des Krümmungshalbmessers giebt.

Die Formel (16) vereinfacht sich, wenn die Ordinate z selbst ein Maximum oder Minimum ist, so dass die Tangential-Ebene parallel mit der Ebene XY wird.

Die Bedingungen des Maximum und Minimum für z, als Function von x und y gedacht, sind aber:

$$\left|\frac{dz}{dx}\right| = p = 0; \quad \left|\frac{dz}{dy}\right| = q = 0;$$

$\left|\frac{d^2z}{dx^2}\right|$ und $\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|$ beide von gleichem Zeichen, und

$$\left|\frac{d^2z}{dx^2}\right| \left|\frac{d^2z}{dy^2}\right| > \left(\left|\frac{d^2z}{dx\,dy}\right|\right)^2, \text{ d. h. } r \,.\, t > s^2.$$

Demnach geht die Formel (16) in folgende über:

$$sy'^2 + (r - t)y' - s = 0,$$

$$(17)\quad y'^2 + \frac{r - t}{s}y' - 1 = 0.$$

Sind die beiden Wurzeln $y' = \frac{dy}{dx}$ folgende: $\frac{dy'}{dx'}$, $\frac{dy''}{dx''}$, so ist ihr Product gleich (-1), es ist daher $\frac{dy'}{dx'}\frac{dy''}{dx''} + 1 = 0$. Diess

zeigt, dass die beiden Normalschnitte aufeinander senkrecht stehen. Diese Normalschnitte, die das Maximum und Minimum des Krümmungshalbmessers geben, werden Haupt-Normalschnitte genannt.

Zusatz. Für alle Punkte der concav-concaven Flächen lassen sich die Coordinaten-Systeme so abändern, dass für sie die Ordinate z ein Maximum oder Minimum wird. Es gilt daher für alle Punkte der concav-concaven Flächen der Lehrsatz, dass in ihnen die Haupt-Normalschnitte aufeinander senkrecht stehen. — Für die developpablen und windschiefen Flächen kann kein Maximum oder Minimum von z eintreten, denn für sie gelten beziehungsweise die Gleichungen $rt - s^2 = 0$ und $s^2 > rt$, die den Bedingungs-Gleichungen für das Maximum und Minimum widersprechen. Doch kann auch für sie die Tangential-Ebene mit der Ebene XY parallel werden, es können daher auch für sie die Werthe $p = 0$ und $q = 0$ eintreten, was zur Vereinfachung der Gleichung (17) hinreichend ist.

§. 200.

Einführung des Krümmungshalbmessers in die vorhergehenden Formeln.

Verändert man in Formel (15) die Richtung der Axen X und Y so, dass $s = 0$ wird, wodurch die beiden Haupt-Normalschnitte mit den Ebenen XZ und YZ zusammenfallen, so wird, da $\left(p + qy' = \frac{dz}{dx}\right)$ gleich Null und $N = 1$ ist:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{r + ty'^2}{1 + y'^2}.$$

Setzt man $y' = \frac{dy}{dx}$ gleich $tang\, \nu$, wo ν die Neigung der Ebene irgend eines Normalschnitts gegen die Ebene des ersten Hauptschnitts bezeichnet, so wird:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{r}{1 + tang^2 \nu} + \frac{t\, tang^2 \nu}{1 + tang^2 \nu} = r \cos^2 \nu + t \sin^2 \nu.$$

Für die Hauptschnitte ist $\nu = 0$ und $\nu = \frac{1}{2}\pi$; es wird daher, wenn ϱ_I und ϱ_{II} die Radien der beiden Hauptschnitte bezeichnen:

$$\frac{1}{\varrho_I} = r, \quad \frac{1}{\varrho_{II}} = t.$$

Diese Werthe in die vorhergehende Gleichung substituirt, geben:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2 \nu}{\varrho_I} + \frac{\sin^2 \nu}{\varrho_{II}},$$

so dass der Krümmungshalbmesser jedes Normalschnitts durch die Krümmungshalbmesser der beiden Hauptschnitte und durch den Winkel ν bestimmt sind, den der Normalschnitt mit der Ebene des ersten Hauptschnittes macht.

Zusatz 1. Den Werth $\frac{1}{\varrho}$ nennt man die Krümmung eines Normalschnitts. Haben die beiden Hauptschnitte gleiche Zeichen ihrer Radien, so behält auch der Radius jedes Normalschnitts dasselbe Zeichen. Diess ist der Fall bei den concav-concaven oder convex-convexen Flächen. — Haben die Radien ϱ_I und ϱ_{II} zwar endliche Werthe, aber verschiedene Zeichen, so treten zwei Werthe von ν ein, die $\frac{1}{\varrho}$ gleich Null, also $\varrho = \infty$ machen. Diess ist der Fall bei den concav-convexen Flächen. Ist der Radius des einen Hauptschnitts, etwa ϱ_{II}, unendlich gross, dann wird $\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2 \nu}{\varrho_I}$, und für $\nu = \frac{1}{2}\pi$ wird $\frac{1}{\varrho} = 0$, also $\varrho = \infty$. Dieser Radius ϱ kann mit ϱ_{II} zusammenfallen, was bei den developpablen Flächen der Fall ist, oder er kann von ϱ_{II} verschieden sein, so dass nach zwei verschiedenen Richtungen hin die Radien der Normalschnitte unendlich gross werden, was bei den windschiefen Flächen eintritt.

Zusatz 2. Das Product $\frac{1}{\varrho_I \varrho_{II}}$ nennt man die Krümmung der Fläche. Für concav-concave oder convex-convexe Flächen ist diese Krümmung immer endlich und positiv. Für developpable und windschiefe Flächen ist diese Krümmung gleich Null, für concav-convexe Flächen ist sie negativ, so dass in dieser Hinsicht die developpabeln und windschiefen Flächen den Uebergang von den concav-concaven zu den concav-convexen Flächen bilden.

§. 201.

Nabel- oder Kreispunkte der Flächen.

Untersucht man den Fall, dass alle Normalschnitte gleiche Radien haben sollen, so dass ein Nabel- oder Kreispunkt der Fläche bestimmt werde, so müssen sich in

$$(15)\quad \frac{1}{\varrho} = \frac{r + 2sy' + ty'^2}{N[1 + y'^2 + (p + qy')^2]}$$

die Werthe y' im Zähler und Nenner heben.

Diess tritt ein, wenn $\frac{1+p^2}{r} = \frac{pq}{s} = \frac{1+q^2}{t}$ gesetzt wird. Denn macht man diese Substitutionen, so wird:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{t\left(\frac{r}{t} + \frac{2sy'}{t} + y'^2\right)}{N(1+q^2)\left(\frac{r}{t} + \frac{2sy'}{t} + y'^2\right)} = \frac{t}{N(1+q^2)}.$$

Es ist daher in diesem Falle:

$$\varrho = \frac{N(1+q^2)}{t} = \frac{Npq}{s} = \frac{N(1+p^2)}{r}.$$

Zur Bestimmung der drei Unbekannten x, y, z hat man die Gleichung der Fläche und die obigen zwei Bedingungs-Gleichungen:

$$\frac{1+p^2}{r} = \frac{pq}{s} = \frac{1+q^2}{t}.$$

§. 202.

Die concav-convexen Flächen.

In der vorhergehenden Untersuchung sind uns Flächen begegnet, deren Krümmungshalbmesser nach einer oder nach zwei Richtungen unendlich gross sind, die developpablen Flächen, und die concav-convexen und windschiefen Flächen. Die ersteren sind hinlänglich bekannt. Es bleibt noch übrig, Einiges über die letzteren zu erörtern.

Bei concav-convexen Flächen bieten sich vornehmlich zwei Fragen dar.

1) Nach welchen Criterien wird entschieden, ob eine gegebene Fläche concav-convex ist, oder nicht?

Diese Criterien sind: Man nimmt die Ordinate z als Function von x und y, und untersucht, ob

$$\left|\frac{d^2z}{dxdy}\right|^2 > \left|\frac{d^2z}{dx^2}\right| \left|\frac{d^2z}{dy^2}\right| \quad \text{ist.}$$

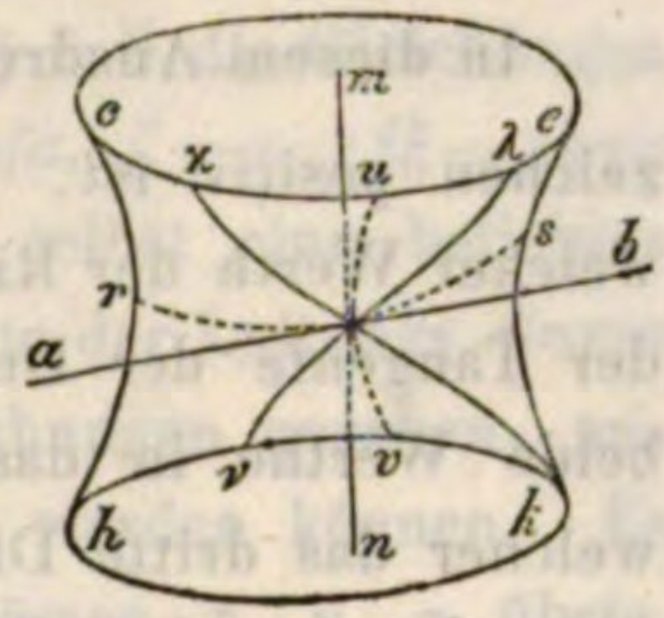
Ist diess der Fall, dann substituirt man die beiden Werthe $\frac{dy}{dx}$, die man aus der Gleichung findet:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left|\frac{d^2z}{dxdy}\right|}{\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|} \pm \frac{\sqrt{\left|\frac{d^2z}{dxdy}\right|^2 - \left|\frac{d^2z}{dx^2}\right|\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|}}{\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|},$$

in das dritte totale Differenzial d^3z. Wird für beide Werthe $\frac{dy}{dx}$ diess dritte Differenzial nicht gleich Null, so ist die gegebene Fläche concav-convex.

2) Welche Lage hat die tangirende Ebene in jedem Punkte der concav-convexen Flächen?

Fig. 38.



Wird eine solche Fläche nach *rs* durchschnitten, so sei ihre Tangente in einem Punkte gleich der Linie *ab*. Diese Tangente liegt ganz ausserhalb der Fläche *chke*. Wird die Fläche nach *uv* durchschnitten, so sei *mn* ihre Tangente in demselben Punkte, und diese Tangente liegt ganz innerhalb der gegebenen Fläche. Da die tangirende Ebene durch diese beiden Tangenten geht, so ist einleuchtend, dass sie die Fläche in zwei Curven *xk* und *λv* durchschneiden müsse, und da $d^2z = 0$ ist, so müssen diese Curven, die nicht gerade Linien sein können, offenbar in ihrem Durchschnittspunkte einen Inflexionspunkt haben. Diess ist eine ausgezeichnete Eigenschaft der concav-convexen Flächen.

§. 203.

Die windschiefen Flächen.

Die windschiefen Flächen werden im Nachfolgenden etwas ausführlicher erörtert werden.

1) Nach welchen Criterien wird entschieden, ob eine Fläche windschief ist, oder nicht?

Hier gilt dasselbe Criterium, wie für concav-convexe Flächen. Man nimmt z. B. z als Function von x und y, und untersucht, ob

$$\left|\frac{d^2z}{dxdy}\right|^2 > \left|\frac{d^2z}{dx^2}\right|\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right| \text{ ist.}$$

2) Da jede Fläche in einem gegebenen Punkte *allgemein* nur nach einer Richtung in geraden Linien durchschnitten werden kann,

die Endgleichung der windschiefen Flächen aber zwei Richtungen angiebt, von denen die eine die Richtung der geraden Linie, die andere aber nur die Richtung von Durchschnitts-Curven angeben kann, so entsteht die Frage, wie entschieden werden könne, welches die Richtung der geraden Linie und welches die Richtung jener Durchschnitts-Curven sei?

Man nimmt:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left|\frac{d^2z}{dxdy}\right|}{\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|} \pm \frac{\sqrt{\left|\frac{d^2z}{dxdy}\right|^2 - \left|\frac{d^2z}{dx^2}\right|\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|}}{\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|}.$$

In diesem Ausdrucke hat $\frac{dy}{dx}$, da die Grösse unter dem Wurzelzeichen positiv ist, zwei Werthe. Um entscheiden zu können, welcher Werth der Richtung der geraden Linie und welcher Werth der Tangente der Durchschnitts-Curve angehöre, substituirt man beide Werthe in das dritte Differenzial d^3z. Derjenige Werth, welcher das dritte Differenzial gleich Null macht, zeigt die Richtung der geraden Linie an (da die höheren Differenzialien der geraden Linie insgesammt gleich Null sind), und derjenige Werth, welcher das dritte Differenzial nicht gleich Null macht, zeigt die Richtung der Tangente der Durchschnitts-Curve in diesem Punkte an, für welche zwar *singulär* d^2z, nicht aber auch d^3z, noch auch die höheren Differenzialien gleich Null sind. Der zweite Werth von $\frac{dy}{dx}$ gehört daher der Tangente diese Curve an.

3) Wie findet man aus der gegebenen Gleichung einer windschiefen Fläche die Gesetze, nach welchen sich die gerade Linie auf dieser Fläche fortbewegt?

Man entscheidet zuerst, welcher der zwei Werthe $\frac{dy}{dx}$ der geraden Linie angehört. Ist dieser Werth z. B. gleich fa, so ist, wenn η und ξ die Coordinaten der geraden Linie ausdrücken:

$$(\text{I.}) \quad \eta - y = (\xi - x) fa.$$

Auf dieselbe Art bestimmt man nun ein zweites Differenzial, z. B. $\frac{dz}{dx}$, indem man $d^2y = 0$ setzt; und findet man den Werth, der zu der geraden Linie gehört, $\frac{dz}{dx} = \varphi a$, dann ist, wenn ζ, ξ die Coordinaten der geraden Linie ausdrücken:

$$(\text{II.}) \quad \zeta - z = (\xi - x) \varphi a.$$

Diese beiden Gleichungen bestimmen alle geraden Linien der windschiefen Flächen; und die Functionen fa und φa bestimmen die Gesetze, nach welchen sich die gerade Linie auf der windschiefen Fläche fortbewegt. — Der zweite Werth von $\frac{dz}{dx}$ gehört wieder der Tangente der Durchschnitts-Curve an. Die Lage dieser Tangente ist durch die beiden Gleichungen ebenso bestimmt, wie die Lage der geraden Linie.

4) Sind die Gesetze gegeben, nach welchen sich eine gerade Linie fortbewegt, wie findet man aus ihnen die Gleichung der windschiefen Fläche selber?

Es seien $F(x', y', z') = 0$ und $\varphi(x', y', z') = 0$ die Gleichungen einer Leitungs-Curve, und $(\eta - y) = (\xi - x)fa$, $\zeta - z = (\xi - x)\varphi a$ die Gleichungen der geraden Linie. Da a selbst eine beliebige Function von x', y', z', und da für alle Punkte der Leitungs-Curve $\xi = x'$, $\eta = y'$, $\zeta = z'$ ist, so sind vier Gleichungen gegeben, aus welchen die drei Grössen x', y', z' eliminirt werden können. Es bleibt noch eine Endgleichung der drei Grössen x, y, z übrig, welches die gesuchte Gleichung der windschiefen Fläche ist.

5) Die windschiefen Flächen können in allen Punkten durch gerade Linien geschnitten werden, die ihren Richtungen nach durch die ersten Werthe von $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ bestimmt werden. Diese ersten Werthe bezeichnen wir durch ω_{y}^{1} und ω_{z}^{1}, im Gegensatze zu ω_{y}^{2} und ω_{z}^{2}, welche die zweiten Werthe von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ darstellen. — In allen Punkten können aber die windschiefen Flächen auch durch Curven geschnitten werden, deren Coordinaten ebenfalls das zweite Differenzial d^2z gleich Null machen, und deren Tangenten durch ω_{y}^{2} und ω_{z}^{2} vollkommen bestimmt sind.

6) Wird in einer windschiefen Fläche durch die Linie der ersten Werthe von $\frac{dy}{dx}$, nämlich $(\omega_{y}^{1}, \omega_{z}^{1})$ eine Ebene gelegt, so durchschneidet sie die windschiefe Fläche in einer geraden Linie. Wird aber durch die Linie der zweiten Werthe von $\frac{dy}{dx}$, nämlich $(\omega_{y}^{2}, \omega_{z}^{2})$ eine Ebene gelegt, so durchschneidet sie die Fläche in einer Curve, die im gegebenen Punkte einen Inflexionspunkt hat. Diess gilt von allen Ebenen, die durch die Linie $(\omega_{y}^{2}, \omega_{z}^{2})$ gelegt

werden. Es gilt daher auch dann noch, wenn diese Durchschnitts-Ebene durch die beiden geraden Linien $(\omega_{1y}, \omega_{1z})$ und $(\omega_{2y}, \omega_{2z})$ gelegt wird, eine Ebene, welche die tangirende Ebene der windschiefen Fläche selbst ist, weil sie durch die beiden Tangenten $(\omega_{1y}, \omega_{1z})$ und $(\omega_{2y}, \omega_{2z})$ gelegt ist.

7) Da jede tangirende Ebene durch die beiden Tangenten je zweier Durchschnitts-Curven im Punkte (x, y, z) bestimmt wird, so folgt, dass die tangirende Ebene einer windschiefen Fläche in jedem Punkte mit dieser Fläche sowohl die gerade Durchschnitts-Linie, als auch eine Durchschnitts-Curve gemeinschaftlich habe, deren Tangente durch ω_{2y}, ω_{2z} bestimmt wird. Denn man braucht nur durch diese Tangente und durch die gerade Durchschnitts-Linie eine Ebene zu legen, so ist diese Ebene die tangirende Ebene, und da für sie d^2z nach einer Richtung hin allgemein gleich Null ist (für den Durchschnitt in der geraden Linie), nach einer zweiten Linie aber d^2z nur singulär gleich Null ist, so folgt, dass auch in dieser Richtung die tangirende Ebene und die windschiefe Fläche sich durchschneiden, also eine Durchschnitts-Curve gemeinschaftlich haben.

Es sei nun: $F(x, y, z) = 0$ die Gleichung einer Fläche, so sind, wenn z als Function von x und y genommen wird, die Reihen der Zunahme und Abnahme von z:

$$\Delta z = dz + \frac{1}{2}d^2z + \frac{1}{2.3}d^3z + \frac{1}{2.3.4}d^4z + \ldots;$$

$$\Delta_1 z = dz - \frac{1}{2}d^2z + \frac{1}{2.3}d^3z - \frac{1}{2.3.4}d^4z + \ldots$$

Da für windschiefe Flächen die Gleichung gilt: $d^2z = 0$, so gehen die obigen Reihen in folgende über:

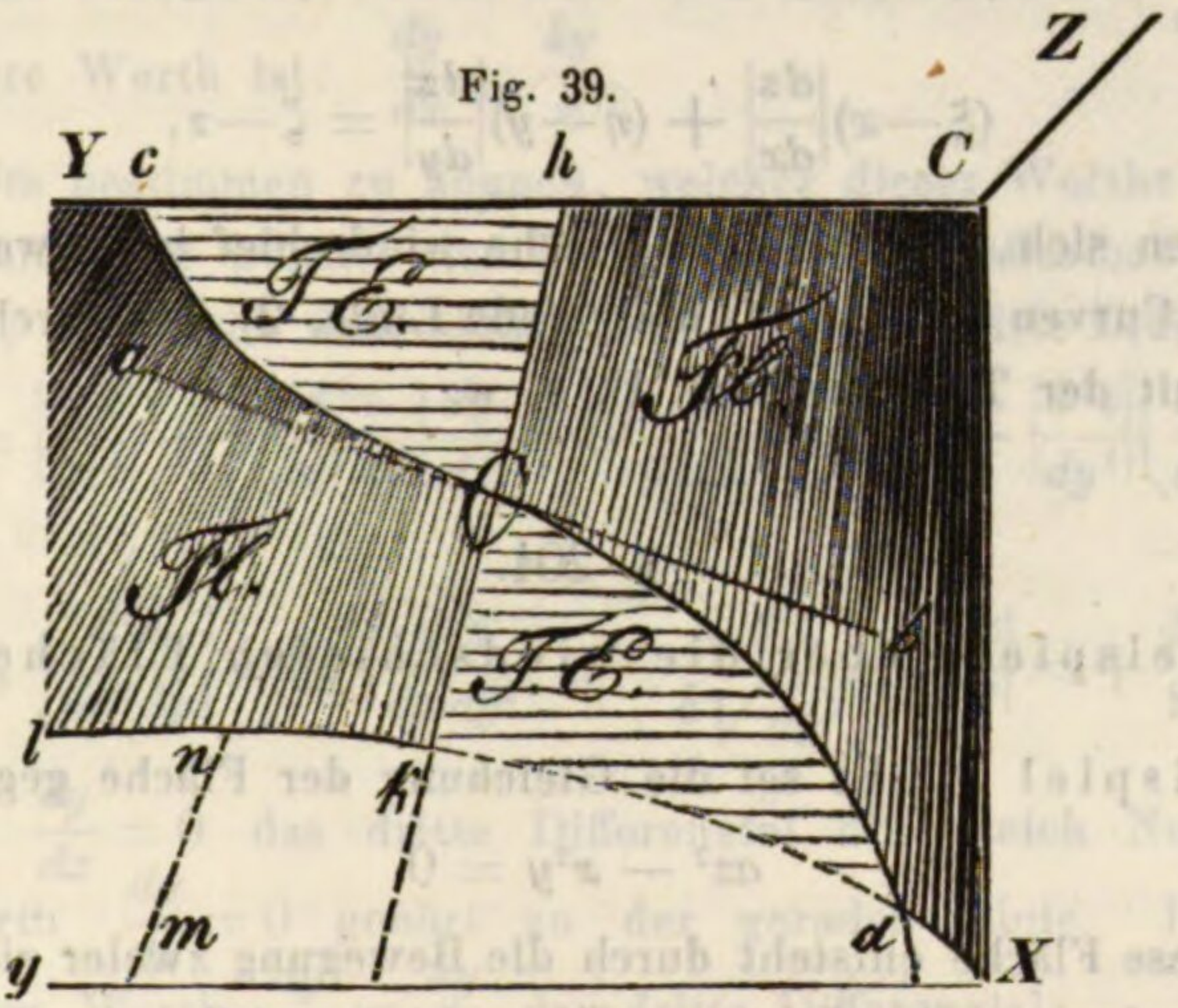
$$\Delta z = dz + \frac{1}{2.3}d^3z + \frac{1}{2.3.4}d^4z + \ldots$$

$$\Delta_1 z = dz + \frac{1}{2.3}d^3z - \frac{1}{2.3.4}d^4z + \ldots$$

Da die beiden ersten Glieder in beiden Reihen dieselben Zeichen haben, so ist auch $dz \begin{Bmatrix}\text{grösser}\\ \text{kleiner}\end{Bmatrix}$ als Δz für die Zunahme, wie für die Abnahme. Es muss daher bei allen Werthen von $\frac{dy}{dx}$, welche $d^2z = 0$ machen, die tangirende Ebene die windschiefe Fläche durchschneiden. Diese Werthe sind aber doppelt:

$(\omega_{y}^{1}, \omega_{z}^{1})$; $(\omega_{y}^{2}, \omega_{z}^{2})$. — Ist daher die Fläche: *YhCXdknl* ein Theil einer windschiefen Fläche, und entspricht für den Punkt *O* die gerade Durchschnitts-Linie *hk* den ersten Werthen $(\omega_{y}^{1}, \omega_{z}^{1})$, und die Tangente *ab* den zweiten Werthen $(\omega_{y}^{2}, \omega_{z}^{2})$, und wird durch die Linien *hk* und *ab* die tangirende Ebene zu *O* gelegt, so durchschneidet diese Ebene die windschiefe Fläche: 1) in der geraden Linie *hk*, 2) in einer Curve *cOd*, deren Tangente *ab* ist.

Fig. 39.



Eine Folge davon ist, dass, wenn die tangirende Ebene zwischen der geraden Linie *Ok* und der Curve *Od über* der windschiefen Fläche ist, sie sowohl zwischen *Ok* und *Oc*, als auch zwischen *Oh* und *Od unter* dieser Fläche sein müsse, weil sich die tangirende Ebene und die gegebene Fläche in *Ok* und *Od* durchschneiden. Aus demselben Grunde muss aber die tangirende Ebene wieder zwischen *cO* und *Oh über* der windschiefen Fläche sein, weil sie jenseits dieser beiden Linien *cO* und *Oh unter* dieser Fläche ist.

Daraus folgt, dass sich die jedesmalige tangirende Ebene und die windschiefe Fläche nicht bloss singulär, sondern in allen Punkten der Fläche in je *zwei* Linien durchschneiden.

Die beiden Linien, die Gerade *hk* und die Curve *cd*, sind bei den windschiefen Flächen dasselbe, was bei ebenen Curven der Inflexions-Punkt ist; die tangirende Ebene durchschneidet diese Flächen in den zwei Linien, wie die Tangente die ebenen Curven

im Inflexions-Punkte durchschneidet. Nur besteht der Unterschied, dass der Inflexions-Punkt bei ebenen Curven ein singulärer Punkt ist, während bei windschiefen Flächen die zwei Durchschnitts-Linien in allen Punkten stattfinden müssen.

8) Es ergeben sich nun andere höchst einfache Criterien für die windschiefen Flächen. Verbindet man nämlich die Gleichung dieser Flächen $f(x, y, z) = 0$, mit der Gleichung der tangirenden Ebene:

$$(\xi - x)\left|\frac{dz}{dx}\right| + (\eta - y)\left|\frac{dz}{dy}\right| = \zeta - z,$$

so müssen sich, im Falle die Fläche windschief ist, zwei Durchschnitts-Curven ergeben: 1) die gerade Linie, 2) die Durchschnitts-Curve mit der Tangente *ab*. U. s. w.

§. 204.

Beispiele über die windschiefen Flächen.

Beispiel 1. Es sei die Gleichung der Fläche gegeben:

$$az^2 - x^2y = 0.$$

(Diese Fläche entsteht durch die Bewegung zweier sich durchschneidender gerader Linien. Diese Linien fallen in CX zusammen, und sind senkrecht auf CY, in welcher sie sich schneiden. [Vorhergehende Figur.] Je weiter sie von C gegen Y vorrücken, desto grössere Winkel machen sie miteinander, bis sie endlich für $y = \infty$ zwei Rechte bilden, so dass die Fläche, die mit einer Linie (CX) beginnt, mit einer Ebene endigt. Diese Ebene hat in CY eine Gräte und in C selbst einen schliessenden Punkt.)

1) Um entscheiden zu können, ob diess eine windschiefe Fläche sei, oder nicht, untersucht man die zweiten Differenzialien einer Ordinate, z. B. z, die als Function der beiden andern Ordinaten x und y genommen wird.

Es ist:

$$z = x\sqrt{\frac{y}{a}};\quad \left|\frac{dz}{dx}\right| = \sqrt{\frac{y}{a}};\quad \left|\frac{dz}{dy}\right| = \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{ay}};\quad \left|\frac{d^2z}{dx^2}\right| = 0;$$

$$\left|\frac{d^2z}{dx\,dy}\right| = \frac{1}{2\sqrt{ay}};\quad \left|\frac{d^2z}{dy^2}\right| = -\frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{ay^3}}.$$

Es ist daher:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left|\frac{d^2z}{dxdy}\right|}{\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|} \pm \frac{\sqrt{\left|\frac{d^2z}{dxdy}\right|^2 - \left|\frac{d^2z}{dx^2}\right|\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|}}{\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \pm \frac{2y}{x}.$$

Da der Quotient $\frac{dy}{dx}$ zwei Werthe hat, so kann die untersuchte Fläche eine windschiefe Fläche sein. Der eine Werth ist: $\frac{dy}{dx} = 0$; der andere Werth ist: $\frac{dy}{dx} = \frac{4y}{x}$.

2) Um bestimmen zu können, welcher dieser Werthe der geraden Linie, und welcher der Curve mit einem Inflexions-Punkte zugehöre, substituirt man beide Werthe in das dritte Differenzial:

$$\frac{d^3z}{dx^3} = \left|\frac{d^3z}{dx^3}\right| + 3\left|\frac{d^3z}{dx^2dy}\right|\frac{dy}{dx} + 3\left|\frac{d^3z}{dxdy^2}\right|\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left|\frac{d^3z}{dy^3}\right|\left(\frac{dy}{dx}\right)^3.$$

Da

$$\left|\frac{d^3z}{dx^3}\right| = 0, \quad \left|\frac{d^3z}{dx^2dy}\right| = 0, \quad \left|\frac{d^3z}{dxdy^2}\right| = -\frac{1}{4\sqrt{ay^3}}; \quad \left|\frac{d^3z}{dy^3}\right| = +\frac{3}{8}\frac{x}{\sqrt{ay^5}};$$

so macht $\frac{dy}{dx} = 0$ das dritte Differenzial d^3z gleich Null, und der Werth $\frac{dy}{dx} = 0$ gehört zu der geraden Linie. Hingegen macht der Werth $\frac{dy}{dx} = \frac{4y}{x}$ das dritte Differenzial:

$$\frac{d^3z}{dx^3} = -\frac{3}{4}\cdot\frac{16y^2}{x^2\sqrt{ay^3}} + \frac{3}{8}\cdot\frac{64y^3}{x^2\sqrt{ay^5}} = +\frac{12}{x^2}\sqrt{\frac{y}{a}}.$$

Der Werth $\frac{dy}{dx} = \frac{4y}{x}$ zeigt also die Richtung der Curve mit einem Inflexions-Punkte an.

3) Die eine Gleichung der geraden Linie ist, da $\frac{dy}{dx} = 0$ ist: $\frac{\eta - y}{\xi - x} = 0$.

Um eine zweite Gleichung zu finden, nimmt man eine andere Coordinate, z. B. y als Function von x und z, und sucht nun $\frac{dz}{dx}$.

Da $y = \frac{az^2}{x^2}$ ist, so ist:

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| = -\frac{2az^2}{x^3}; \quad \left|\frac{dy}{dz}\right| = \frac{2az}{x^2}; \quad \left|\frac{d^2y}{dx^2}\right| = \frac{6az^2}{x^4};$$

$$\left|\frac{d^2y}{dxdz}\right| = -\frac{4az}{x^3}; \quad \left|\frac{d^2y}{dz^2}\right| = \frac{2a}{x^2}.$$

Daraus folgt, dass:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\left|\frac{d^2y}{dx\,dz}\right|}{\left|\frac{d^2y}{dz^2}\right|} \pm \frac{\sqrt{\left|\frac{d^2y}{dx\,dz}\right|^2 - \left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|\left|\frac{d^2y}{dz^2}\right|}}{\left|\frac{d^2y}{dz^2}\right|}; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{2z}{x} \pm \frac{z}{x}$$

sei. Von diesen beiden Werthen: $\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}$; $\frac{dz}{dx} = \frac{3z}{x}$, macht $\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}$ das dritte Differenzial gleich Null; er gehört also zu der geraden Linie. Diess giebt die zweite Gleichung der geraden Linie: $\frac{\zeta - z}{\xi - x} = \frac{z}{x}$.

Diese Gleichung in Verbindung mit der vorhergehenden Gleichung: $\frac{\eta - y}{\xi - x} = 0$ bestimmt die gesuchte gerade Linie.

4) Da $\left|\frac{dz}{dx}\right| = \sqrt{\frac{y}{a}}$, $\left|\frac{dz}{dy}\right| = \frac{x}{2\sqrt{ay}}$ ist, so wird die Gleichung der tangirenden Ebene:

$$(\xi - x)\sqrt{\frac{y}{a}} + (\eta - y)\frac{x}{2\sqrt{ay}} = \zeta - z.$$

Bei einem beliebigen Punkte der Fläche, z. B. $x = a$, $y = a$, $z = a$, wird diese Gleichung folgende:

$$\xi + \frac{1}{2}\eta - \frac{1}{2}a = \zeta. \quad \text{U. s. w.}$$

Verbindet man die Gleichung der tangirenden Ebene mit der Gleichung der Fläche: $az^2 = x^2y$, so werden für alle Durchschnitts-Punkte der Ebene und der Fläche die Grössen ξ, η, ζ und x, y, z beziehungsweise einander gleich.

Eliminirt man aus beiden Gleichungen z, d. h. nimmt man die Projection der Durchschnitts-Curve auf die Ebene XY, so ergiebt sich die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a}(a - y) + x(y - a) + \frac{1}{4}(y - a)^2 = 0.$$

Diese zerlegt sich aber in die zwei Gleichungen:

$$\text{(I.)} \quad a - y = 0; \quad \text{(II.)} \quad -\frac{x^2}{a} + x + \frac{1}{4}(y - a) = 0.$$

Die erste Gleichung giebt eine gerade Linie, die zweite eine Parabel der zweiten Ordnung.

Nimmt man die Projection auf die Ebene XZ, so erhält man durch die Elimination von y die Gleichung:

$$a(x^2 - z^2) - 2x^2(x - z) = 0,$$

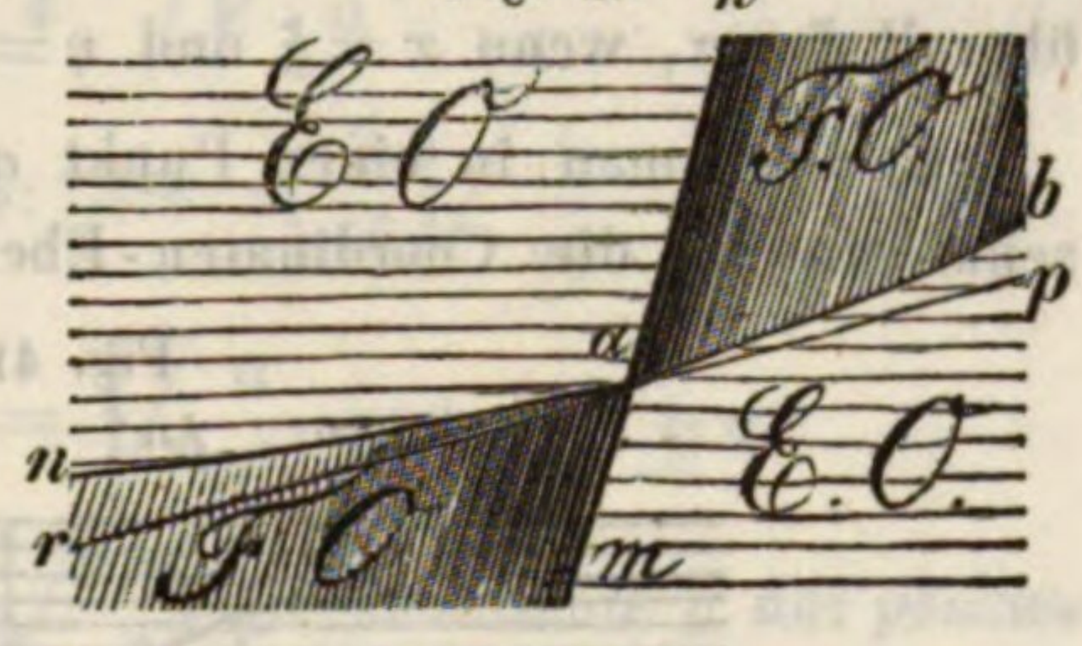
welche sich wieder in die zwei Gleichungen zerlegt:

$$\text{(I.)}\quad x - z = 0; \qquad \text{(II.)}\quad a(x + z) - 2x^2 = 0.$$

Die erste Gleichung giebt wieder eine gerade Linie, die zweite wieder eine Parabel zweiter Ordnung.

5) Da sich Fläche und tangirende Ebene in zwei Linien durchschneiden (*km* und *nb*), so ist nothwendig, dass rings um den Punkt a herum die Fläche zweimal über und zweimal unter der tangirenden Ebene ist.

Fig. 40.



Diess zeigt auch eine leichte Rechnung. Wäre die tangirende Ebene ganz über oder ganz unter der Fläche, so wäre um den Punkt a herum ζ immer grösser oder immer kleiner als z.

Setzt man $z = y = x = a$, also für den Punkt a ebenfalls $\xi = \eta = \zeta = a$, so hat man die vier Räume:

$$\text{I}\ \begin{matrix} x = \xi < a \\ y = \eta < a \end{matrix} \quad \text{II}\ \begin{matrix} x = \xi < a \\ y = \eta > a \end{matrix} \quad \text{III}\ \begin{matrix} x = \xi > a \\ y = \eta < a \end{matrix} \quad \text{IV}\ \begin{matrix} x = \xi > a \\ y = \eta > a \end{matrix}$$

und I und IV, sowie II und III sind sich im Punkte a entgegengesetzt.

Nun ist für Raum I, z. B.:

$$x = \xi = \frac{1}{2}a,\ y = \eta = \frac{1}{4}a, \text{ offenbar } \begin{Bmatrix} \zeta = \frac{1}{8}a \\ z = \frac{1}{4}a \end{Bmatrix}, \text{ also } \zeta < z.$$

Für Raum II, z. B.:

$$x = \xi = \frac{1}{2}a,\ y = \eta = \frac{5}{4}a, \text{ ist } \begin{Bmatrix} \zeta = \frac{5}{8}a \\ z = \frac{a\sqrt{5}}{4} \end{Bmatrix}, \text{ also } \zeta > z.$$

Für Raum III, z. B.:

$$x = \xi = \frac{3a}{2},\ y = \eta = \frac{1}{4}a, \text{ ist } \begin{Bmatrix} \zeta = \frac{9}{8}a \\ z = \frac{3}{4}a \end{Bmatrix}, \text{ also } \zeta > z.$$

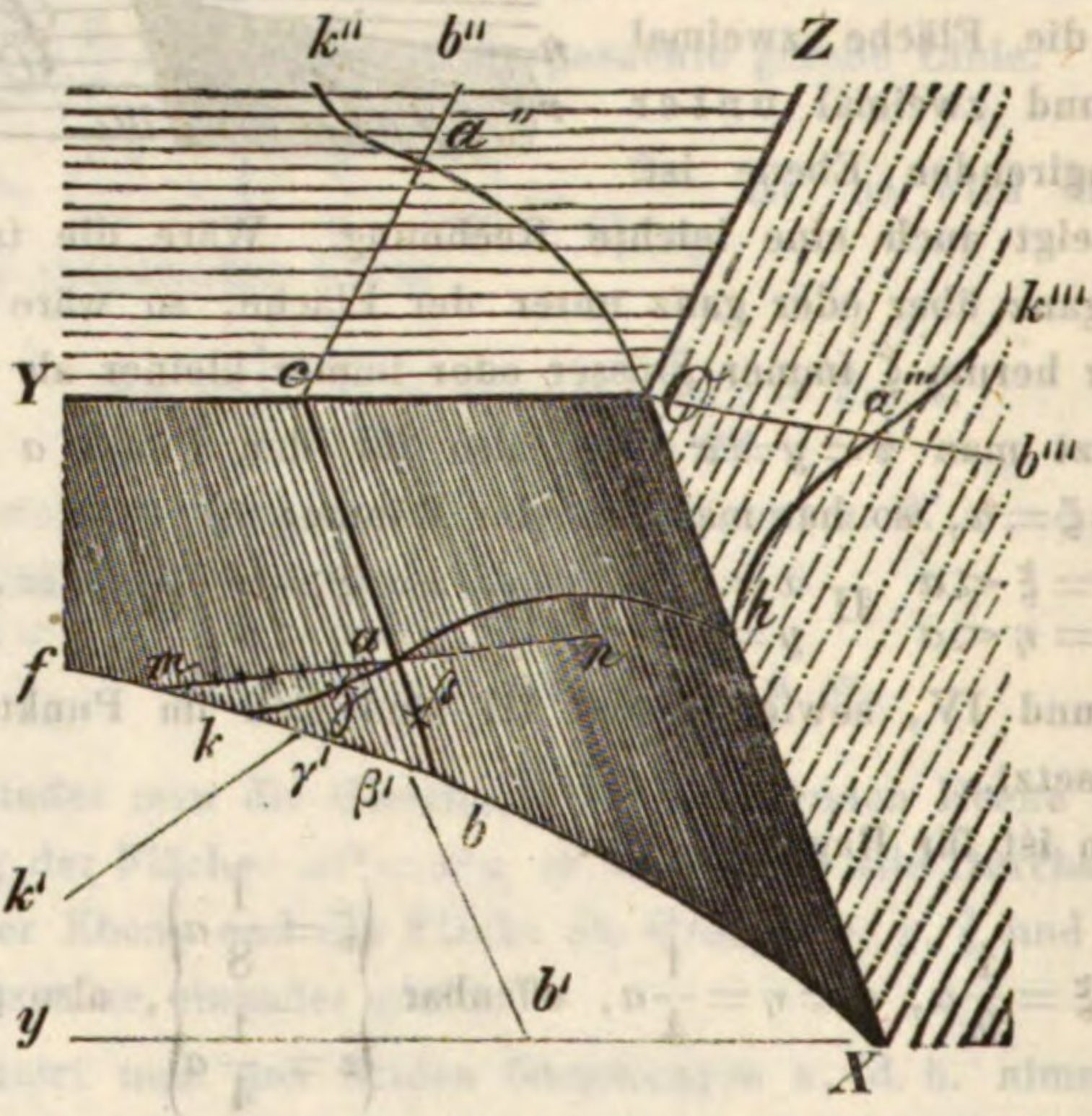
Für Raum IV, z. B.:

$$x = \xi = \frac{3}{2}a, \quad y = \eta = \frac{5}{4}a, \quad \text{ist} \begin{Bmatrix} \zeta^2 = \frac{169}{64}a^2 \\ z^2 = \frac{180}{64}a^2 \end{Bmatrix}, \quad \text{also } \zeta < z.$$

Diess zeigt, dass die tangirende Ebene in den sich gegenüberstehenden Räumen unter und über der Fläche ist. (In den Durchschnitts-Curven *kam* und *nab* selbst, welche die Räume abtheilen, überall $\zeta = z$, wenn $x = \xi$ und $\eta = y$ ist.)

6) Legt man in einen Punkt a, z. B. $x = a$, $y = a$, $z = a$, senkrecht auf die Coordinaten-Ebene XY eine Ebene durch die

Fig. 41.



Linie mn, deren Lage durch die zweiten Werthe von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$, $\omega_{\frac{2}{y}} = \frac{4y}{x}$, $\omega_{\frac{2}{z}} = \frac{3z}{x}$ bestimmt ist, so durchschneidet diese Ebene die windschiefe Fläche in der Curve *kah*. Die Gleichung dieser Ebene ist: $\frac{(\eta - a)}{\xi - a} = 4$, oder: $4\xi - 3a = \eta$. Verbindet man diese Gleichung mit der Gleichung der windschiefen Fläche: $z = x\sqrt{\frac{y}{a}}$, so ist die Curve *hak* durch diese beiden Gleichungen bestimmt. Die Projection dieser Curve auf die Ebene XY ist die

gerade Linie $k'\gamma'h$, ihre Projection auf die Ebene ZY ist die Curve $Oa''k''$, und ihre Projection auf die Ebene XZ ist die Curve $ha'''k'''$.

Die Gleichung der Curve $Oa''k''$ findet man, wenn man aus den gegebenen Gleichungen: $4x-3a=y$ (I.) und $z=x\sqrt{\frac{y}{a}}$ die Grösse x eliminirt. Diese Gleichung ist:

$$z=\left(\frac{y+3a}{4}\right)\sqrt{\frac{y}{a}},$$

also:

$$dz=\left(\frac{3}{8}\sqrt{\frac{y}{a}}+\frac{3}{8}\sqrt{\frac{a}{y}}\right)dy;\quad d^2z=\left(\frac{3}{16}\sqrt{\frac{1}{ay}}-\sqrt{\frac{a}{y^3}}\right)dy^2.$$

Für $d^2z=0$ wird $\sqrt{\frac{1}{ay}}=\sqrt{\frac{a}{y^3}}$, und $y=\pm a$.

Weil in der Fläche, $z=x\sqrt{\frac{y}{a}}$, die Coordinate y nur *positive* Werthe haben kann, so folgt, dass die Curve im Punkte $y=a$ einen Inflexions-Punkt habe.

Eliminirt man aus den Gleichungen (I.) und (II.) die Grösse y, so geht die Gleichung der Projection $ha'''k'''$ hervor:

$$z=x\sqrt{\left(\frac{4x}{a}-3\right)}.$$

Daraus findet man:

$$dz=\sqrt{\left(\frac{4x}{a}-3\right)}dx+\frac{2x}{a}\frac{dx}{\sqrt{\frac{4x}{a}-3}};$$

$$d^2z=\frac{4dx^2}{a\sqrt{\frac{4x}{a}-3}}-\frac{4x}{a^2}\frac{dx^2}{\sqrt{\left(\frac{4x}{a}-3\right)^3}};$$

$$d^2z=\left(\frac{16x-12a-4x}{a^2\sqrt{\frac{4x}{a}-3}}\right)dx^2,$$

und für d^2z folgt: $x=a$.

Die Curve $ha'''k'''$ hat also für $x=a$ ebenfalls einen Inflexions-Punkt.

Da nun die beiden Projectionen der Curve kah für die Werthe $y=a$ und $x=a$ Inflexions-Punkte haben, so hat die Curve kah

für $y = a$, $x = a$ (woraus sich von selbst $z = a$ ergiebt) gleichfalls einen Inflexions-Punkt.

Zusatz. Die Projectionen der Curve *kah* auf die drei Coordinaten-Ebenen sind also: 1) auf die Ebene XY die gerade Linie $k'\gamma'$, 2) auf die Ebene YZ die Curve $Oa''k''$, 3) auf die Ebene XZ die Curve $ha'''k'''$.

Hingegen hat die gerade Durchschnitts-Linie der Fläche, nämlich *cab*, folgende Projectionen: 1) auf die Ebene XY die Linie $b'\beta'$, 2) auf die Ebene YZ die Linie cb'', 3) auf die Ebene XZ die Linie Ob'''. Die Linie $\beta'b'$ ist parallel mit OX, und entspricht der Gleichung: $\frac{\eta - a}{\zeta - x} = 0$; die Linie Ob''' halbirt den rechten Winkel ZOX, und entspricht der gefundenen Gleichung: $\frac{\zeta - a}{\xi - a} = 1$.

Anmerkung. Die gefundenen Curven $ha'''k'''$ und $Oa''k''$ haben wir bereits bei den Untersuchungen über die Asymptoten ebener Curven kennen gelernt.

Beispiel 2. Es sei die Gleichung der windschiefen Fläche gegeben:

$$x^2 + y^2 - a^2 = z^2.$$

(Diese Gleichung entspricht dem Hyperboloide mit einem Fache, und wir wählen diess einfache Beispiel, damit wir in ihm den bekannten Lehrsatz erläutern können, dass jede windschiefe Fläche nach zwei Richtungen in geraden Linien geschnitten werden könne.)

Aus der partiellen Differenzirung ergiebt sich:

$$\left|\frac{dz}{dx}\right| = \frac{x}{z}; \quad \left|\frac{dz}{dy}\right| = \frac{y}{z}.$$

Die Gleichung der tangirenden Ebene ist daher:

$$(\xi - x)\frac{x}{z} + (\eta - y)\frac{y}{z} = \zeta - z.$$

Für irgend einen Punkt dieses Hyperboloids, z. B. für $x = a$, $y = \frac{1}{2}a$, $z = \frac{1}{2}a$, wird diese Gleichung:

$$2(\xi - a) + \eta = \zeta.$$

Verbindet man diese Gleichung: $2(x - a) + y = z$ (da für alle Durchschnittspunkte $\xi = x$, $\eta = y$, $\zeta = z$ ist) mit der

gegebenen Gleichung: $x^2 + y^2 - a^2 = z^2$, so erhält man die beiden Durchschnittscurven. Eliminirt man z. B. z, so ist:

$$(2[x - a] + y)^2 = x^2 + y^2 - a^2,$$

oder:

$$4(x - a)^2 + 4(x - a)y = (x - a)(x + a).$$

Diese Gleichung zerlegt sich in die beiden Gleichungen:

(I.) $x - a = 0$ und (II.) $4(x - a) + 4y = x + a$.

Da sowohl Gleichung (I.), als Gleichung (II.) geraden Linien angehören, so wird das Hyperboloid mit einem Fache in allen Punkten von der tangirenden Ebene in zweien, im Berührungspunkte sich gegenseitig durchschneidenden, geraden Linien geschnitten.

Zusatz. Hier muss auf ein Versehen aufmerksam gemacht werden, das sich, so viel mir bekannt ist, in allen Theorieen findet. — Aus den beiden vorhergehenden Beispielen leuchtet ein, dass, wenn die Gleichung einer windschiefen Fläche algebraisch und vom n^{ten} Grade ist, diese durch ihre Verbindung mit der Gleichung der tangirenden Ebene auf eine Gleichung des $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades zurückgebracht wird. Denn in der Endgleichung dividirt sich ein Factor des ersten Grades (die gerade Linie) heraus, die andere Durchschnitts-Curve bleibt daher nur vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade. Ist daher die Gleichung einer windschiefen Fläche vom *zweiten* Grade, so besteht die Endgleichung aus zwei Factoren des ersten Grades, die den zwei geraden Durchschnittslinien entsprechen, wie sich diess bei der Endgleichung des Hyperboloids mit einem Fache ergeben hat.

Daraus folgt aber noch lange nicht, wie fälschlich angenommen wird, dass auch die windschiefen Flächen vom dritten oder überhaupt vom n^{ten} Grade, noch auch, dass die windschiefen Flächen von transcendenten Gleichungen Endgleichungen des ersten Grades haben, d. h. dass sie in allen Punkten in zwei geraden Linien geschnitten werden können. Im Gegentheile geben die Gleichungen des n^{ten} Grades Endgleichungen vom ersten und vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade, und welche Endgleichungen bei transcendenten Functionen erfolgen, diess werden wir im nachfolgenden Beispiele untersuchen.

Die gewöhnliche Lehre, dass die windschiefen Flächen nach zwei Richtungen in geraden Linien durchschnitten werden können, ist also ein Versehen, und was von dem Hyperboloide

mit einem Fache gilt (weil dasselbe eine Gleichung des zweiten Grades hat), ist irrthümlicher Weise als allgemeine Eigenschaft aller windschiefen Flächen aufgestellt worden. Die Wahrheit ist: Die windschiefen Flächen werden in einer geraden Linie und in einer Curve mit einem Inflexionspunkte durchschnitten, und unter diese Regel ordnet sich auch das Hyperboloid mit einem Fache, denn die gerade Linie gilt ja auch als Curve mit lauter Inflexionspunkten.

Beispiel 3. Es sei die Gleichung gegeben:

$$z = ar\,arc.tang\frac{y}{x}.$$

(Diese Gleichung entspricht der Schraubenfläche [Wendelfläche], welche durch die Bewegung einer geraden Linie entsteht, die sich immer senkrecht auf der Axe Z fortbewegt, und um sie herum Winkel beschreibt, die den durchlaufenen Theilen der Axe Z proportional sind. Dieses Beispiel wählen wir, damit sich zeige, wie aus transcendenten Gleichungen ein Factor des ersten Grades eliminirt wird, und wie eine transcendente Gleichung aussieht, nachdem aus ihr dieser Factor eliminirt ist.)

1) Es ist aus der Gleichung $z = ar\,arc.tang\frac{y}{x}$:

$$\left|\frac{dz}{dx}\right| = -\frac{ar\,y}{x^2+y^2}; \quad \left|\frac{dz}{dy}\right| = \frac{ar\,x}{x^2+y^2};$$

$$\left|\frac{d^2z}{dx^2}\right| = \frac{2ar\,xy}{(x^2+y^2)^2}; \quad \left|\frac{d^2z}{dy^2}\right| = -\frac{2ar\,xy}{(x^2+y^2)^2}; \quad \left|\frac{d^2z}{dxdy}\right| = \frac{ar\,(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Da $\left|\frac{d^2z}{dx^2}\right|$ und $\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right|$ *verschiedene* Zeichen haben, so ist deutlich, dass die Fläche eine *windschiefe* Fläche sein könne, da immer

$$\left|\frac{d^2z}{dxdy}\right|^2 > \left|\frac{d^2z}{dx^2}\right|\left|\frac{d^2z}{dy^2}\right| \text{ ist.}$$

Man findet:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-x^2}{2xy} \mp \frac{x^2+y^2}{2xy}, \text{ also: } \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}; \quad \frac{dy}{dx} = +\frac{y}{x}.$$

2) Um entscheiden zu können, welcher dieser Werthe der geraden Linie angehöre, substituirt man beide Werthe in das dritte Differenzial. Man findet, dass der Werth $\frac{y}{x}$ das dritte Differenzial gleich Null macht, und es ist:

$$\omega_y^1 = +\frac{y}{x}; \quad \omega_y^2 = -\frac{x}{y}.$$

Daraus folgen die Gleichungen:

$$\text{(I.)}\ \frac{\eta - y}{\xi - x} = \frac{y}{x}, \quad \text{(II.)}\ \frac{\eta - y}{\xi - x} = -\frac{x}{y}.$$

3) Auf dieselbe Art bestimmt man die Werthe $\frac{dz}{dx}$, indem man die partiellen Differenzialien der Gleichung: $y = x\,tang\left(\frac{z}{ar}\right)$ nimmt.

Da $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ist, so ergiebt sich von selbst, dass die untersuchte Fläche eine windschiefe Fläche, und dass der eine Werth von $\frac{dz}{dx}$ gleich Null ist.

Denn es ist:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\left|\frac{d^2y}{dx\,dz}\right|}{\left|\frac{d^2y}{dz^2}\right|} \pm \frac{\left|\frac{d^2y}{dx\,dz}\right|}{\left|\frac{d^2y}{dz^2}\right|},$$

also:

$$\frac{dz}{dx} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{2\left|\frac{d^2y}{dx\,dz}\right|}{\left|\frac{d^2y}{dz^2}\right|}.$$

Nun ist:

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| = tang\frac{z}{ar}; \quad \left|\frac{dy}{dz}\right| = \frac{1}{ar}\frac{x}{\left(cos\frac{z}{ar}\right)^2};$$

$$\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right| = 0; \quad \left|\frac{d^2y}{dx\,dz}\right| = \frac{1}{ar\left(cos\frac{x}{ar}\right)^2}; \quad \left|\frac{d^2y}{dz^2}\right| = \frac{2x\,sin\frac{z}{ar}}{a^2r^2\left(cos\frac{z}{ar}\right)^3}.$$

Es ist daher der zweite Werth von $\frac{dz}{dx}$:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{ar}{x\,tang\frac{z}{ar}} = -\frac{ar}{y}.$$

Da endlich $\left|\frac{d^3y}{dx^3}\right| = 0$ ist, so folgt, dass der Werth $\frac{dz}{dx} = 0$ das dritte Differenzial d^3y gleich Null macht. Es ist also $\frac{dz}{dx} = 0$ der erste Werth ω_{1z}, und $\frac{dz}{dx} = -\frac{ar}{y}$ der zweite Werth ω_{2z}.

Aus ω_z^1 folgt, dass $\frac{\zeta - z}{\xi - x} = 0$ die zweite Gleichung der geraden Durchschnitts-Linie ist. Die Gleichung aus ω_z^2, nämlich:

$$\frac{\zeta - z}{\xi - x} = -\frac{ar}{x\,tang\,\frac{z}{ar}} = -\frac{ar}{y},$$

ist die zweite Gleichung der Tangente der *Durchschnitts-Curve.*

Die Gleichungen der geraden Durchschnitts-Linie sind also:

$$\text{(I.)}\ \frac{\eta - y}{\xi - x} = \frac{y}{x};\quad \text{(II.)}\ \frac{\zeta - z}{\xi - x} = 0.$$

Aus Gleichung (II.) folgt, dass die gerade Durchschnitts-Linie immer parallel mit der Ebene XY ist, und aus Gleichung (I.) folgt, dass diese Linie immer die Axe durchschneidet.

4) Die Gleichung der tangirenden Ebene ist:

$$(\xi - x)\left|\frac{dz}{dx}\right| + (\eta - y)\left|\frac{dz}{dy}\right| = \zeta - z.$$

Werden die gefundenen Werthe von $\left|\frac{dz}{dx}\right|$ und $\left|\frac{dz}{dy}\right|$ substituirt, so folgt die Gleichung:

$$(\eta - y)x - (\xi - x)y = (\zeta - z)\left(\frac{x^2 + y^2}{ar}\right);$$

$$\eta x - \xi y = (\zeta - z)\left(\frac{x^2 + y^2}{ar}\right).$$

Verbindet man diese Gleichung mit der Gleichung der windschiefen Fläche:

$$z = ar\,arc.\,tang\,\frac{y}{x},$$

so erhält man die zwei Durchschnitts-Curven der Ebene und der Fläche. Die eine dieser Curven ist immer eine gerade Linie.

Eliminirt man aus beiden Gleichungen je eine der Coordinaten, so erhält man die entsprechenden Projectionen. So ist z. B. die Projection auf die Ebene XY:

$$\frac{(\eta x - \xi y)}{x^2 + y^2} + \frac{z}{ar} = arc.\,tang\,\frac{y}{x};$$

$$\frac{y}{x} = tang\left(\frac{\eta x - \xi y}{x^2 + y^2} + \frac{z}{ar}\right),$$

$$\frac{y}{x} = tang\left(\frac{(\eta - y)x - (\xi - x)y}{x^2 + y^2} + \frac{z}{ar}\right).$$

Für alle Punkte, für welche

$$(\eta - y)x - (\xi - x)y = 0, \quad \frac{\eta}{\xi} = \frac{y}{x}$$

ist, folgt:

$$\frac{\eta}{\xi} = tang\frac{z}{ar} = \frac{y}{x}.$$

Es erfolgen also zwei identische Gleichungen der nämlichen geraden Linie, welche die *Durchschnitts-Linie* ist. Und diess entspricht bei den transcendenten Gleichungen der Elimination eines einfachen Factors der algebraischen Gleichungen.

Obige Projection der Durchschnitts-Curve zerlegt sich also in die zwei Gleichungen:

$(\eta - y)x - (\xi - x)y = 0$ (singulär für die Durchschnitts-Linie),

$\frac{y}{x} = tang\left(\frac{\eta x - xy}{x^2 + y^2} + \frac{z}{ar}\right)$ (für die Durchschnitts-Curve).

Diese letztere Gleichung gilt überhaupt für die Durchschnitts-Linie und für die Durchschnitts-Curve, sowie bei algebraischen Curven die früher gefundenen Gleichungen, z. B.:

$$(x - y)\left(\frac{x^2}{a} - x - \frac{1}{4}[a - y]\right) = 0$$

für die Durchschnitts-Linie, wie für die Durchschnitts-Curve gelten, ehe der Factor $(x - y)$ eliminirt war. Bei algebraischen Gleichungen kann sogleich der eine Factor eliminirt werden, während bei transcendenten Gleichungen sämmtliche Factoren vereinigt bleiben.

5) Die tangirende Ebene durchschneidet die windschiefe Fläche in einer geraden Linie und in einer Curve. Diese Curve und die gerade Linie durchschneiden sich selber gegenseitig im Punkte (x, y, z). Die tangirende Ebene ist also um den Punkt (x, y, z) herum zweimal *über* und zweimal *unter* der windschiefen Fläche.

Zusatz. Aus dem Vorhergehenden ist einleuchtend, dass man aus einer transcendenten Gleichung einen Factor des ersten Grades nicht eliminiren kann, obgleich er in ihr enthalten ist. Ob er aber in ihr enthalten ist, erkennt man daraus, dass er, in sie substituirt, die Gleichung identisch gleich Null macht.

Beispiel 4. Es soll die Gleichung der windschiefen Fläche bestimmt werden, welche durch die Bewegung der geraden Linie entsteht:

$$x - \frac{\alpha^2}{p} = (z - \alpha)\frac{\alpha^2}{p^2}; \quad y = (z - \alpha)\frac{p}{\alpha}.$$

Die Grösse p ist constant und α ist eine beliebige Function der Veränderlichen x, y, z.

(Dieses Beispiel wählen wir, um den anderwärts bekannten Satz zu erläutern, dass die gerade Linie:

$$(y - F\alpha) = (x - \alpha)\varphi\alpha; \quad (z - f\alpha) = (x - \alpha)\psi\alpha$$

eine windschiefe Fläche giebt, wenn weder α, $f\alpha$, $F\alpha$ sämmtlich constant, noch $\varphi\alpha$ und $\psi\alpha$ miteinander constant, noch auch $\varphi\alpha = \frac{dF\alpha}{d\alpha}$ und $\psi\alpha = \frac{df\alpha}{d\alpha}$ sind.)

Eliminirt man aus den beiden Gleichungen die Function α, so findet man als Endgleichung:

$$\frac{p^2x(p+y)^2}{pz(p^2+py+yz)} = \alpha = \frac{pz}{p+y}, \text{ oder } x = \frac{z^2(p^2+py+yz)}{(p+y)^3}.$$

Dass diese Gleichung wirklich die Gleichung einer windschiefen Fläche ist, geht aus folgenden Rechnungen hervor:

Sucht man $\left|\frac{dx}{dz}\right|$, $\left|\frac{dx}{dy}\right|$, $\left|\frac{d^2x}{dz^2}\right|$, $\left|\frac{d^2x}{dy^2}\right|$, $\left|\frac{d^2x}{dx\,dy}\right|$, so wird:

$$\left|\frac{d^2x}{dy\,dz}\right|^2 - \left|\frac{d^2x}{dy^2}\right| \left|\frac{d^2x}{dz^2}\right| \text{ gleich } 4z^2\left(p^2+py-\frac{3}{2}pz\right)^2$$

ein Product zweier Quadrate, welches immer eine positive Grösse ist. Dieses ist aber das Criterium für die windschiefen Flächen.

Man findet für

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{\left|\frac{d^2x}{dy\,dz}\right|}{\left|\frac{d^2x}{dz^2}\right|} \pm \frac{2zp\left(p+y-\frac{3}{2}z\right)}{\left|\frac{d^2x}{dz^2}\right|},$$

also je zwei Werthe, die ohne Schwierigkeit berechnet werden können.

FÜNFTE ABTHEILUNG.

ANWENDUNG DES DIFFERENZIAL-CALCULS AUF MECHANIK UND PHYSIK.

Cap. XXV.

Die Bestimmung des Schwerpunkts der Linien, Flächen und Körper.

§. 205.

Maass der Anwendungen des Differenzial-Calculs auf Mechanik.

Im Vorhergehenden haben wir die Anwendungen des Differenzial-Calculs auf Geometrie vollständig durchgeführt. Wollten wir dasselbe Verfahren auch auf Mechanik und Physik anwenden, so würden diese Untersuchungen einen zu grossen Umfang gewinnen, da in den genannten Wissenschaften fast Alles vom Differenzial-Calcul abhängt. Die vollständige Durchführung muss sachgemäss den Theorieen dieser Disciplinen vorbehalten werden.

Im Nachfolgenden werden wir daher nur einige Sätze abhandeln, und diess nur, damit gezeigt werde, wie die Methode bei solchen Untersuchungen gehandhabt wird. Es wird sich auch hier ergeben, dass alle Lehren durch endliche, messbare und gleichsam greifbare Differenzialien hergestellt werden können. Ist das Schema der Beweise in einigen Beispielen gegeben, dann kann es mit Leichtigkeit auf alle übrigen Lehrsätze übertragen werden.

Wir behandeln zuerst die Lehre vom Schwerpunkt der Linien, Flächen und Körper, hierauf die elementaren Gesetze der Bewegung, namentlich die Lehre von der Geschwindigkeit und der beschleunigenden Kraft, und schliessen mit einigen der wichtigeren Formeln der Physik.

Bei den Anwendungen auf die Bestimmung des Schwerpunktes setzen wir die Definitionen und die ersten Lehrsätze der Mechanik

voraus. Denn der Differenzial-Calcul ist nicht eine Wissenschaft, die gleichsam zaubern kann, wie manche Behandlungsweise desselben vorauszusetzen scheint; der Calcul kann nur das Unbekannte auf den Ausdruck eines Erkannten bringen, d. h. er kann Unbekanntes durch bereits Bekanntes ausdrücken. Er setzt also etwas Bekanntes voraus. So setzen wir auch folgende Sätze als bekannt voraus:

1) der Schwerpunkt einer geraden Linie liegt in ihrer Mitte,
2) der Schwerpunkt eines Rechteckes liegt im Durchschnittspunkte ihrer Diagonalen,
3) der Schwerpunkt eines Kreises liegt im Mittelpunkte,
4) der Schwerpunkt eines Kreis-Sectors liegt in dem Radius, der den entsprechenden Bogen halbirt. U. s. w.

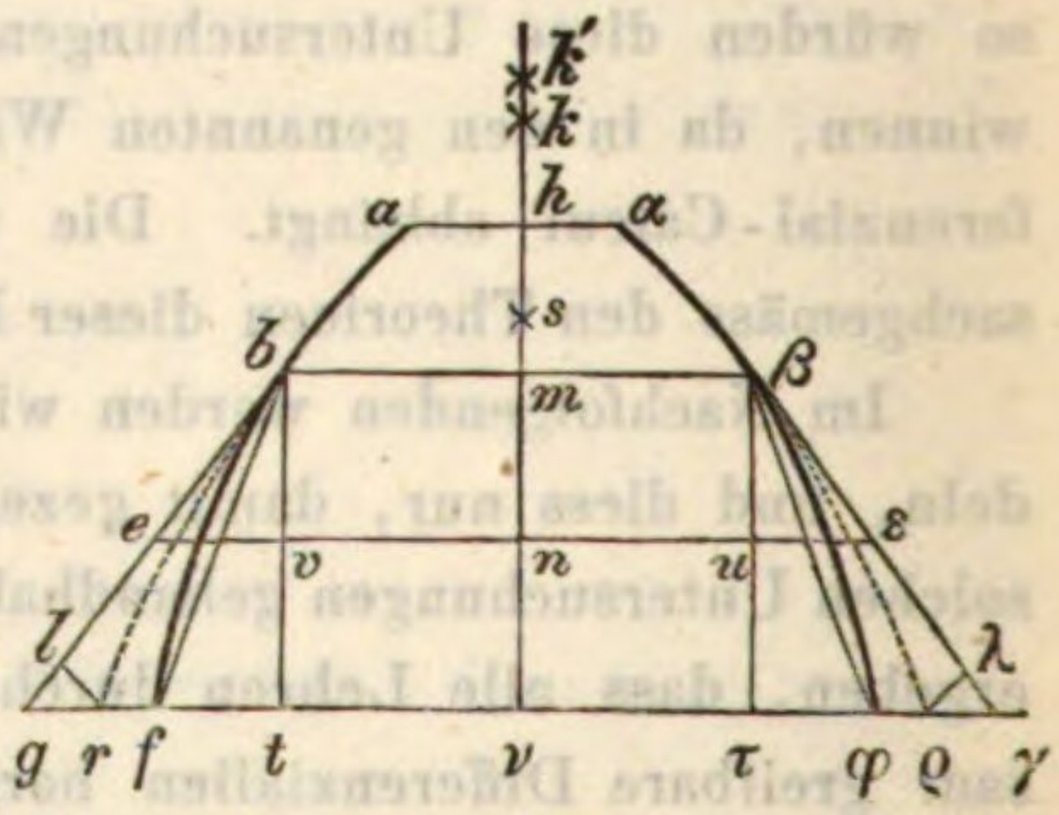
§. 206.

Der Schwerpunkt ebener Flächen.

Es sei der Schwerpunkt der Fläche *abmh* zu bestimmen.

I. Um die Entfernung des Schwerpunkts der Fläche *abmh* von der Linie *ah* zu ermitteln, construiren wir die congruente Fläche $h\alpha\beta m$. Der Schwerpunkt der ganzen Fläche $b\alpha\alpha\beta$ liegt in der Linie *hm*. Er sei im Punkte *s*. Verlängert man *mh* nach *k*, nimmt man $hs = hk$, und denkt man sich im Punkte *k* das Gewicht der Fläche, so ist ihr Gewichts-Moment gleich $(F.E)$, wenn $E = hk = hs$ die Entfernung vom Hypomochlion *h* und *F* die Fläche (das Gewicht der Fläche) ausdrückt.

Fig. 42.



Wird die Ordinate *x* um $m\nu = dx$ vermehrt, so wird die ganze Fläche gleich $abf\varphi\beta\alpha$, und die Zunahme des Gewichts ist gleich dem Gewichte der einzelnen Flächen, in welche sich $\Delta F = bf\varphi\beta$ zerlegt. Andrerseits ist die ganze Zunahme des Gewichts von *FE* gleich $\Delta(FE)$, wobei sich der Punkt *k* durch die Vermehrung der Ordinate *x* nach *k'* verlegt.

Nun ist:

$$\Delta F = dF + \frac{1}{2}d^2F + \frac{1}{2.3}d^3F + ..$$

und, wie bekannt, ist dF gleich dem Rechteck $bt\tau\beta$, ferner $\frac{1}{2}d^2F$ gleich der Summe der Dreiecke gbt und $\gamma\beta\tau$ etc.

Dadurch wird die gegebene Fläche auf solche Flächen zurückgebracht, deren Schwerpunkte schon bekannt sind. So ist z. B. der Schwerpunkt von $bt\beta\tau$ in n, wenn $mn = \frac{1}{2}dx$ ist. Der Schwerpunkt der beiden Dreiecke gbt und $\gamma\beta\tau$ liegt in der Linie $m\nu$, und die Entfernung desselben von m ist gleich $\frac{2}{3}dx$. U. s. w.

Das Gewichts-Moment des Rechtecks $bt\tau b$ ist, wenn $bm = (y-\beta)$ und $hm = (x-\alpha)$ genommen wird:

$$2(y-\beta)\,dx \times (hm + mn) = 2(y-\beta)\,dx\left(x-\alpha+\frac{1}{2}dx\right) =$$
$$= 2(x-\alpha)(y-\beta)\,dx + (y-\beta)\,dx^2.$$

Das Gewichts-Moment der beiden Dreiecke gbt und $\gamma\beta\tau$ ist:

$$dy\,dx\left(x-\alpha+\frac{2}{3}dx\right) = (x-\alpha)\,dy\,dx + \frac{2}{3}dy\,dx^2.$$

Das Gewicht der übrigen Figuren, in die sich Fläche ΔF zerlegt, giebt Grössen, die dx^3, dx^4 etc. zu Factoren haben und die sich unter die dritten, vierten, und höheren Differenzialien von (ΔFE) einordnen.

Wir haben demnach:

$$\Delta(F.E) = 2(x-\alpha)(y-\beta)dx + \begin{Bmatrix}(y-\beta)\,dx^2\\(x-\alpha)\,dy\,dx\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\frac{2}{3}dy\,dx^2\\+\end{Bmatrix} + ..$$

Da nun

$$\Delta(F.E) = d(F.E) + \frac{1}{2}d^2(F.E) + \frac{1}{2.3}d^3(F.E) + ..$$

ist, so wird, weil $2(x-\alpha)(y-\beta)dx$ das einzige Glied ist, das dx in der ersten Potenz enthält:

$$d(F.E) = 2(x-\alpha)(y-\beta)\,dx.$$

Eben so wird:

$$\frac{1}{2}d^2(F.E) = (y-\beta)\,dx^2 + (x-\alpha)\,dy\,dx.$$

Und so kann man der Reihe nach $\frac{1}{2.3}d^3(F.E)$, $\frac{1}{2.3.4}d^4(F.E)$... herstellen. Diess ist aber nicht nothwendig. Denn schon

$$\frac{1}{2}d^2(F.E) = (y-\beta)\,dx^2 + (x-\alpha)\,dy\,dx$$

hätte man analytisch durch Differenzirung von

$$d(F.E) = 2(x-\alpha)(y-\beta)\,dx$$

finden können. Dieses Differenzial giebt in der That:

$$d^2(F.E) = 2(y-\beta)\,dx^2 + (x-\alpha)\,dy\,dx.$$ U. s. w.

Da $d(F.E) = 2.(x-\alpha)(y-\beta)dx$ ist, so ist durch Integration

$$F.E = 2\int(x-\alpha)(y-\beta)\,dx + C.$$

Da

$$F = ab\alpha\beta = 2abhm = 2\int(y-\beta)\,dx + C'$$

ist, so wird:

$$E = \frac{\int(x-\alpha)(y-\beta)\,dx + C}{\int(y-\beta)dx + C'}.$$

Wird h als Anfangspunkt der Ordinaten genommen, und fällt der Punkt a mit dem Punkte h zusammen, so werden α, β, C und C' einzeln gleich Null, und es ist

$$E = \frac{\int xy\,dx}{\int y\,dx}.$$

Die Grösse E, $= kh = hs$, d. h. die Entfernung des Schwerpunkts von der Ordinaten-Linie $a\alpha$, ist die Abscisse des Schwerpunkts und kann mit ξ bezeichnet werden.

Es ist demnach:

$$\xi = \frac{\int xy\,dx}{\int y\,dx}.$$

Zusatz 1. Wäre der Schwerpunkt der Dreiecke nicht schon bekannt, so könnte man ihn aus obiger Formel finden, und diess wäre kein Zirkel im Beweise. Denn obige Formel, die sich einzig auf das erste Glied der Reihe $\Delta(F.E)$ gründet, setzt nur voraus, dass man den Schwerpunkt des Rechtecks kennt. Für ein rechtwinkliges Dreieck ist die Gleichung der Hypothenuse $y = kx$

(für welche Gleichung die Constante bei der Integration verschwindet). Es ist daher:

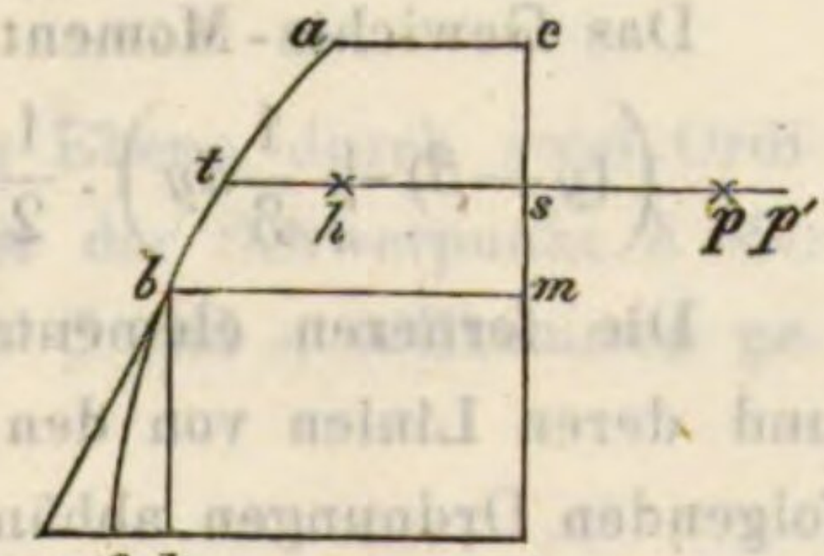
$$\xi = \frac{\int xy\,dx}{\int y\,dx} = \frac{\int kx^2\,dx}{\int kx\,dx} = \frac{\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{2}x^2} = \frac{2}{3}x,$$

wie ohnehin bekannt ist.

Zusatz 2. Bei obiger Reihe $\Delta(F.E)$ hat man einen Reichthum von Beweismitteln, wie man ihn nur wünschen kann. Einerseits kann man analytisch aus dem bekannten Differenzial $d(F.E)$ die übrigen Glieder der Reihe $\Delta(F.E)$ ableiten, und andrerseits kann man geometrisch, indem man die Gewichts-Momente der Figuren summirt, in die sich die Fläche ΔF zerlegt, dieselbe Reihe herstellen, indem man alle Glieder, welche erste, zweite und höhere Potenzen von dx enthalten, als erste, zweite und höhere Differenzialien ordnet. Die beiderseitigen Resultate sind in vollkommener Uebereinstimmung.

II. Um die Entfernung des Schwerpunkts von der Linie cv zu bestimmen, sei $cs = \xi$ die Entfernung des Schwerpunkts von der Linie ac. Der Schwerpunkt der Fläche liegt also in der Linie ts, und in dieser Linie in einem Punkte h. Man verlängere die Ordinate ts und nehme $hs = sp$. Wird im Punkte p das Gewicht der Fläche F, $abmc$, vereinigt gedacht, so besteht Gleichgewicht, und aus der Gleichung:

Fig. 43.



$$acmb \times hs = F \times sp$$

ist man im Stande, $hs = sp = e$ zu bestimmen. Denn vermehrt man x um $dx = mv$ (die Linie mv möge so gross genommen werden, als man will), so vermehrt sich die Fläche $abmc$ um die Fläche $bmfv$, und es vermehrt sich auch die Entfernung des Schwerpunkts.

Der neue Schwerpunkt falle in die Entfernung sp', so ist einerseits die ganze Zunahme gleich $\Delta(F.e)$, und andrerseits berechnet man die ganze Zunahme des Gewichts-Moments aus der Summe der Gewichts-Momente der einzelnen elementaren Figuren, in die sich ΔF zerlegt, und die man bereits kennt.

Nun ist:

$$\Delta F = dF + \frac{1}{2}d^2F + \frac{1}{2.3}d^3F + ..$$

und die Figuren dF, d^2F etc. kennt man aus den Differenzialien der ebenen Curven.

Es ist:

$$dF = \text{Rechteck } bmvk = (y - \beta)\,dx,$$

$$\frac{1}{2}d^2F = \text{Dreieck } gbk = \frac{1}{2}dy\,dx \text{ u. s. w.}$$

Der Schwerpunkt des Rechtecks $bmvk$ fällt in die Entfernung $\frac{1}{2}bm = \frac{1}{2}(y - \beta)$, und da der Flächen-Inhalt des Rechtecks gleich $(y - \beta)\,dx$ ist, so ist das Gewichts-Moment desselben gleich $\frac{1}{2}(y - \beta)^2\,dx$.

Der Flächen-Inhalt des Dreiecks gbk ist gleich $\frac{1}{2}dy\,dx$, und die Entfernung ihres Schwerpunkts von der Linie des Hypomochlions (von cv) ist gleich $\left((y - \beta) + \frac{1}{3}dy\right)$.

Das Gewichts-Moment des Dreiecks gbk ist also:

$$\left((y - \beta) + \frac{1}{3}dy\right) \cdot \frac{1}{2}dy\,dx = \frac{1}{2}(y - \beta)\,dy\,dx + \frac{1}{6}dx\,dy^2.$$

Die ferneren elementaren Figuren, in die sich ΔF zerlegt, und deren Linien von den tangirenden Parabeln der aufeinanderfolgenden Ordnungen abhängen, geben dritte und höhere Differenzialien, und ordnen sich auch in der Reihe $\Delta(F.e)$ unter die dritten und höhern Differenzialien ein.

Wir haben daher einerseits:

$$\Delta(F.e) = \frac{1}{2}(y - \beta)^2 dx + \frac{1}{2}(y - \beta)\,dy\,dx + \begin{cases} \frac{1}{6}dx\,dy^2 + \ldots \\ + \end{cases}$$

und andrerseits:

$$\Delta(F.e) = d(F.e) + \frac{1}{2}d^2(F.e) + \frac{1}{2.3}d^3(F.e) + ..,$$

es folgt also:

$$d(F.e) = \frac{1}{2}(y - \beta)^2 dx, \quad \frac{1}{2}d^2(F.e) = \frac{1}{2}(y - \beta)\,dy\,dx \text{ u. s. w.}$$

(Das Resultat $\frac{1}{2}d^2(F.e) = \frac{1}{2}(y - \beta)dy\,dx$ hätte man auch einfach analytisch aus der Differenzirung des ersten Differenzials:

$$d\Big(d(F.e)\Big) = d\Big(\frac{1}{2}(y-\beta)^2\,dx\Big) = (y-\beta)\,dy\,dx$$

finden können, so dass sich auch hier wieder ein Reichthum der Beweismittel herausstellt, wie man ihn nur wünschen kann.)

Aus Gleichung $d(F.e) = \frac{1}{2}(y-\beta)^2\,dx$ folgt durch Integration:

$$F.e = \frac{1}{2}\int (y-\beta)^2\,dx,$$

und

$$e = \frac{1}{2}\frac{\int (y-\beta)^2\,dx}{F} = \frac{1}{2}\frac{\int (y-\beta)^2\,dx}{\int (y-\beta)\,dx}.$$

Ist $\beta = 0$, d. h. wird die Abscisse als durch den Punkt a gehend genommen, und wird e mit η bezeichnet, welches die Ordinate des Schwerpunkts ausdrückt, so wird:

$$\eta = \frac{1}{2}\frac{\int y^2\,dx}{\int y\,dx}.$$

Zusatz 1. Da ein Punkt in der Ebene durch zwei Ordinaten vollkommen bestimmt ist, so ist der Schwerpunkt h der Fläche *abcm* durch die zwei Ordinaten ξ und η vollkommen gegeben.

Zusatz 2. Aus $\eta = \frac{1}{2}\frac{\int y^2\,dx}{\int y\,dx}$, folgt:

$$\eta\int y\,dx = \frac{1}{2}\int y^2\,dx.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit 2π, so wird:

$$2\pi\eta\int y\,dx = \int \pi y^2\,dx, \quad \text{oder} \quad 2\pi\eta\,.\,F = \int \pi y^2\,dx.$$

Nun ist $\int \pi y^2\,dx$ der Rotations-Körper, der entsteht, wenn sich eine ebene Figur $F = \int y\,dx$ um die Axe X bewegt, und $2\pi\eta$ ist eine Kreis-Linie, deren Radius η, d. h. die Entfernung des Schwerpunkts der rotirenden Figur von der Axe X ist. Das Product dieser Kreis-Linie und der rotirenden Figur giebt daher

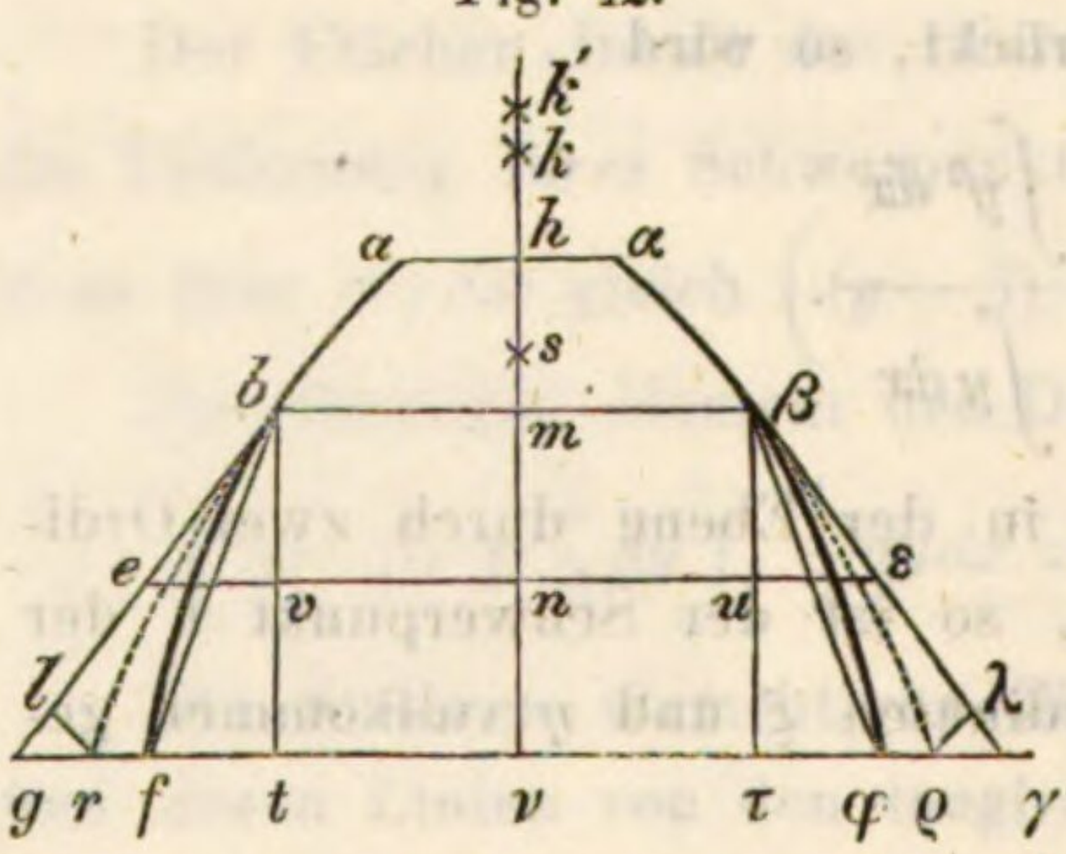
den Rotations-Körper. Diess ist der Inhalt eines Lehrsatzes, welcher der Guldini'sche genannt wird. Es sind in der gefundenen Gleichung drei Grössen enthalten: die rotirende Figur, die Entfernung ihres Schwerpunkts von der Rotations-Axe, und der Rotations-Körper selbst. Sind je zwei dieser Grössen bekannt, so ist die dritte ohne weitere Rechnung gegeben. Daraus lassen sich verschiedene und bekannte Lehrsätze ableiten.

§. 207.

Der Schwerpunkt des Bogens einer Curve.

Diese Aufgabe wird auf dieselbe Art, wie die vorhergehende gelöst. Aus diesem Grunde können wir uns kürzer fassen.

Fig. 42.



I. Ist ab ein Bogen σ, dessen Schwerpunkt bestimmt werden soll, so sei a der Punkt σ_a, b der Punkt σ_b. Um zuerst η zu eliminiren oder zu neutralisiren, nehmen wir einen congruenten und auf der entgegengesetzten Seite der Axe X in gleicher Entfernung liegenden Bogen $\alpha\beta$, dann fällt der Schwerpunkt der beiden Bogen ab und $\alpha\beta$ in die Axe X, etwa nach s. Um hs zu bestimmen, nehmen wir $hk = hs$ und denken uns in k das Gewicht von ab und $\alpha\beta$ vereinigt. Wir haben demnach $(2\sigma\xi)$ als das Gewicht der in k vereinigten Bogen, wenn ξ die Entfernung $kh = hs$ ausdrückt.

Wird die Abscisse x um dx vermehrt, so wird die Zunahme von $2\sigma\xi$ gleich $2\Delta(\sigma\xi)$. Andrerseits zerlegt sich der Bogen $\Delta\sigma = bf = \beta\varphi$ in eine Reihe von geraden Linien, deren erste gleich $bg = \beta\gamma$ ist, deren zweite durch die tangirende Parabel zweiter Ordnung $(br, \beta\varrho)$ etc. construirt wird, wie §. 146. nachgewiesen wurde, u. s. w. Es wird:

$$\Delta\sigma = d\sigma + \frac{1}{2}d^2\sigma + \frac{1}{2.3}d^3\sigma + \ldots$$

Der Schwerpunkt der beiden geraden Linien bg und $\beta\gamma = d\sigma$ liegt in n, und die Entfernung desselben von h ist gleich $x + \frac{1}{2}dx$, die Ent-

fernungen der Schwerpunkte des zweiten, dritten und der höhern Differenzialien des Bogens sind: $x+\frac{1}{n}dx$, $x+\frac{1}{r}dx$ etc.

Das Gewichts-Moment der Linien bg und $\beta\gamma$ ist also gleich

$$(bg+\beta\gamma)\left(x+\frac{1}{2}dx\right)=2d\sigma\,.\left(x+\frac{1}{2}dx\right)=2xd\sigma+dx\,d\sigma.$$

Wie man leicht einsieht, gehört $dxd\sigma$ zum zweiten Differenzial, und ebenso geben die Gewichts-Momente aller übrigen Linien solche Ausdrücke, die zum zweiten, dritten und zu den folgenden Differenzialien gehören.

Wir haben daher einerseits:

$$2\Delta(\sigma\,.\,\xi)=2\Big(d(\sigma\,.\,\xi)\Big)+2\Big(\frac{1}{2}d^2(\sigma\,.\,\xi)\Big)+2\Big(\frac{1}{2.3}d^3(\sigma\,.\,\xi)\Big)+\ldots$$

und andrerseits:

$$2x\,d\sigma+\left\{\begin{matrix}dx\,d\sigma+\ldots\\+\ldots\end{matrix}\right.$$

Daraus folgt: $d(\sigma\,.\,\xi)=xd\sigma$, und durch Integration:

$$\sigma\,.\,\xi=\int_b^a x d\sigma,\quad \xi=\frac{\int_b^a x\,d\sigma}{\sigma}.$$

Substituirt man die Werthe

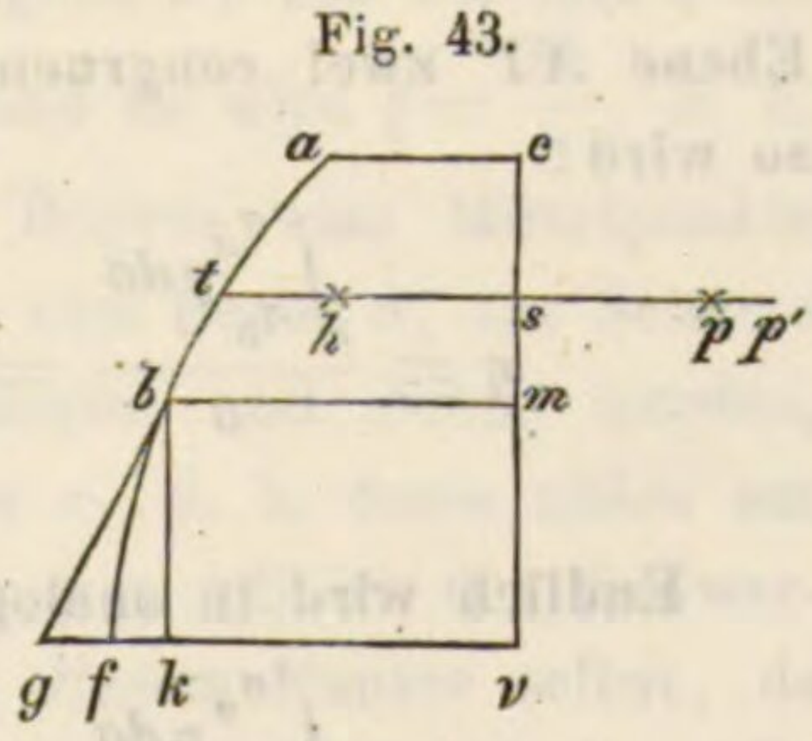
$$d\sigma=\sqrt{dx^2+dy^2}\quad\text{und}\quad\sigma=\int_b^a\sqrt{dx^2+dy^2}$$

so wird:

$$\xi=\frac{\int_b^a x\sqrt{dx^2+dy^2}}{\int_b^a\sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

II. Um nun die zweite Ordinate, η, des Schwerpunkts zu bestimmen, denkt man sich das Gewicht des Bogens ab in p vereinigt, und man hat nach dem Schema der Beweise einerseits $\Delta(\sigma\,.\,\eta)$ und andrerseits $d\sigma\left(y+\frac{1}{2}dy\right)$, $d^2\sigma\left(y+\frac{1}{v}dy\right)$ u. s. w., also, da

Fig. 43.



$$\Delta(\sigma\,.\,\eta)=d(\sigma\,.\,\eta)+\frac{1}{2}d^2(\sigma\,.\,\eta)+\frac{1}{2.3}d^3(\sigma\,.\,\eta)+\ldots$$ ist:

$$d(\sigma\,.\,\eta)=yd\sigma,$$

so gross auch dx sein möge, da $yd\sigma$ das einzige Glied der Reihe ist, das dx in der ersten Potenz enthält. — Die zweiten und nachfolgenden Glieder findet man entweder analytisch durch Differenzirung, oder geometrisch, indem man alle Grössen, die dx^2 enthalten, als zweites Glied, die dx^3 enthalten, als drittes Glied u. s. w. ordnet.

Aus $d(\sigma.\eta) = y\,d\sigma$ folgt durch Integration:

$$\eta.\sigma = \int_b^a y\,d\sigma, \quad \eta = \frac{\int_b^a y\,d\sigma}{\sigma}, \quad \text{oder} \quad \eta = \frac{\int_b^a y\sqrt{dx^2+dy^2}}{\int_b^a \sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

Zusatz. Es ist nicht schwer, ganz analoge Formeln für Curven doppelter Krümmung herzustellen.

Wie bekannt, ist für Curven doppelter Krümmung das erste Differenzial des Bogens σ die gerade Linie $\sqrt{dx^2+dy_x^2+dz_x^2}$, die ein Theil der Tangente der Curve ist.

Neutralisirt man zuerst die Coordinaten η und ζ des Schwerpunktes, indem man statt des einen Bogens ab vier congruente Bogen, in gleicher Lage rechts und links von der Ebene XZ, und über und unter der Ebene XY construirt, so fällt der Schwerpunkt der Curve in die Axe X und die Ordinate ξ des Schwerpunktes wird in ganz analoger Beweisführung:

$$\xi = \frac{\int_{\sigma_b}^{\sigma_a} x\,d\sigma}{\sigma} = \frac{\int_{\sigma_b}^{\sigma_a} x\sqrt{dx^2+dy_x^2+dz_x^2}}{\int_{\sigma_b}^{\sigma_a} \sqrt{dx^2+dy_x^2+dz_x^2}}.$$

Neutralisirt man ferner ζ, indem man über und unter der Ebene XY zwei congruente Bogen von gleicher Lage construirt, so wird:

$$\eta = \frac{\int_{\sigma_b}^{\sigma_a} y\,d\sigma}{\sigma} = \frac{\int_{\sigma_b}^{\sigma_a} y\sqrt{dx^2+dy_x^2+dz_x^2}}{\int_{\sigma_b}^{\sigma_a} \sqrt{dx^2+dy_x^2+dz_x^2}}.$$

Endlich wird in analoger Beweisführung:

$$\zeta = \frac{\int_{\sigma_b}^{\sigma_a} z\,d\sigma}{\sigma} = \frac{\int_{\sigma_b}^{\sigma_a} z\sqrt{dx^2+dy_x^2+dz_x^2}}{\int_{\sigma_b}^{\sigma_a} \sqrt{dx^2+dy_x^2+dz_x^2}},$$

wodurch die drei Ordinaten des Schwerpunktes vollkommen bestimmt sind.

Beispiel zur Erläuterung. Es sei der Schwerpunkt eines Kreisbogens zu bestimmen. Da der Kreis eine ebene Curve ist, so kann $z = 0$ und $dz_x = 0$ genommen werden; die Ebene XY ist dann die Ebene des Kreises selbst. Da ferner der Kreisbogen durchaus symmetrisch ist, so fällt der Schwerpunkt in den Radius, der den Bogen halbirt. Nimmt man diesen Radius als Abscissen-Linie X, so genügt es, den Werth ξ zu bestimmen. Nimmt man den Anfangspunkt der Coordinaten im Mittelpunkte des Kreises, so gibt ξ die Entfernung des Schwerpunktes vom Mittelpunkte des Kreises.

Nun ist:

$$\xi = \frac{\int x\, d\sigma}{\sigma}.$$

Die Integration wird einfacher, wenn man, statt den Bogen durch die Abscisse zu geben, die Abscisse x durch den Bogen σ ausdrückt.

Es ist $x = r \cos \frac{\sigma}{2r}$, wenn r den Radius des Kreises bezeichnet. Durch die Substitution von x wird:

$$\xi = \frac{\int r \cos \frac{\sigma}{2r} d\sigma}{\sigma} = \frac{2r^2 \sin \frac{\sigma}{2r}}{\sigma},$$

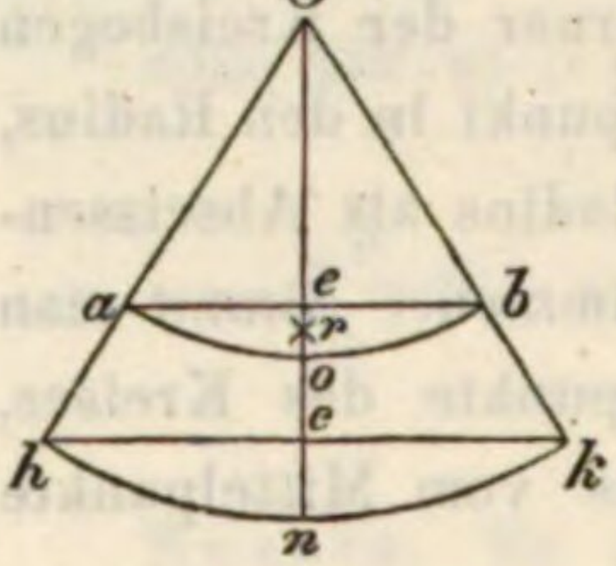
(wie aus dem Differenzial des Cosinus bekannt ist).

Substituiren wir die Sehne des Bogens σ, die wir mit c bezeichnen wollen, so ist $c = 2r \sin \frac{\sigma}{2r}$, und es wird $\xi = \frac{rc}{\sigma}$, d. h. die Entfernung des Schwerpunkts des Bogens vom Mittelpunkte des Kreises ist die vierte Proportionale zum Bogen σ, zur Sehne c und zum Radius r. — Je kleiner Bogen und Sehne werden, desto mehr nähert sich ξ dem Werthe r, d. h. desto näher am Bogen liegt der Schwerpunkt und für $c = \sigma = 0$ ist der Schwerpunkt des Punktes der Peripherie in diesem Punkte selbst, da $\xi = r$ wird. Für den Halbkreis, für welchen $\sigma = r\pi$, und $c = 2r$ wird, ist $\xi = \frac{2r}{\pi} = 0{,}63 \ldots r$.

§. 208.

Schwerpunkt des Kreis-Sectors.

Fig. 44.



Denkt man sich den Sector *hOk* in unendlich viele Sectoren zerlegt, so fällt der Schwerpunkt eines jeden solchen Theil-Sectors in Punkte der Kreis-Linie *aob*, wenn

$$aO = \frac{2}{3}hO = \frac{2}{3}r$$

ist. Denn der Schwerpunkt der Tangenten- und Sehnen-Dreiecke, zwischen welchen der Schwerpunkt solcher Sectoren liegt, hat als erstes gemeinschaftliches Glied die Grösse $\frac{2}{3}r$. Denken wir uns in allen Punkten des Bogens *aob* das Gewicht der Sectoren vereinigt, so haben wir einen in Bezug auf Lage und Gewicht vollkommen symmetrischen Kreis-Bogen *aob*, dessen Schwerpunkt bestimmt werden soll. Dieser Schwerpunkt liegt in dem Radius *On*, der die Bogen *hk* und *ab* halbirt. Die Aufgabe kommt also auf die frühere zurück. Es ist:

$$\xi = Or = \frac{\varrho \,.\, ab}{aob} = \left(\frac{2\,Oh \,.\, hk}{3\,(hnk)}\right),$$

oder in einem für die Rechnung bequemeren Ausdruck:

$$\xi = \frac{4\,r^2 \sin\frac{\sigma}{2r}}{3\sigma},$$

worin σ den Bogen (hnk) und r den Radius Oh ausdrückt.

Zusatz. Da sich die Differenzialien der Winkel bei Polar-Coordinaten in Kreis-Sectoren zerlegen, so ist nothwendig, dass man zuerst den Schwerpunkt der Kreis-Sectoren kennt, ehe man allgemein den Schwerpunkt der Sectoren für Polar-Coordinaten bestimmt.

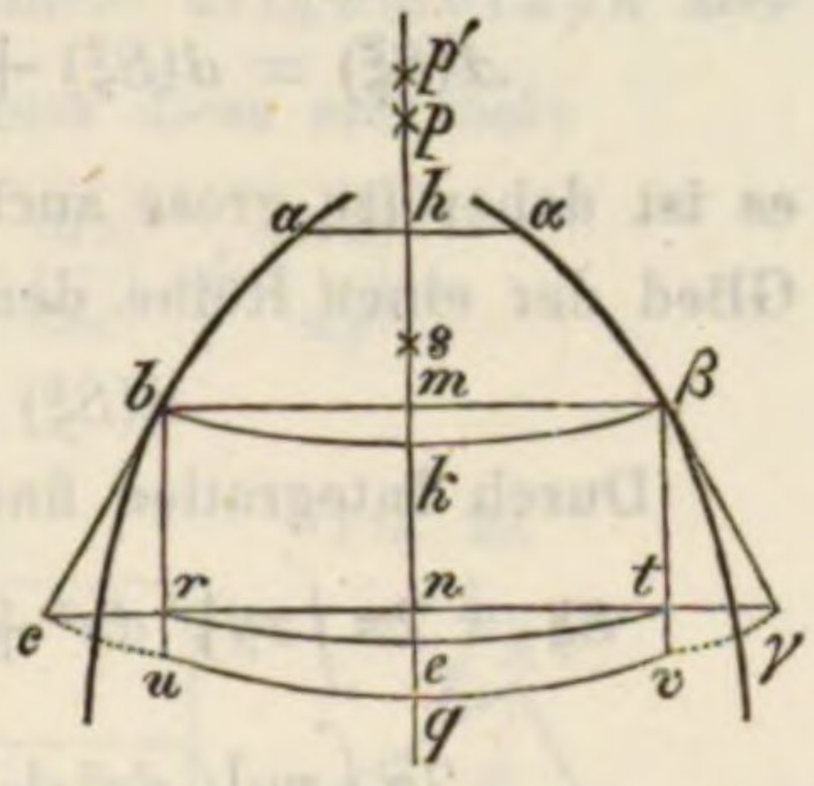
§. 209.

Schwerpunkt der Rotations-Flächen.

Nimmt man die Rotations-Fläche $abk\beta\alpha$, welche entsteht, wenn sich der Bogen *ab* um die Axe *hm* bewegt, so ist einleuchtend,

dass der Mittelpunkt der Rotations-Fläche in der Axe hm liegt. Es ist nun die Aufgabe $hs = \xi$ zu bestimmen.

Fig. 45.



Nimmt man $hp = hs$, und denkt man sich das Gewicht der Rotations-Fläche (S) in p vereinigt, so hat man einerseits das Moment $S\xi$.

Nimmt man h als Anfangspunkt der Ordinaten, wodurch der Punkt a der Curve der Punkt σ^0 wird, und vermehrt man $x = him$ um eine beliebige Grösse $mn = dx$, so zerlegt sich die ganze Zunahme der Oberfläche in eine Reihe von senkrechten Cylinder-Manteln, deren erster gleich

$$buqv\beta k = 2\pi y\sqrt{dx^2 + dy^2} = 2\pi y\,dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$$

ist. Der zweite Cylinder-Mantel hat den Factor dx^2, der dritte den Factor dx^3 u. s. w., wie bei den Differenzialien der Rotations-Flächen bewiesen worden ist.

Die ganze Zunahme des Moments $S\xi$ ist einerseits $\Delta(S\xi)$ und andrerseits gleich der Summe der Gewichts-Momente der einzelnen Cylinder-Mantel. Der Schwerpunkt des ersten Cylinder-Mantels liegt in der Mitte von $mn = dx$; seine Entfernung von h ist also gleich $x + \frac{1}{2}dx$, und sein Moment ist:

$$2\pi y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}\left(x + \frac{1}{2}dx\right).$$

Der Schwerpunkt des zweiten Cylinder-Mantels liegt in der Linie bu und seine Entfernung von h ist gleich $x + \frac{1}{n}dx$. Bezeichnen wir den zweiten Cylinder-Mantel mit Mdx^2, so ist sein Moment gleich:

$$\left(x + \frac{1}{n}dx\right)Mdx^2.$$

Die dritte und die nachfolgenden Flächen d^3S, d^4S.. enthalten dritte und nachfolgende Potenzen von dx. Die Summe der Gewichts-Momente ist daher:

$$2\pi xy\sqrt{dx^2 + dy^2} + \begin{cases}\pi y\,dx\sqrt{dx^2 + dy^2} + \\ + Mx\,dx^2\end{cases} + \begin{cases}\frac{1}{n}Mdx^3 + \ldots \\ + ..\end{cases}$$

Andrerseits haben wir:

$$\Delta(S\xi) = d(S\xi) + \frac{1}{2}d^2(S\xi) + \frac{1}{2.3}d^3(S\xi) + \ldots,$$

es ist daher (so gross auch dx genommen werden möge) das erste Glied der einen Reihe dem ersten Glied der andern gleich, also:

$$d(S\xi) = 2\pi xy\sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Durch Integration findet man:

$$S\xi = 2\pi\int xy\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$\text{und}\quad \xi = \frac{2\pi\int xy\sqrt{dx^2+dy^2}}{2\pi\int y\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{\int xy\sqrt{dx^2+dy^2}}{\int y\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{\int x\,dS}{\int dS},$$

wenn man die Grenzen S_a und S_b im Integral-Zeichen enthalten denkt.

Zusatz. Wenn man die Grössen M und $\frac{1}{n}$ etc. noch nicht kennen würde, so würde man sie analytisch bestimmen können, indem man $d(S\xi) = 2\pi xy\sqrt{dx^2 + dy^2}$ differenzirte, woraus sich ihre geometrische Interpretation von selbst ergäbe.

Beispiel. Es sei der Schwerpunkt einer Zone der Kugel-Oberfläche zu bestimmen.

Der rotirende Kreis hat die Gleichung $y^2 + x^2 = r^2$, worin der Mittelpunkt als Anfangspunkt der Coordinaten genommen ist.

Es wird:

$$dy^2 = \frac{x^2\,dx^2}{y^2}, \quad \text{also} \quad y\sqrt{dx^2+dy^2} = r\,dx;$$

demnach:

$$\xi = \frac{\int rx\,dx}{\int r\,dx} = \frac{\frac{1}{2}rx^2}{rx} = \frac{1}{2}x.$$

Der Schwerpunkt der Kugel-Zone liegt also in der Mitte ihrer Abscisse x.

§. 210.

Schwerpunkt der Flächen überhaupt.

Bei der Untersuchung über die Fächen, die wir mit S bezeichnen, hat sich ergeben, dass man weder $\left|\frac{dS}{dx}\right|dx$, noch $\left|\frac{dS}{dy}\right|dy$,

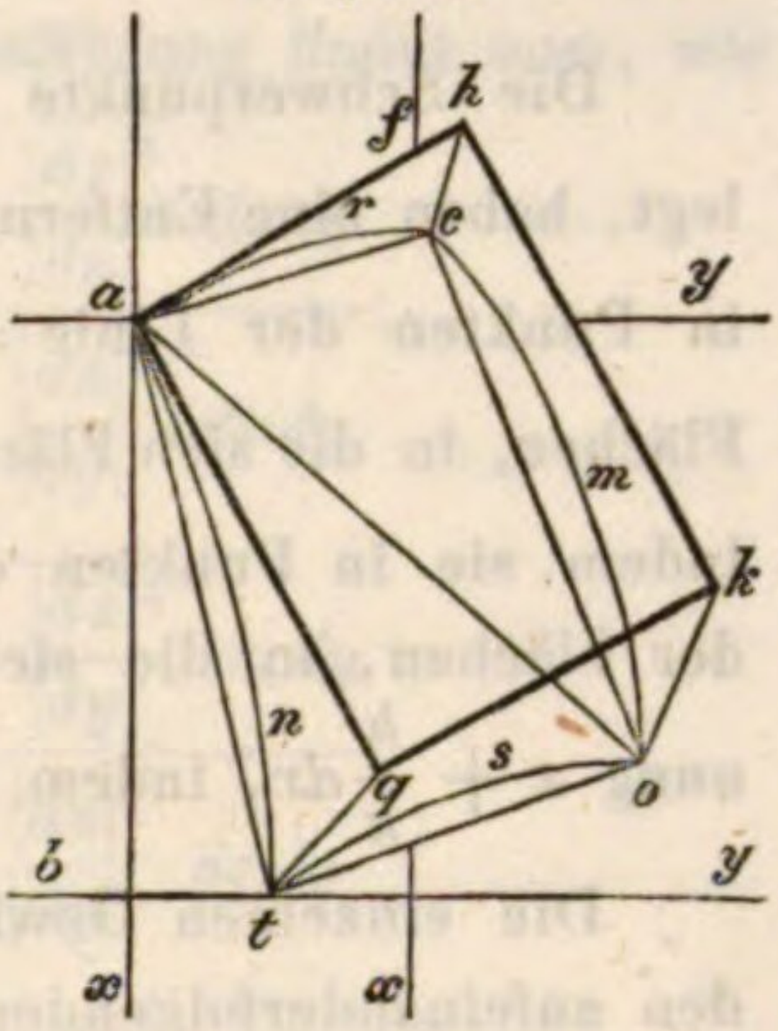
noch auch $\left|\frac{d^2S}{dx^2}\right|dx^2$, $\left|\frac{d^2S}{dy^2}\right|dy^2$ etc. in einem allgemeinen analytischen Ausdruck geben könne, und dass diess erst bei:

$$\left|\frac{d^2S}{dxdy}\right|dxdy = dxdy\sqrt{1+\left|\frac{dz}{dx}\right|^2+\left|\frac{dz}{dy}\right|^2}$$

möglich ist.

Das Differenzial $\left|\frac{d^2S}{dxdy}\right|dxdy$ ist gleich dem Parallelogramm *ahkq*. Nehmen wir wieder S^0 als Anfangspunkt der Coordinaten, so ist nach dem Schema der vorhergehenden Beweise $S\xi$ einerseits das Gewichts-Moment der Fläche, in Bezug auf die Ordinate des Schwerpunkts ξ.

Fig. 29.



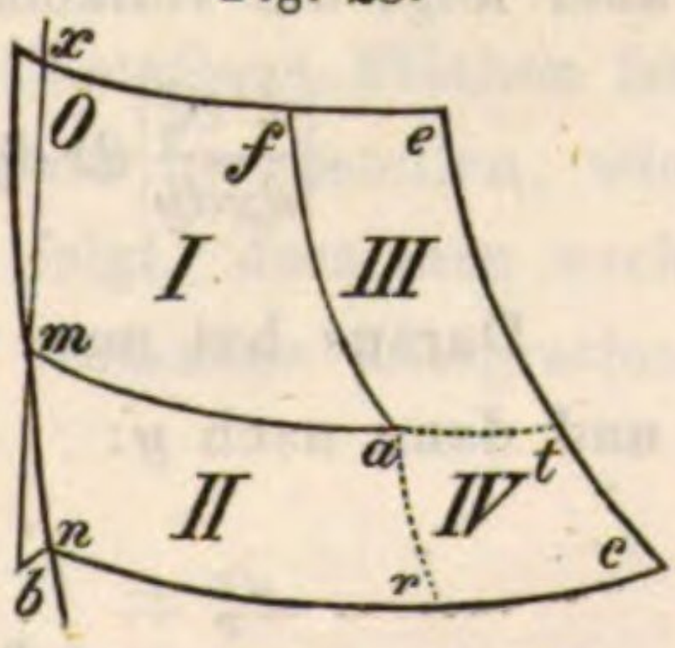
Nimmt man z als die abhängig veränderliche Ordinate, und vermehrt man x um dx und y um dy, so zerlegt sich die ganze Zunahme des Gewichts-Moments $\Delta(S\xi)$ in folgende Reihe (in welcher man dz durch $\left|\frac{dz}{dx}\right|dx+\left|\frac{dz}{dy}\right|dy$, also in Factoren von dx und dy ausgedrückt nimmt):

$$(1)\quad \Delta(S\xi) = \left|\frac{d(S\xi)}{dx}\right|dx+\left|\frac{dS\xi}{dy}\right|dy+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\left|\frac{d^2S\xi}{dx^2}\right|dx^2+2\left|\frac{d^2S\xi}{dxdy}\right|dxdy+\left|\frac{d^2S\xi}{dy^2}\right|dy^2\right)+$$
$$+\ldots$$

Andrerseits hat man die Summe der Gewichts-Momente der einzelnen Flächen, in die sich ΔS zerlegt. Diese Flächen sind zum Theile unbekannt, und aus diesem Grunde bezeichnen wir sie der Kürze halber mit U.

Es sind die Flächen, die dx, dy, dx^2, dy^2 etc. zu Factoren haben, während die Flächen, welche combinirte Factoren, $dxdy$, dx^2dy, $dydx^2$ etc. haben, bekannt sind.

Fig. 28.



Die ganze Zunahme ΔS, welche der Summe der Flächen *II*, *III*, *IV* gleich ist, giebt folgende Reihe:

$$\Delta S = (U'dx + U''dy) +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(U'''dx^2 + 2dxdy\sqrt{1 + \left|\frac{dz}{dx}\right|^2 + \left|\frac{dz}{dy}\right|^2} + U''''dy^2 \right) + \ldots$$

Neutralisirt man durch die Construction von vier congruenten und symmetrisch liegenden Flächen die Ordinaten η und ζ, so sind die Entfernungen des Schwerpunktes der obigen Flächen in Beziehung auf x folgende:

Die Schwerpunkte der Flächen, in die sich Fläche *II* zerlegt, haben eine Entfernung $x + \frac{m}{n}dx$, indem ihre Schwerpunkte in Punkten der Linie $dx = mb$ liegen. Die Schwerpunkte der Flächen, in die sich Fläche *III* zerlegt, haben eine Entfernung $\frac{r}{s}x$, indem sie in Punkten der Linie xm liegen. Die Schwerpunkte der Flächen, in die sich Fläche *IV* zerlegt, haben eine Entfernung $x + \frac{h}{k}dx$, indem sie in Punkte der Linie mb fallen.

Die einzelnen Gewichts-Momente sind also, wenn sie nach den aufeinanderfolgenden Differenzialien geordnet werden:

	I. Diff.	II. Differenzial.	III. Diff.
(2)	$\left\{\begin{matrix} U'x\,dx \\ \frac{r}{s}U''x\,dy \end{matrix}\right\} +$	$\left\{\begin{matrix} \frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}U' + U'''x\right)dx^2 \\ x\sqrt{1 + \left\|\frac{dz}{dx}\right\|^2 + \left\|\frac{dz}{dy}\right\|^2}\,dx\,dy \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{r}{s}xU''''dy^2 \end{matrix}\right\} +$	$\begin{matrix} . \\ . \\ . \\ . \end{matrix}$

Vergleichen wir damit die Reihe (1), so folgen für $\left|\frac{dS\xi}{dx}\right|dx$, $\left|\frac{dS\xi}{dy}\right|dy$, $\left|\frac{d^2S\xi}{dx^2}\right|dx^2$, $\left|\frac{d^2S\xi}{dy^2}\right|dy^2$ etc. keine brauchbaren Gleichungen, da die entsprechenden Werthe beiderseits unbekannt sind; wohl aber folgt die vollkommen adäquate Gleichung:

$$\left|\frac{d^2S\xi}{dx\,dy}\right|dx\,dy = x\sqrt{1 + \left|\frac{dz}{dx}\right|^2 + \left|\frac{dz}{dy}\right|^2}\,dx\,dy.$$

Daraus hat man durch zweifache Integration, einmal nach x und dann nach y:

$$S\xi = \int_x\int_y x\sqrt{1 + \left|\frac{dz}{dx}\right|^2 + \left|\frac{dz}{dy}\right|^2}\,dx\,dy,$$

also: $$\xi = \frac{\int_x \int_y x \sqrt{1 + \left|\frac{dz}{dx}\right|^2 + \left|\frac{dz}{dy}\right|^2}\, dx\, dy}{\int_x \int_y \sqrt{1 + \left|\frac{dz}{dx}\right|^2 + \left|\frac{dz}{dy}\right|^2}\, .\, dx\, dy},$$

da $S = \int_x \int_y \sqrt{1 + \left|\frac{dz}{dx}\right|^2 + \left|\frac{dz}{dy}\right|^2}\, .\, dx\, dy$ ist.

Zusatz 1. In ganz analoger Beweisführung findet man, wie

$$\xi = \frac{\int_x \int_y x \sqrt{1 + \left|\frac{dz}{dx}\right|^2 + \left|\frac{dz}{dy}\right|^2}\, .\, dx\, dy}{\int_x \int_y \sqrt{1 + \left|\frac{dz}{dx}\right|^2 + \left|\frac{dz}{dy}\right|^2}\, .\, dx\, dy},$$

auch: $$\eta = \frac{\int_x \int_y y \sqrt{1 + \left|\frac{dz}{dx}\right|^2 + \left|\frac{dz}{dy}\right|^2}\, .\, dx\, dy}{\int_x \int_y \sqrt{1 + \left|\frac{dz}{dx}\right|^2 + \left|\frac{dz}{dy}\right|^2}\, .\, dx\, dy},$$

und: $$\zeta = \frac{\int_x \int_y z \sqrt{1 + \left|\frac{dz}{dx}\right|^2 + \left|\frac{dz}{dy}\right|^2}\, .\, dx\, dy}{\int_x \int_y \sqrt{1 + \left|\frac{dz}{dx}\right|^2 + \left|\frac{dz}{dy}\right|^2}\, .\, dx\, dy}.$$

Zusatz 2. Ist die Fläche eine Ebene, und nimmt man sie mit der Ebene XY zusammenfallend, so wird:

$$\xi = \frac{\int_x \int_y x\, dx\, dy}{\int_x \int_y dx\, dy}, \quad \eta = \frac{\int_x \int_y y\, dx\, dy}{\int_x \int_y dx\, dy},$$

Ausdrücke, die mit den Oben gefundenen zusammenfallen, wenn man eine Integration nach y ausführt.

Zusatz 3. Für cylindrische und für Rotations-Flächen ist man im Stande, das totale erste Differenzial dS herzustellen, wie §§. 181 und 182 bewiesen wurde. Daraus folgt, dass man auch die Ordinaten ihres Schwerpunkts durch einmalige Integration findet.

I. Für cylindrische Flächen ist:

$$dS = y \sqrt{dx^2 + dz_x^2}.$$

Man findet daher:

$$\xi = \frac{\int xy\sqrt{dx^2 + dz_x^2}}{\int y\sqrt{dx^2 + dz_x^2}}, \quad \eta = \frac{\int \frac{1}{2}y^2\sqrt{dx^2 + dz_x^2}}{\int y\sqrt{dx^2 + dz_x^2}},$$

$$\zeta = \frac{\int zy\sqrt{dx^2 + dz_x^2}}{\int y\sqrt{dx^2 + dz_x^2}}.$$

II. Für Rotations-Flächen ist

$$dS = z\,arc.\,sin\,\frac{y}{z}\sqrt{dx^2 + dz_x^2},$$

und es ist:

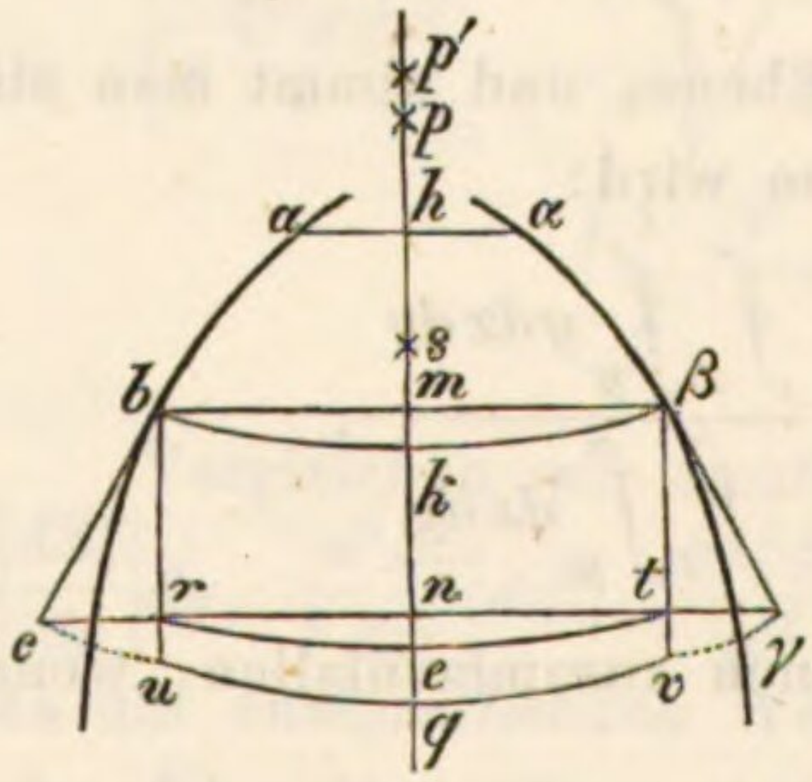
$$\xi = \frac{\int x\,dS}{\int dS}, \quad \eta = \frac{\int y\,dS}{\int dS}, \quad \zeta = \frac{\int z\,dS}{\int dS},$$

worin man für dS den angegebenen Werth substituirt.

§. 211.

Schwerpunkt der Rotations-Körper.

Fig. 45.



Es sei Alles, wie in den vorhergehenden §§.; h der Anfangspunkt der Coordinaten, s der Schwerpunkt, $hs = hp = \xi$, und in p werde das Gewicht des Rotations-Körpers $abk\beta\alpha h$ vereinigt gedacht.

Bei Rotations-Körpern (k) sind η und ζ gleich Null, da der Schwerpunkt absolut in die Axe X fällt. — Wird die Abscisse x um eine beliebige Grösse $dx = mn$ vermehrt, so haben wir einerseits in p die Zunahme des Gewichts-Moments gleich $\Delta(k\xi)$, und andrerseits haben wir die Summe der Gewichts-Momente der einzelnen Körper, in die sich

$$\Delta k = dk + \frac{1}{2}d^2k + \frac{1}{2.3}d^3k + \ldots$$

zerlegt. Diese einzelnen Körper sind senkrechte Cylinder und ihrer Grösse nach vollkommen bekannt. — Das erste Differenzial

dk ist der Cylinder $bretβk$, dessen Schwerpunkt in der Mitte der Linie mn liegt. Sein Gewichts-Moment ist daher, da die Entfernung seines Schwerpunktes von h gleich $x + \frac{1}{2}dx$ ist, folgendes: $dk\left(x + \frac{1}{2}dx\right)$. Das Gewichts-Moment des Körpers $\frac{1}{2}d^2k$ ist offenbar: $\frac{1}{2}d^2k\left(x + \frac{m}{n}dx\right)$, da der Schwerpunkt des zweiten Körpers $\frac{1}{2}d^2k$ in einen Punkt der Linie dx fällt. U. s. w. Die Summe der Gewichts-Momente der einzelnen Körper ist demnach:

$$\begin{array}{llll} \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} \\ x\,dk + \begin{cases} \frac{1}{2}dk\,dx & & & \\ \frac{1}{2}x\,d^2k + \frac{m}{2n}d^2k\,dx + & \vdots & \vdots & \vdots \\ + \,.. & \vdots & \vdots & \end{cases} \end{array}$$

Da nun

$$\Delta(k\xi) = d(k\xi) + \frac{1}{2}d^2(k\xi) + \frac{1}{2.3}d^3(k\xi) + ..$$

ist, so folgt die endliche und vollkommen adäquate Gleichung:

$$d(k\xi) = x\,dk,$$

und durch Integration:

$$k\xi = \int x\,dk, \quad \xi = \frac{\int x\,dk}{\int dk} = \frac{\int xy^2\pi\,dx}{\int y^2\pi\,dx}.$$

§. 212.

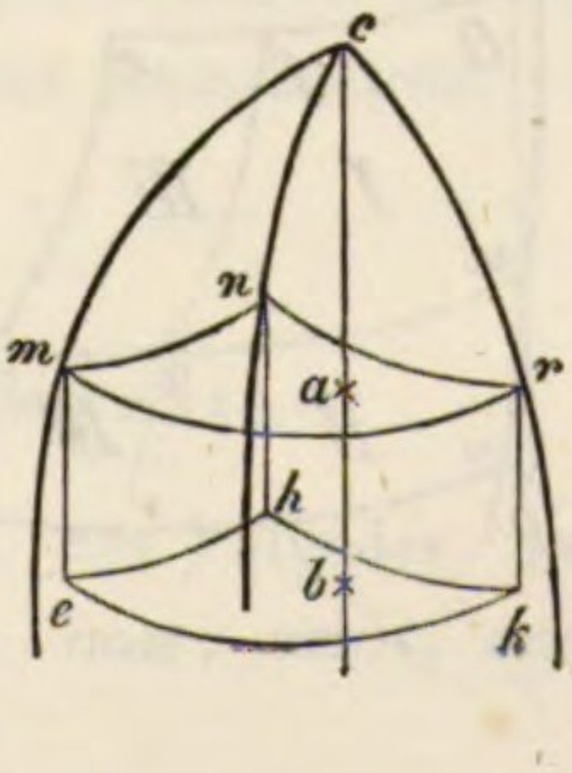
Schwerpunkt der übrigen Körper.

In Hinsicht der übrigen Körper ergeben sich ganz analoge Formeln:

1) Die partielle Zunahme des Körpers $cmnr$, wenn x um $dx = ab$ vermehrt wird, zerlegt sich in eine Reihe senkrechter Cylinder, deren Schwerpunkte in Bezug auf ihre Höhe dx etc. bekannt ist.

Man hat daher nach analoger Beweisführung, wenn c als Anfangspunkt der Coordinaten genommen wird, einerseits

Fig. 33.



$$\Delta(k_x\xi) = d(k_x\xi) + \frac{1}{2}d^2(k_x\xi) + \ldots$$

und andrerseits:

$$dk_x\left(x + \frac{1}{2}dx\right) + \ldots$$

Die übrigen Glieder geben zweite und höhere Differenzialien, und das erste Differenzial besteht aus dem einzigen Gliede xdk_x, da $\frac{1}{2}dk_x dx$ bereits ein Glied des zweiten Differenzials ist.

Es ist demnach $d(k_x\xi) = xdk_x$, und durch Integration:

$$\xi = \frac{\int_x xdk_x}{k_x} = \frac{\int xdk_x}{\int dk_x}.$$

Bezeichnet V den Querschnitt mnr, so ist $dk_x = Vdx$, und es wird:

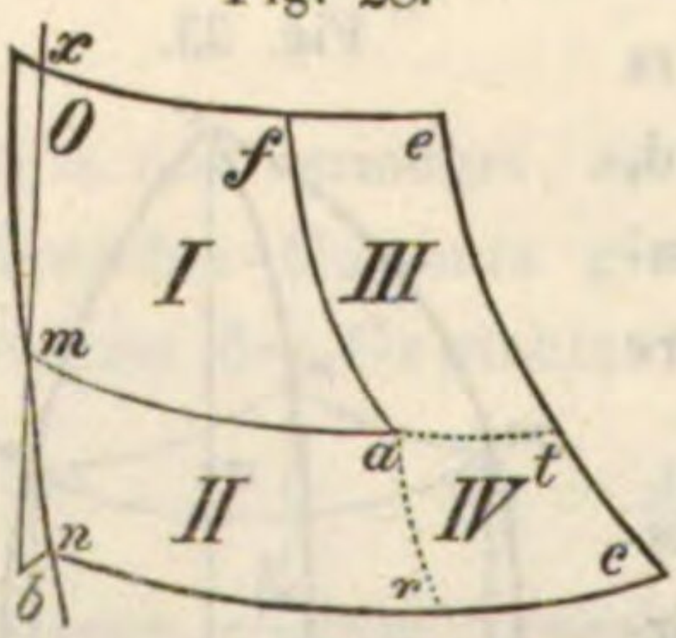
$$\xi = \frac{\int x\,Vdx}{\int Vdx}.$$

2) Bei diesen Körpern sind auch die Coordinaten η und ζ zu bestimmen, da der Schwerpunkt nicht absolut in der Axe X liegt. Mit dem Querschnitt durch X, welcher die Figur mnr giebt, ist hier nichts anzufangen. Denn der Schwerpunkt des Cylinders $mnrkhe$ liegt in Beziehung auf η in einem Theil der Linie y selbst, es ist daher das Moment des Cylinders gleich $Vdx \times \frac{m}{n}y$, und diess giebt in Verbindung mit $d(k\eta)$ die Gleichung:

$$\frac{m}{n}yVdx = d(k\eta),$$

eine Gleichung, die nicht brauchbar ist, da $\frac{m}{n}$ unbekannt ist.

Fig. 28.



3) Um daher η bestimmen zu können, muss man einen Querschnitt durch die Axe Y führen, und die Ordinate y um dy vermehren, wodurch eine Zunahme des Körpers erzeugt wird, Δk_y, die mit der Zunahme Δk_x in Analogie steht. Wird die Zunahme des Körpers Δk_x durch II begrenzt, so wird die Zunahme des Körpers Δk_y durch III begrenzt.

Bezeichnet V' den Querschnitt durch Y, so ist in ganz analoger Beweisführung:

$$\eta = \frac{\int y\, V' dy}{\int V' dy}.$$

4) Für die Bestimmung der Ordinate ζ ist aber auch dadurch noch nichts gewonnen. Denn die Schwerpunkte der Körper, die durch *II*, *III* und *IV* begrenzt werden, liegen in Beziehung auf ζ in der Linie z selbst; es tritt $\frac{m}{n} z$ in die Gleichung des Schwerpunktes ein, und diese ist unbrauchbar, weil sie die unbekannte Grösse $\frac{m}{n}$ enthält. Man kann sich dadurch helfen, dass man z als eine unabhängig Veränderliche und eine andere Ordinate, etwa x oder y, als abhängig Veränderliche nimmt, dass man demgemäss einen Querschnitt V'' durch Z führt, wodurch man ohne Weiteres

$$\zeta = \frac{\int z V'' dz}{\int V'' dz} \text{ findet.}$$

5) Diess setzt aber immer eine Aenderung in der Abhängigkeit und Unabhängigkeit der Coordinaten voraus. In der Ausführung wirklicher Rechnungen, bei denen es sich um die Bestimmung der Grössen ξ, η, ζ handelt, schadet das nichts, aber es fehlt das analytische Symbol, das die drei Grössen ξ, η, ζ in einem einzigen Zuge giebt.

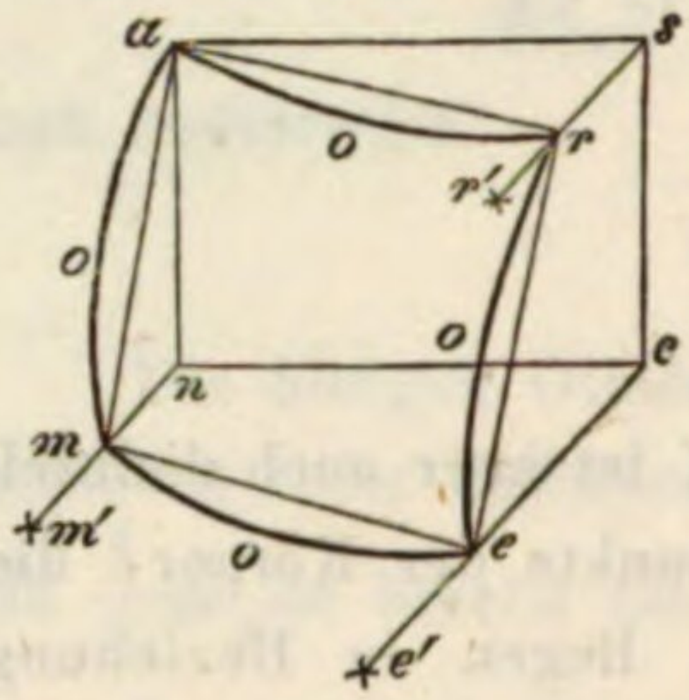
Diess analytische Ziel erreicht man auch nicht dadurch, dass man zum zweiten Differenzial fortschreitet; denn auch das zweite Differenzial der Körper giebt noch nicht einen allgemeinen, von den Ordinaten selbst unabhängigen Ausdruck, welchen man erst im dritten Differenzial, welches das Körper-Element in sich schliesst, erhält, wie bei der Cubatur der Körper bewiesen worden ist. Man muss daher bis zu diesem Differenzial fortschreiten.

§. 213.

Schwerpunkt des Körper-Elements.

1) Das Körper-Element ist, wie bekannt, das Polyeder, das von folgenden ebenen Figuren begrenzt ist: *ansc*, *am'n*, *asr'*,

Fig. 34.



$sce'r'$, $m'nce'$, $m'ar'e'$ (worin man sich die Linien am', ar', $r'e'$, $m'e'$ gezogen denken muss). Zieht man die Linien ac und ae', so zerlegt sich das Körper-Element in zwei Pyramiden, deren körperlicher Inhalt gleich ist:

$$\Gamma = \frac{1}{2} dx\, dy\, (dz_x + dz_y).$$

Daraus folgt, $2\Gamma = dx\, dy\, dz$, worin dz als das totale Differenzial nach x und nach y genommen ist.

Es ist:

$$dz_x = \left|\frac{dz}{dx}\right| dx, \quad dz_y = \left|\frac{dz}{dy}\right| dy.$$

Substituirt man diese Werthe, so wird:

$$2\Gamma = \left|\frac{dz}{dx}\right| dx^2\, dy + \left|\frac{dz}{dy}\right| dx\, dy^2.$$

2) Bezeichnet K den Körper im Allgemeinen, so enthält die Reihe ΔK, wenn wir bloss die Factoren dx und dy hervorheben, folgende Glieder:

$$\Delta K = A dx + B dy + \frac{1}{2}(C dx^2 + D dx\, dy + E dy^2) +$$
$$+ \frac{1}{2.3}\Big(F dx^3 + 3(G dx^2\, dy + H dx\, dy^2) + L dy^3\Big) + \ldots$$

so dass die Gleichung $\Gamma = G dx^2 dy + H dx dy^2$ hervorgeht, wie bereits bewiesen wurde.

3) Der Schwerpunkt von 2Γ (von dem in Figur 34 verzeichneten doppelten Polyeder) ist vom Anfangspunkt der Coordinaten um $\left(x + \frac{m}{n} dx\right)$, $\left(y + \frac{r}{s} dy\right)$, $\left(z + \frac{\mu}{\nu} dz\right)$ entfernt, da dieser Schwerpunkt innerhalb 2Γ, also in einem Punkte von dx, von dy und von dz liegt.

Daraus folgt in einer dem früheren Gange analogen Beweisführung einerseits:

$$\Delta(K\xi) = d(K\xi) + \frac{1}{2} d^2(K\xi) +$$
$$+ \frac{1}{2.3}\left(\left|\frac{d^3(K\xi)}{dx^3}\right| dx^3 + 3\left|\frac{d^3(K\xi)}{dx^2\, dy}\right| dx^2\, dy + \right.$$
$$\left. + 3\left|\frac{d^3(K\xi)}{dx\, dy^2}\right| dx dy^2 + \left|\frac{d^3(K\xi)}{dy^3}\right| dy^3\right) + \ldots$$

und andrerseits:

$$U' + \frac{1}{2}U'' + \frac{1}{2.3}(U'''dx^3 + 3\Gamma x + U''''dy^3) +$$
$$+ \frac{1}{2.3.4}\left(\ldots + \alpha\frac{m}{n}\Gamma dx + \ldots\right) + \ldots.$$

also:

$$\left|\frac{d^3(K\xi)}{dx^2\,dy}\right| dx^2 dy + \left|\frac{d^3(K\xi)}{dx\,dy^2}\right| dx\,dy^2 = x\Gamma,$$

(da der nachfolgende Werth $\Gamma . \frac{m}{n} dx$ bereits in das vierte Differenzial gehört).

Durch dreifache Integration, die hier bloss angedeutet wird, findet man:

$$K\xi = \iiint x\Gamma, \quad \xi = \frac{\iiint x\Gamma}{K},$$

oder:

$$\xi = \frac{\iiint x\Gamma}{\iiint \Gamma} = \frac{\iiint x\,dx\,dy\,dz_{x,y}}{\iiint dx\,dy\,dz_{x,y}}.$$

4) Ganz auf gleiche Weise findet man:

$$\eta = \frac{\iiint y\,dx\,dy\,dz_{x,y}}{\iiint dx\,dy\,dz_{x,y}}; \quad \zeta = \frac{\iiint z\,dx\,dy\,dz_{x,y}}{\iiint dx\,dy\,dz_{x,y}}.$$

Zusatz 1. Die Formel, welche den Schwerpunkt des Körper-Elements giebt, wird vornehmlich aus dem Grunde aufgestellt, weil man eine Formel haben muss, die den Schwerpunkt der Massen bestimmt. Denn ist die Dichtigkeit der Körper veränderlich, und eine Function der Ordinaten x, y, z, so fällt der Schwerpunkt des Volums der Körper keineswegs mit dem Schwerpunkt ihrer Masse zusammen.

Bezeichnet $\omega = f(x, y, z)$ die Dichtigkeit eines Körpers im Punkt x, y, z, so ist die Dichtigkeit des Körper-Elements gleich $(\omega + \Delta\omega_{x,y,z})$.

Entwickelt man:

$$\omega + \Delta\omega = \omega + d\omega + \frac{1}{2}d^2\omega + \frac{1}{2.3}d^3\omega + ..$$

so ist einerseits (wenn M die Masse ausdrückt) die Zunahme des Gewichts-Moments gleich $\Delta(M\xi)$, und andrerseits wird die Zunahme

der Gewichts-Momente der einzelnen Massen eine Reihe von Gliedern, die nach bekannten Gesetzen fortschreitet. Das Gewichts-Moment der Masse des Körper-Elements wird:

$$\Gamma\left(x+\frac{m}{n}dx\right)(\omega+\Delta\omega)=x\omega\Gamma+\left(x\Gamma d\omega+\omega\,.\,\frac{m}{n}\Gamma dx\right)+\ldots$$

Die Grösse $x\omega\Gamma$ enthält dritte Differenzialien, die Grösse $\left(x\Gamma d\omega+\omega\frac{m}{n}\Gamma dx\right)$ enthält vierte Differenzialien u. s. w.; es findet daher die vollkommen adäquate Gleichung statt:

$$\left|\frac{d^3(M\xi)}{dx^2\,dy}\right|dx^2\,dy+\left|\frac{d^3M\xi}{dx\,dy^2}\right|dx\,dy^2=x\omega\Gamma,$$

und durch dreimalige Integration findet man:

$$M\xi=\iiint x\omega\Gamma,\quad \xi=\frac{\iiint x\omega\,dx\,dy\,dz_{x,y}}{\iiint\omega\,dx\,dy\,dz_{x,y}}.$$

Auf dieselbe Art folgen die Werthe:

$$\eta=\frac{\iiint y\omega\,dx\,dy\,dz_{x,y}}{\iiint\omega\,dx\,dy\,dz_{x,y}},\quad\text{und}\quad \zeta=\frac{\iiint z\omega\,dx\,dy\,dz_{x,y}}{\iiint\omega\,dx\,dy\,dz_{x,y}}.$$

Ist ω constant, d. h. ist der Körper von gleicher Dichtigkeit, so hebt sich ω im Zähler und Nenner, und es gehen wieder die früheren Formeln hervor, d. h. der Schwerpunkt der Masse fällt mit dem Schwerpunkt des Volums zusammen.

Zusatz 2. Oft ist es wünschenswerth, die Formel des Schwerpunkts des Körper-Elements in Polar-Coordinaten zu haben. In diesem Falle geht $2\,\Gamma=dx\,dy\,dz_{x,y}$ in folgende Formel über:

$$dx\,dy\,dz_{x,y}=r^2\sin v\,dv\,dt\,dr_{v,t},$$

wie §. 186 bewiesen worden ist.

Um x, y, z in Polar-Coordinaten auszudrücken, hat man die Gleichungen:

$$x=r\cos v,\quad y=r\sin v\cos t,\quad z=r\sin v\sin t,$$

Substituirt man diese Werthe, so gehen folgende Gleichungen hervor:

$$\xi = \frac{\iiint \omega r^3 \sin v \cos v \, dv \, dt \, dr_{v,t}}{\iiint \omega r^2 \sin v \, dv \, dt \, dr_{v,t}},$$

$$\eta = \frac{\iiint \omega r^3 \sin^2 v \cos t \, dv \, dt \, dr_{v,t}}{\iiint \omega r^2 \sin v \, dv \, dt \, dr_{v,t}},$$

$$\zeta = \frac{\iiint \omega r^3 \sin^2 v \sin t \, dv \, dt \, dr_{v,t}}{\iiint \omega r^2 \sin v \, dv \, dt \, dr_{v,t}}.$$

Die Integration ist bei der Berechnung dieser Formeln die Hauptsache. Die Grenzen, die bei der Integration genommen werden, bestimmen sich nach der Natur des jedesmaligen Problems. Der Differenzial-Calcul giebt nur die Elemente, von denen überhaupt ausgegangen werden kann.

Zusatz 3. Die vorhergehenden Formeln enthalten Alles, was zur Herstellung der Gleichungen der Attraction der Körper nothwendig ist. Die Herstellung selbst und die weitere Ausführung dieser Gleichungen ist Sache der Mechanik.

Cap. XXVI.

Anwendung des Differenzial-Calculs auf Bewegung und bewegende Kraft.

§. 214.

Raum- und Zeit-Grössen als Functionen von einander.

In der Wissenschaft der Geometrie betrachtet man Linien, Flächen und Körper, ohne auf die Zeit Rücksicht zu nehmen, in der sie beschrieben oder gemessen werden. Diess ist eine Abstraction, die in der Wissenschaft der Mechanik wegfällt, in welcher man gerade auf die Zeit, in der die geometrischen Grössen beschrieben oder gemessen werden, Rücksicht nimmt.

Drückt man die räumlichen Grössen dadurch, dass man sie durch Einheiten ihrer Art misst, durch Zahlen aus, und ebenso die Zeitgrössen, die man ihrerseits durch Einheiten ihrer Art misst, so haben die Zahlen der Raum- und Zeitgrössen eine gegenseitige Abhängigkeit, sie sind Functionen von einander, und diese drücken aus, welche Raumgrössen in einer bestimmten Anzahl von Zeit-Einheiten gemessen werden.

Bezeichnet man die so bestimmten Raumgrössen durch s und die Zeitgrössen durch t, so ist allgemein $s = fx$, d. h. der gemessene Raum ist eine Function der Zeit. (Von dem andern Factor, nämlich von der *Masse* der wirkenden Kräfte, sehen wir hier ab, d. h. wir nehmen sie als 1; denn die so gefundenen Resultate lassen sich sehr leicht auf den Fall übertragen, dass die Massen der wirkenden Kräfte, seien sie constant oder variabel, mit in Rechnung gebracht werden.)

Wirkt eine einzige Kraft, so ist der durchlaufene Raum immer eine gerade Linie, wirken mehrere Kräfte, und unter verschiedenen Winkeln auf einander, so können geradlinige oder krummlinige Bewegungen im Raume entstehen.

§. 215.

Das Maass der Bewegungen.

1) Die einfachste Function $s = f(t)$ ist eine Gleichung des ersten Grades: $s = at$. Nimmt man eine bestimmte Zeitgrösse t', so erfolgt eine bestimmte Raumgrösse s', und es ist: $s' = at'$. Daraus bildet man die Proportion: $s : s' = at : at'$, $s : s' = t : t'$, d. h. die durchlaufenen Räume verhalten sich wie die Zeiten.

Eine solche Bewegung nennt man gleichförmige Bewegung, und den constanten Coefficienten $a = \frac{s}{t}$ nennt man die Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung. Das Criterium einer gleichförmigen Bewegung ist, dass sich die Zeiten wie die durchlaufenen Räume verhalten.

2) Die zweite einfache Function ist: $s = bt^2$. In einer bestimmten Zeit t' wird ein bestimmter Raum s' gemessen, und es erfolgt die Gleichung: $s' = bt'^2$. Daraus bildet sich die Proportion: $s : s' = t^2 : t'^2$, welche ausdrückt, dass sich die durchlaufenen Räume wie die Quadrate der Zeiten verhalten.

Eine solche Bewegung nennt man gleichförmig beschleunigte Bewegung, und den constanten Coefficienten $b = \frac{s}{t^2}$ nennt man die beschleunigende Kraft, auch öfters die Kraft schlechtweg.

3) Die dritte einfache Function ist $s = ct^3$. Aus ihr bildet sich $s' = ct'^3$, und daraus die Proportion: $s : s' = t^3 : t'^3$, d. h. die durchlaufenen Räume verhalten sich wie die dritten Potenzen der Zeiten. Diese Bewegung hat keinen besondern Namen, auch ist nicht für das Maass dieser Bewegung $c = \frac{s}{t^3}$ ein besonderer Kunstausdruck eingeführt.

Nennt man $a = \frac{s}{t}$ (die Geschwindigkeit) das erste Maass der Bewegung, und $b = \frac{s}{t^2}$ (die beschleunigende Kraft) das zweite

Maass der Bewegung, so könnte man $c = \frac{s}{t^3}$ das dritte Maass der Bewegung nennen.

Für die weiteren Functionen: $s = et^4$, $s = ht^5$ etc., sind ebenfalls keine besonderen Kunstausdrücke aufgestellt. Man kann, analog den vorhergehenden Benennungen, e das vierte Maass, h das fünfte Maass der Bewegung nennen u. s. w.

Der Grund dieses Mangels an Kunstausdrücken liegt darin, dass man in der Anwendung der Mechanik auf die Empirie nur solchen Kräften begegnet, die eine gleichförmige oder eine gleichförmig beschleunigte Bewegung hervorbringen. Allein die Mechanik, als eine exacte Wissenschaft, kann nie auf den niedern Standpunkt einer Experimental-Wissenschaft herabsinken, sie hat also entweder die höhern Maasse der Bewegungen aufzunehmen und durch einen allgemeinen Lehrsatz abzuschliessen, oder sie hat den apriorischen Beweis zu führen, dass eine einzelne für sich wirkende Kraft überhaupt keine andere als höchstens eine gleichförmig beschleunigte Bewegung hervorbringen könne, was auf eine gefahrvolle Bahn führt, die aber Poisson in seiner vortrefflichen Mechanik nicht ohne Glück betreten zu haben scheint.

Noch viel weniger als die Mechanik kann die Analysis auf die niedrige Stufe einer Experimental-Wissenschaft herabsteigen. Für sie gilt allgemein das erste, zweite, dritte und überhaupt n^{te} Maass der Bewegung mit den jedesmaligen Formeln und mit allen Criterien, nach welchen diese verschiedenen Maasse der Bewegung unterschieden und festgestellt werden.

Zusatz. Wirken zwei oder mehrere Kräfte an einem Punkte nach gleichen oder entgegengesetzten Richtungen, so ist der durchlaufene Raum ein Resultat der wirkenden Kräfte und es entsteht die Gleichung:

$$s = at \pm bt^2 \pm ct^3 \pm \ldots$$

Der einfachsten Bewegung dieser Art, $s = at \pm bt^2$, begegnet man, wie bekannt, in der Experimental-Physik, wenn ein schwerer Körper in der Richtung oder gegen die Richtung der Schwere gestossen wird.

§. 216.

Differenzialien des zurückgelegten Raumes.

Es sei allgemein $s = ft$ irgend eine algebraische oder transcendente Gleichung zwischen dem durchlaufenen Raum und der Zeit, sei es, dass die Bewegung das Resultat einer oder mehrerer in verschiedenen Richtungen wirkenden Kräfte ist. Nimmt man den Weg, den der Schwerpunkt eines Körpers beschreibt, so ist s irgend eine Linie im Raume, und ist von zwei Gleichungen zwischen den rechtwinkeligen Coordinaten x, y, z, oder zwischen den Polar-Coordinaten v, t, r abhängig.

Nimmt man t als unabhängig Veränderliche, und vermehrt man t um dt, so geht s in $s + \Delta s_t$ über, und es entsteht die Reihe:

$$\Delta s_t = ds_t + \frac{1}{2} d^2 s_t + \frac{1}{2.3} d^3 s_t + \ldots.$$

Die einzelnen Glieder dieser Reihe sind, wie bei den Differenzialien der Curven bewiesen worden ist, gerade Linien, die ihrer Grösse und Lage nach geometrisch vollkommen bestimmt sind.

Nun ist:

$$ds_t = \frac{ds}{dt} dt, \quad d^2 s_t = \frac{d^2 s}{dt^2} dt^2, \quad d^3 s_t = \frac{d^3 s}{dt^3} dt^3 \text{ u. s. w.}$$

Nimmt man, da dt die willkührliche Zunahme ausdrückt, irgend einen andern Werth dt', z. B. das zweifache, dreifache, $n$fache von dt, während t denselben Werth behält, so ist:

$$ds'_t = \frac{ds}{dt} dt', \quad d^2 s'_t = \frac{d^2 s}{dt^2} dt'^2, \quad d^3 s'_t = \frac{d^3 s}{dt^3} dt'^3 \text{ u. s. w.}$$

Es finden demnach die Proportionen statt:

$$ds_t : ds'_t = dt : dt'; \quad d^2 s_t : d^2 s'_t = dt^2 : dt'^2;$$
$$d^3 s_t : d^3 s'_t = dt^3 : dt'^3 \text{ u. s. w.}$$

Das erste Glied der ganzen Reihe Δs_t, nämlich ds_t, ist daher eine gleichförmige Bewegung; das zweite Glied in der Reihe Δs_t, nämlich $\frac{1}{2} d^2 s_t$, ist eine gleichförmig beschleunigte Bewegung; das dritte Glied in der Reihe Δs_t, nämlich $\frac{1}{2.3} d^3 s_t$, ist eine Bewegung mit dem dritten Maasse der Bewegung u. s. w., Sätze, die auf's Allerleichteste aus der Reihe Δs_t abgelesen werden.

Es zerlegt sich demnach der Weg Δs_t, der während der Zeit dt zurückgelegt wird, in die Summe mehrerer oder unendlich vieler einfacher und messbarer Bewegungen, deren erste eine gleichförmige, deren zweite eine gleichförmig beschleunigte, deren dritte eine Bewegung mit dem dritten Maasse u. s. w. ist, Bewegungen, die alle ihrer Grösse und ihrer Lage nach auf das Vollständigste geometrisch interpretirt werden können.

Das höchst wichtige Resultat, das sich daraus ergiebt, ist, dass man die Functionen der Geschwindigkeit, der beschleunigenden Kraft, der dritten Kraft u. s. w. aus den aufeinanderfolgenden Differenzialien von s, d. h. aus der Reihe Δs_t ableiten kann. Und zwar ist $\frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit, weil es der Factor der ersten Potenz von dt ist; es ist $\frac{d^2s}{dt^2}$ die beschleunigende Kraft, weil es der Factor von der zweiten Potenz der Zeit (dt) ist; es ist $\frac{d^3s}{dt^3}$ die dritte Kraft, weil es der Factor von $(dt)^3$ ist u. s. w.

(Die Zahlen-Factoren $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2.3}$ u. s. w. heben sich in den Gleichungen:

$$\frac{1}{2}d^2s_t = \frac{1}{2}\frac{d^2s}{dt^2}dt^2, \quad \frac{1}{2.3}d^3s_t = \frac{1}{2.3}\frac{d^3s}{dt^3}dt^3 \text{ u. s. w.)}$$

Die Folgerungen, die sich aus diesen Gleichungen ergeben, sind höchst wichtig.

1) Ist der durchlaufene Raum als Function der Zeit gegeben, so kann man die Geschwindigkeit, die der bewegte Körper in der Zeit t erlangt hat, und mit welcher er sich in der Tangente fortbewegen würde, wenn alle übrigen Kräfte zu wirken aufhörten, unmittelbar aus $\frac{ds}{dt}$, ableiten.

2) Ist umgekehrt diese Geschwindigkeit v als Function der Zeit gegeben, so gilt die Gleichung $v = \frac{ds}{dt}$, $ds = vdt$ und durch Integration: $s = \int vdt$, so dass man den während dieser Zeit durchlaufenen Raum findet.

3) Ist der durchlaufene Raum, oder ist die Geschwindigkeit gegeben, so findet man unmittelbar die beschleunigende Kraft φ, da $\varphi = \frac{d^2s}{dt^2}$, $\varphi = \frac{dv}{dt}$ ist.

4) Ist die beschleunigende Kraft φ als Function der Zeit gegeben, so findet man durch einfache und doppelte Integration die Geschwindigkeit v, und den durchlaufenen Raum s, da $v = \int \varphi dt$, und $s = \int\int \varphi dt^2$, wobei die Constanten als in die Integration mit aufgenommen gedacht werden.

5) Auf gleiche Art findet man, wenn durchlaufener Raum, Geschwindigkeit oder beschleunigende Kraft gegeben sind, durch Differenzirung die dritte Kraft; und umgekehrt, wenn die dritte Kraft gegeben ist, durch einfache, doppelte oder dreifache Integration die beschleunigende Kraft, die Geschwindigkeit und den durchlaufenen Raum. U. s. w.

§. 217.

Zusätze.

Zusatz 1. In der Anwendung der Mechanik auf die Empirie begegnet man nur den Functionen des durchlaufenen Raumes, der Geschwindigkeit und der beschleunigenden Kraft, und man ist im Stande, durch die drei ersten Glieder der Reihe $s + \Delta s_t$, nämlich s, $\frac{ds}{dt}\, dt$, $\frac{d^2s}{dt^2}\, dt^2$ alle in Angriff genommenen Probleme auf die gewünschten Differenzial- oder Integral-Gleichungen zu bringen.

Zusatz 2. Dieses so ganz natürliche, ja handgreifliche Zusammentreffen der Functionen und ihrer Differenzialien mit den Begriffen des durchlaufenen Raumes, der Geschwindigkeit und der beschleunigenden Kraft, Begriffe, die man schon vor Entdeckung des Differenzial-Calculs hatte und in Rechnung brachte, veranlasste den unsterblichen Newton, den Differenzial-Calcul, welchen er desswegen die Fluxions-Rechnung nannte, auf die Oben aufgezählten Begriffe zu gründen, indem er die gegebene Function einfach Fluente, das erste Differenzial, also die Geschwindigkeit, die Fluxion nannte. — So sehr auch der Name Newtons gefeiert ist, und zwar mit vollem Rechte, so darf man doch gestehen, dass er sehr mit Unrecht diesen Weg der Begründung des Differenzial-Calculs einschlug. Denn der Differenzial-Calcul ist eine analytische Wissenschaft, und seine

Anwendung auf Mechanik ist eben nicht mehr und nicht weniger als eine blosse Anwendung, die niemals den Umfang und die Freiheit der allgemein analytischen Entwicklung haben kann. Es hat auch den Anhängern Newtons, die aus Verehrung für ihren grossen Lehrer so sehr auf diesem Irrweg der Methode verharren, schlechte Früchte getragen; sie sind im Wettlaufe der Wissenschaft zurückgeblieben.

Zusatz 3. Hier, in der Anwendung des Differenzial-Calculs auf die Mechanik, hat noch ein anderer, nicht minder ruhmreicher Vorkämpfer der Wissenschaft, seine Bahn ändern müssen. La Grange musste in der Mechanik seine Zeichensprache aufgeben, ja er kehrte indirect sogar wieder zu den unendlich kleinen Grössen zurück.

Ist y eine Function von x, $y = fx$, so gründet sich die Zeichensprache von La Grange darauf, dass $y' = f'x$, $y'' = f''x$ etc. sind, worin $f'x$, $f''x$ die Coefficienten von dx, dx^2 etc. ausdrücken, die in der Taylor'schen Reihe als folgende Glieder erscheinen:

$$f(x+\omega) = fx + f'x\omega + \frac{1}{2}f''x\omega^2 + \ldots$$

Da $f'x = \frac{dy}{dx}$ ist, so hat nach La Grange $f'x$ einen endlichen Werth, während dy und dx einzeln keinen angebbaren oder denkbaren Werth haben. Das ist nun eine Arbeit von unendlicher Schwierigkeit, nämlich Das durchführen zu wollen, dass der Quotient $\frac{dy}{dx}$ einen bestimmten und nachweisbaren Werth hat, während Zähler und Nenner einzeln gar keinen denkbaren Werth haben sollen, und Jeder, der diese herculische Arbeit versucht hat, ist gescheitert.

Obwohl nun in der Mechanik die ersten Begriffe der Geschwindigkeit und der beschleunigenden Kraft gerade die Differenzial-Quotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ verlangen, so ward es doch bei zusammengesetzten Problemen klar, dass man mit der Bezeichnung $f'x$, $f''x$ etc. nicht auskommen könne, und La Grange nahm selbst wieder die Zeichen dy, d^2y, d^3y etc. an.

Aber noch in anderer Hinsicht hat La Grange hier seinen Lauf ändern müssen. Wir haben Oben bemerkt, dass man in der Anwendung der Mechanik auf Empirie bloss solchen Aufgaben

begegnet, welche nur die beiden ersten Differenzialien des durchlaufenen Raumes verlangen.

Um nun hier abzuschliessen, nimmt La Grange statt der allgemeinen Taylor'schen Reihe die endliche Reihe mit einem Ergänzungs-Gliede:

$$\Delta s = \frac{ds}{dt}k + \frac{d^2s}{dt^2}\frac{k^2}{2} + \frac{d^3(s+\alpha)}{dt^3}\frac{k^3}{2.3},$$

und fährt fort: „Die ersten beiden Glieder bezeichnen, wie man sieht, die aus der gleichförmigen und der gleichförmig beschleunigten zusammengesetzte Bewegung; das dritte Glied bezeichnet die Summe aller übrigen Bewegungen, die zu jenen beiden hinzukommen, und wegen derer die wirkliche Bewegung kein einfaches Resultat jener beiden sein kann. — Nun aber erwäge man, dass k immer so klein genommen werden könne" etc. etc., worauf er zum Schlusse kommt: „Hieraus folgt, dass jede durch $x = ft$ bezeichnete geradlinige Bewegung, in einem beliebigen Augenblicke am Ende der Zeit t, als aus einer gleichförmigen Bewegung und aus einer gleichförmig beschleunigten Bewegung allein zusammengesetzt betrachtet werden könne."

Das ist das unendlich Kleine unter anderm Namen, es werden von der Taylor'schen Reihe bloss zwei Glieder genommen, $\Delta s = ds + \frac{1}{2}d^2s$; die übrigen werden weggeworfen. Die Erfahrung zeigt, dass diess angeht; der Grund ist aber nicht der, dass dt unendlich klein ist, sondern dass die Erfahrung nur Functionen wie $s = a + bt + ct^2$ giebt, die, weil sie rational sind und nur zweite Potenzen von t enthalten, von selbst das dritte Differenzial und alle nachfolgenden Glieder gleich Null haben, auch wenn dt unendlich gross genommen wird. Denn $(s + \Delta s)$ schliesst sich mit den Gliedern:

$$a + bt + ct^2 + (b + 2ct)\,dt + cdt^2.$$

Was aber zufällig von rationalen Functionen, z. B. $s = ct^2$ gilt, das gilt nicht von jeder Function ft, und in diesen bleiben die Bewegungen, die vom dritten und von den nachfolgenden Gliedern abhängen, in ihrer ganzen Grösse und Richtung.

Man geht in der Differenzial-Reihe so weit, bis man eine brauchbare Gleichung findet. So erhält man z. B. bei der Quadratur der ebenen Curven sogleich im ersten Differenzial die brauch-

bare Gleichung: $dF = ydx$. Von dieser geht man aus, und sucht F durch Integration. Allein wenn Jemand Lust hat, kann er vom hundertsten Differenzial ausgehen, und dann wird er, nachdem er neunundneunzigmal integrirt hat, auf $dF = ydx$ kommen und sehen, dass er einfacher gegangen wäre, wenn er sogleich mit $dF = ydx$ begonnen haben würde. Findet man im ersten Differenzial keine brauchbare Gleichung (wenn sie noch unbestimmt ist, wie z. B. bei der Complanation der Flächen), dann geht man zum ganzen oder partiellen zweiten Differenzial, und man findet wirklich die brauchbare Gleichung:

$$\left|\frac{d^2S}{dx\,dy}\right| dx\,dy = dx\,dy\sqrt{1 + \left|\frac{dz}{dx}\right|^2 + \left|\frac{dz}{dy}\right|^2}.$$

Diess ist der Ausgangspunkt, von dem man zu S zurückgeht.

Findet man im zweiten Differenzial keine brauchbare Gleichung, so geht man zum dritten, wie z. B. beim Körper-Element, und man findet:

$$\left|\frac{d^3k}{dx\,dy\,dz_{x,y}}\right| dx\,dy\,dz_{x,y} = dx\,dy\,dz_{x,y}.$$

Das Bewunderungswürdige des Calculs ist, dass man jederzeit in irgend einem Gliede eine brauchbare Gleichung findet. Das ist diejenige, von der man ausgeht, und es wäre Luxus, wenn man zum vierten und fünften Differenzial fortginge, was man übrigens ohne Bedenken könnte, um dann wieder nach zweimaliger Integration auf den Ausdruck:

$$\left|\frac{d^3k}{dx\,dy\,dz_{x,y}}\right| dx\,dy\,dz_{x,y} = dx\,dy\,dz_{x,y}$$

zu kommen.

Aber darum, weil das dritte Differenzial einen Anhaltspunkt für die Gleichungen bietet, kann man nicht sagen, dass das vierte und die nachfolgenden Differenzialien verschwinden; sie bleiben bestehen, wie sie sind, aber man braucht sie nicht, d. h. sie geben keine andern Gleichungen, als das dritte Differenzial schon giebt. Findet man eine brauchbare Gleichung im zweiten Differenzial, so verschwinden die dritten und nachfolgenden Differenzialien nicht, aber man braucht sie nicht zum Integriren, weil sie keine andern Gleichungen und Anhaltspunkte geben, als das zweite Differenzial. Dasselbe gilt vom ersten Differenzial, wenn dieses schon eine

brauchbare Formel liefert, wie es gewöhnlich der Fall ist. Aber darum verschwinden die übrigen Differenzialien nicht, sondern sie bleiben, was sie sind; und ändert man die Probleme, sucht man z. B. statt der Quadratur die Tangirungen der Flächen, dann braucht man die zweiten, dritten und n^{ten} Differenzialien gar wohl, wenn man die nothwendigen Gleichungen aufstellen will.

Gerade so verhält es sich in der Mechanik. So weit die Aufgaben der Bewegung in Angriff genommen sind, ist man im Stande, theils aus dem ersten und theils aus dem zweiten Differenzial des durchlaufenen Raumes alle Gleichungen herzustellen, die man braucht. Aber darum fallen die andern Differenzialien nicht aus. Man könnte z. B. aus dem dritten Differenzial diese Gleichungen herstellen, aber sie würden nichts Neues bieten, sie würden nach einmaliger Integration gerade wieder die Gleichungen des zweiten Differenzials werden, so dass man kürzer geht, wenn man sogleich mit dem niedrigsten Differenzial, das eine brauchbare Gleichung liefert, beginnt, was mit Recht allgemeine Regel der Methode ist. Aendert man aber die Gesichtspunkte und Aufgaben, dann braucht man gar wohl die dritten und höhern Differenzialien des Raumes.

Zusatz 4. Auf ähnliche Weise leitet Poisson in seiner so gediegenen Theorie der Mechanik die Functionen der Geschwindigkeit und der beschleunigenden Kraft ab. „Bewegt eine Kraft einen Körper in der Zeit t, und ist v die Geschwindigkeit, die er am Ende der Zeit t erlangt hat, so wird der Körper, wenn t um dt vermehrt wird, den Raum ds in der Zeit dt mit der Geschwindigkeit v zurücklegen. Nennt man ε den Theil des Raumes, den der Körper während der Zeit dt durch die Wirkung der Kraft selbst zurücklegt, so gilt die Gleichung:

$$ds = vdt + \varepsilon.“$$

Diess ist sehr unrichtig. Es sollte nicht ds, sondern Δs stehen, und es sollte heissen:

$$\Delta s = vdt + \varepsilon,$$

worin ε die nachfolgenden Glieder der Taylor'schen Reihe ausdrückt.

„Vernachlässigt man ε, das nur zweite und höhere Differenzialien enthalten kann, gegen vdt, so entsteht $ds = vdt$.“ Die Gleichung ist richtig, aber aus andern, als den angeführten Gründen.

Denn es ist bei Poisson ganz und gar nicht bewiesen, wie Δs, ein beliebiger Bogen, in die gerade Linie ds übergeht.

„Will man die Parthie ε des Raumes kennen lernen, welchen der Körper, abgesehen von seiner Geschwindigkeit, durch die fortwährende Wirkung der Kraft selbst beschreibt, und nennt man s' den Raum, welcher der Zeit $t+dt$ entspricht, so ist

$$s' - s = \frac{ds}{dt}dt + \frac{1}{2}\frac{d^2s}{dt^2}dt^2 + k,$$

worin k die übrigen Glieder der Taylor'schen Reihe ausdrückt. Da das erste Glied $\frac{ds}{dt}dt = vdt$ ist, so wird, wenn man k vernachlässigt, $\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{d^2s}{dt^2}dt^2$ der Theil des Raumes, welcher allein der Wirkung der Kraft (der beschleunigenden Kraft) zugeschrieben werden muss.“ Diess ist unrichtig, denn ε ist gleich:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2s}{dt^2}dt^2 + \frac{1}{2.3}\frac{d^3s}{dt^3}dt^3 + \ldots$$

und $\frac{d^2s}{dt^2}dt^2$ ist zwar die beschleunigende Kraft, aber es ist nicht gleich ε. — Auf gleiche Art könnte man fortfahren: Will man den Theil des Raumes kennen, dessen Maas noch von einer dritten Kraft bedingt wird, so ist:

$$s' - s = \frac{ds}{dt}dt + \frac{1}{2}\frac{d^2s}{dt^2}dt^2 + \frac{1}{2.3}\frac{d^3s}{dt^3}dt^3 + \ldots$$

$$s' - s = vdt + \frac{1}{2}\varphi dt^2 + \frac{1}{2.3}\frac{d^3s}{dt^3}dt^3 + \mu,$$

und vernachlässigt man μ, so wird:

$$k = \frac{1}{2.3}\frac{d^3s}{dt^3}dt^3.$$

U. s. w.

Vernachlässigt man einmal ein Glied gegen das andere, dann kann man sogleich $s' = s$ setzen, denn nach Poissons Ansicht gelten alle übrigen Glieder $\frac{ds}{dt}dt + \frac{1}{2}\frac{ds^2}{dt^2}dt^2 + \ldots$ nicht ein Decilliontel einer Linie gegen s, während man doch in der Wirklichkeit gewöhnlich dt gleich 1 Secunde nimmt, wodurch $\frac{ds}{dt}dt$ z. B. bei der Schwerkraft eine sehr greifbare, in Métern ausdrückbare Linie wird, von der man begreiflicher Weise nicht mehr als von einer zu vernachlässigenden Grösse reden kann.

Eben so messbare Grössen werden in Wirklichkeit die Grössen $\frac{1}{2}\frac{d^2s}{dt^2}dt^2$, $\frac{1}{2.3}\frac{d^3s}{dt^3}dt^3$ u. s. w., von denen daher kein einziges irgendwie vernachlässigt werden kann, und diess um so weniger, als der Taylor'sche Satz:

$$s' - s = \frac{ds}{dt}dt + \frac{1}{2}\frac{d^2s}{dt^2}dt^2 + \frac{1}{2.3}\frac{d^3s}{dt^3}dt^3 + ..$$

für jedes auch noch so grosse dt gilt, wenn man z. B. dt gleich 100 Secunden oder 100 Stunden etc. setzt, was analytisch genommen gar Niemand mehr bezweifelt, was selbst diejenigen lehren und vortragen, die bei der Anwendung auf Geometrie und Mechanik wieder darauf vergessen.

Die Wahrheit ist folgende: der wirkliche in der Zeit dt durchlaufene Raum Δs zerlegt sich in eine endliche oder unendliche Reihe von einzelnen Räumen, deren erster ds eine gerade Linie ist, die mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufen wird, deren zweiter $\frac{1}{2}d^2s$ eine gerade Linie ist, die mit gleichförmig beschleunigter Geschwindigkeit durchlaufen wird, deren dritter $\frac{1}{2.3}d^3s$ eine gerade Linie ist, die mit der Geschwindigkeit der dritten Kraft durchlaufen wird u. s. w. Braucht man nun nach der Natur der Aufgabe nur die gleichförmige Geschwindigkeit, so bildet man die Gleichung aus dem ersten Gliede; braucht man die beschleunigende Kraft, so bildet man die Gleichung aus dem zweiten Gliede, braucht man die dritte Kraft, so bildet man die Gleichung aus dem dritten Gliede u. s. w. Dabei wird gar nichts vernachlässigt, sondern man setzt nur die Grössen einander gleich, die einander gleich sind, wie auch schon bei den Differenzialien in ihrer Anwendung auf Geometrie erörtert worden ist.

Uebrigens gilt noch gegen die Ableitung von Poisson Alles, was gegen die La Grange'sche Ableitung bemerkt worden ist.

Zusatz 5. Die vorhergehenden Formeln enthalten alle Elemente, aus denen die Gleichungen der Mechanik gebildet werden können. Daraus wird auch einleuchtend, dass diese Wissenschaft fast ganz vom Differenzial-Calcul abhängt. Wollten wir sie weiter verfolgen, so müsste eine ganze Theorie der Mechanik geschrieben werden, was nicht die Aufgabe des Differenzial-Calculs ist.

Cap. XXVII.

Anwendung des Differenzial-Calculs auf Physik.

§. 218.

Allgemeine Erörterung der Methode.

In allen Ausdrücken der Physik sind zwei wesentlich verschiedene Elemente zu unterscheiden. Das eine Element ist rein analytisch, und wird bei jedem besondern Problem aus den reichen Hilfsmitteln der Analysis genommen; es ist das gleichsam Ewige und Unveränderliche in den Ausdrücken der Naturgesetze, unabhängig von jeglicher Vervollkommnung und Verfeinerung der Experimente. Das andere Element hängt von der Beobachtung der Naturerscheinungen ab, ist innerhalb einer gewissen Grenze wandelbar und ist in seiner Vollkommenheit abhängig von der Vollkommenheit der Experimente. Diess Element giebt die besondere Gleichung, die, in die erste, allgemein analytische Gleichung substituirt, den möglichst vollkommenen Ausdruck der Naturgesetze und ihre Erscheinungen darstellt.

Es wäre eine nicht ganz richtige Vorstellung, wenn man glaubte, dass beide wissenschaftlich unterscheidbaren Elemente gleichsam nur mechanisch neben einander bestünden, ohne dass sie sich weiter irgendwie etwas angingen. Es ist im Gegentheil im Reichthum der analytischen Formel oft mehr und Allgemeineres enthalten, als das Experiment anfänglich anstrebt. Wird daher der analytische Ausdruck gehörig erwogen und in allen seinen Folgen erschöpft, so führt er weiter, als das Experiment ursprünglich gehen wollte, er leitet zu neuen Experimenten und zu tiefem Eindringen in das Wesen der Natur und ihrer Erscheinungen.

Die Methode der Anwendungen des Differenzial-Calculs auf diese Objecte ist gerade so beschaffen, wie bei den vorhergehenden Untersuchungen. Sie ist eine und dieselbe, trennt sich aber, je nach der Beschaffenheit der Probleme, in ein doppeltes Schema, in ein indirectes und in ein directes, zwei Beweisarten, die im Grunde auf dasselbe hinauskommen.

Das indirecte Schema stellt zwei Ausdrücke auf, die man bereits kennt, und zwischen welchen der gesuchte, noch unbekannte Ausdruck des gegebenen Problems liegen muss. Stimmen nun die, bereits bekannten, grösseren und kleineren Ausdrücke im ersten Glied ihrer Reihen überein, so ist dieses Glied das erste Differenzial der unbekannten Grösse. Ist man nicht im Stande, Ausdrücke aufzustellen, die schon in ihrem ersten Gliede bekannt sind, so geht man, wie bei der Complanation der Flächen und bei der Cubatur der Körper, zu Ausdrücken über, deren zweite oder dritte Glieder theilweise bekannt sind, und verfährt nach den gegebenen Regeln.

Das directe Schema ist einfacher. Es zerlegt sich die ganze Zunahme der gesuchten Grösse X in eine Reihe:

$$\Delta X = \frac{dX}{dx}dx + \frac{1}{2}\frac{d^2X}{dx^2}dx^2 + \frac{1}{2.3}\frac{d^3X}{dx^3}dx^3 + \ldots$$

Das erste Glied dieser Reihe giebt einen Ausdruck der Gleichförmigkeit, weil es dx in der ersten Potenz zum Factor hat; das zweite Glied giebt einen Ausdruck der gleichförmigen Vermehrung, weil es dx^2 zum Factor hat u. s. w. Kennt man nun bereits das Naturgesetz für den gleichförmigen Ausdruck, so substituirt man dasselbe, und erhält auf diese Art eine vollkommene Differenzial-Gleichung, deren Integration das gesuchte Naturgesetz für jede auch ungleichförmige Function giebt.

Kann man keine Differenzial-Gleichung des ersten Grades bilden, so geht man zu dem zweiten und den nachfolgenden Differenzialien über, und bildet aus ihnen die Gleichungen, aus welchen die Naturgesetze mit Hilfe der Integration, welche Sache der Analysis ist, erhoben werden können.

Wir werden aus dem grossen Reichthum möglicher Beispiele zwei auswählen, von denen das eine nach dem indirecten und das andere nach dem directen Schema der Beweise durchgeführt wird.

§. 219.

Höhen-Messungen durch Beobachtungen des Barometers.

Bei der ersten Ableitung des Ausdrucks, durch welchen die Höhen aus Barometer-Beobachtungen bestimmt werden, nehmen wir nur den Druck der Luft, ohne Rücksicht auf die Veränderungen ihrer Temperatur und ihres Feuchtigkeits-Zustandes. Werden auch diese berücksichtigt, wie sie berücksichtigt werden müssen, so geben sie Correcturen der allgemeinen Formel, ohne das Wesen ihrer Function zu ändern.

Die Luft-Säule von der obern Grenze der Atmosphäre bis zu einem gegebenen Punkt in ihr, hält einer Quecksilber-Säule das Gleichgewicht, weil das Gewicht der Luft G, gleich ist dem Gewicht der Quecksilber-Säule Q, und weil beide Säulen in ihren Berührungspunkten einen und denselben Querschnitt haben.

Es gilt die Gleichung: $G = Q$.

Das Gewicht der Luft ist eine Function der Länge ihrer Säule, x, deren Anfangspunkt wir an der obern Grenze der Atmosphäre nehmen wollen; es ist: $G = fx$.

Die Höhe der Barometer-Säule sei y, und auch diese ist eine Function von x; es ist $y = \varphi x$.

Wird x um eine beliebige Linie dx vermehrt, so nehmen sowohl G als y zu, und es ist rein analytisch:

$$\Delta G = \frac{dG}{dx}dx + \frac{1}{2}\frac{d^2G}{dx^2}dx^2 + \frac{1}{2.3}\frac{d^3G}{dx^3}dx^3 + \ldots$$

Eben so wird:

$$\Delta y = \frac{dy}{dx}dx + \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}dx^2 + \frac{1}{2.3}\frac{d^3y}{dx^3}dx^3 + \ldots$$

Ist die Dichtigkeit des Quecksilbers gleich m und constant, so ist das Gewicht der Quecksilber-Säule, um welche sie verlängert wird, indem x um dx vermehrt wird, folgendes:

$$\Delta Q = m\Delta y = mdy + \frac{1}{2}md^2y + \frac{1}{2.3}md^3y + \ldots$$

und da sich ΔQ und ΔG das Gleichgewicht halten, so ist:

$$\Delta G = \Delta Q = mdy + \frac{1}{2}md^2y + \frac{1}{2.3}md^3y + \ldots$$

Ist M die Dichtigkeit der Luft in dem Punkte der Beobachtung, so ist das Gewicht der Luft-Säule von der Höhe dx keineswegs Mdx, da die Dichtigkeit der Luft in den verschiedenen Punkten dieser Linie dx keineswegs constant ist, sondern sich nach einem bestimmten Gesetze vermehrt oder vermindert. Wohl bleibt die Dichtigkeit des Quecksilbers, m, constant, weil dieses ein tropfbar flüssiger Körper ist, aber die Luft ist elastisch flüssig, und darum bleibt ihre Dichtigkeit nicht constant.

Man kann nur soviel sagen, dass das Gewicht der Luft, wenn dx die senkrechte Höhe der Luft-Säule ausdrückt, gleich ΔG ist, und dass

$$\Delta G = mdy + \frac{1}{2}md^2y + \frac{1}{2.3}md^3y + \ldots \text{ ist.}$$

Nun wird bewiesen, dass das *erste* Glied von ΔG, d. h. dass dG nicht grösser und nicht kleiner als Mdx sein könne.

Beweis: die Grösse ΔG ist grösser als das Gewicht einer Luft-Säule, deren Höhe dx und deren constant bleibende Dichtigkeit gleich M ist, d. h. $\Delta G > Mdx$. Denn indem man x um dx gegen die untere Grenze der Atmosphäre verlängert, wird ΔG eine Luft-Säule von der Höhe dx und von Luftschichten zusammengesetzt, die successiv dichter werden als die Dichte M ist.

Ferner ist die Grösse ΔG kleiner als $(M + \Delta M)\, dx$. Denn $(M + \Delta M)\, dx$ ist das Gewicht einer Luft-Säule, deren Höhe dx und deren constant gedachte Dichtigkeit $(M + \Delta M)$ ist, die also grösser ist, als die mittlere Dichtigkeit von ΔG, weil $(M + \Delta M)$ die Dichtigkeit in der unteren Grenze der Luft ausdrückt.

Nun ist:

$$(M + \Delta M)dx = Mdx + dMdx + \frac{1}{2}d^2Mdx + \ldots$$

und die zwei Ausdrücke, die grösser und kleiner sind als ΔG, stimmen in ihrem ersten Gliede Mdx überein. Daraus folgt, wie oft bewiesen wurde, dass das erste Glied von ΔG, also dG, gleich Mdx ist, so gross auch dx sein möge.

Da nun $\Delta G = \Delta Q$ ist, so ist $dG = dQ$, $d^2G = d^2Q$ etc., also, wenn die gleichen Werthe substituirt werden: $Mdx = mdy$.

Nimmt man die Luft-Säule, wie gewöhnlich geschieht, nicht von der obern Grenze der Atmosphäre, sondern von der untern, etwa vom Niveau des Meeres, so dass einer Vermehrung von x eine Verminderung von y entspricht, d. h. ein Sinken der Quecksilber-Säule, je höher man sich über das Niveau des Meeres erhebt, so wird $x' = h - x$, wenn h die constante Höhe der Atmosphäre ausdrückt, und durch Differenzirung von $x' = h - x$ wird $dx' = -dx$. Die obige Formel geht daher in $Mdx' = -mdy$ über.

So weit führt die Analysis. Nun nimmt man aus der Physik das Mariotte'sche Gesetz: dass bei gleicher Temperatur die Dichtigkeit der Luft dem Druck proportionirt ist, den sie erleidet, ein Druck, der durch die Höhe des Barometerstandes y ausgedrückt wird. Ist die Barometerhöhe an einem Punkte, z. B. am Niveau des Meeres, constant a und die Dichtigkeit der Luft an demselben Punkte gleich A, so entsteht die Proportion:

$$M : A = y : a, \quad \text{also:} \quad M = \frac{Ay}{a}.$$

In Formel $Mdx' = -mdy$ gilt es, die unbekannte Grösse M durch Ausdrücke von x oder von y zu ersetzen. Diess kann man vermittelst der gefundenen Gleichung $M = \frac{Ay}{a}$. Man erhält:

$$\frac{Ay}{a}dx' = -mdy, \quad \text{oder} \quad \frac{A}{a.m}dx' = -\frac{dy}{y},$$

und durch Integration:

$$\frac{A}{am}x' = -\log y + C.$$

Ist die Höhe der Luft x' gleich Null (am Niveau des Meeres bei einem bestimmten oder gewählten Breitengrade), dann ist die Höhe der Quecksilber-Säule gleich a, und man erhält:

$$0 = -\log a + C, \quad \text{also:} \quad C = \log a.$$

Daraus folgt:

$$\frac{A}{am}x' = \log a - \log y = \log\frac{a}{y},$$

und $$\frac{a}{y} = e^{\frac{A}{am}x'}, \quad y = ae^{-\frac{A}{am}x'}.$$

Sucht man x', so wird:

$$x' = \frac{am}{A}\log\frac{a}{y},$$

wobei, wie von selbst einleuchtend ist, die natürlichen Logarithmen verstanden werden. Nimmt man künstliche Logarithmen, so wird

$$x' = \frac{am}{Ak} log \frac{a}{y}.$$

§. 220.

Z u s ä t z e.

Z u s a t z 1. In dieser Ableitung haben wir das Gewicht einfach als Product der Dichtigkeit und der Höhe gesetzt. Streng genommen ist das Gewicht ein Product des Volums und der Dichtigkeit. Da jedoch die Luft-Säule und die Quecksilber-Säule gleiche Berührungsflächen, also gleiche Durchschnitte haben, so verhält sich ihr Volum wie ihre Höhe, und man nimmt sogleich das Product der Dichtigkeit und der Höhe, da sich ihre Querschnitte Z doch wieder in der Formel:

$$Mdx' = -mdy;\ MZdx' = -mZdy$$

gegenseitig heben würden, wie ja auch die Barometer gleichhoch stehen, sie mögen grosse oder kleine Durchmesser ihrer Glasröhren haben.

Z u s a t z 2. Beobachtet man in verschiedenen Höhen die Barometerstände y und y', so ist der Höhen-Unterschied der Beobachtungsorte, gleiche Temperatur etc. vorausgesetzt:

$$x = \frac{am}{Ak} log \left(\frac{y}{y'}\right).$$

Der Quotient $\frac{y}{y'}$ lässt es als gleichgültig erscheinen, ob man die Barometerhöhe in Metern oder Centimetern, in Zollen, Linien des englischen oder des pariser Maasses etc. abliest. — Aber der constante Coefficient $\frac{am}{Ak}$ wird ein anderer, je nachdem man ein anderes Maass zu Grunde legt. Liest man die Barometerhöhe in Zollen ab, so erhält man $\frac{am}{Ak}$, also auch x, die Höhe der Luft-Säule, in Zollen; liest man die Barometerhöhe in Metern ab, so erhält man auch x in Metern etc.

B e i s p i e l z u r E r l ä u t e r u n g. Ist bei gleicher Temperatur die Dichte der Luft z. B. $\frac{1}{800}$ der Dichte des Wassers, hingegen die Dichte des Quecksilbers $13\frac{1}{2}$ der Dichte des Wassers, und ist

der Stand des Barometers für die Luftdichte $\frac{1}{800}$ z. B. gleich 27,5 Par. Zoll, so wird für die Rechnung mit künstlichen Logarithmen für die Grundzahl 10 der Coefficient $\frac{am}{Ak}$ gleich

$$\frac{27\frac{1}{2} \cdot 13\frac{1}{2}}{\frac{1}{800} \cdot 0{,}43294\ldots} = 56383 \cdot 12 \text{ Par. Zoll, oder } 56383 \text{ Par. Fuss,}$$

und in diesem Maasse erhält man auch die Grösse x, welche die Höhe der Luft-Säule ausdrückt.

Zusatz 3. Es hängt Alles davon ab, dass dieser constante Coefficient so genau als möglich bestimmt, dass der mittlere Barometerstand am Niveau des Meeres in einer bestimmten Breite, die mittlere Dichtigkeit der Luft und des Quecksilbers etc. bei einer bestimmten Temperatur auf's Genaueste ermittelt werde. Diess ist denn auch auf's Genaueste ermittelt. Poisson findet direct 18337,46 Meter, und aus trigonometrischen Höhenmessungen berechnet sich dieser Coefficient auf 18336 Meter, was eine Uebereinstimmung giebt, wie sie bei solchen Untersuchungen nur verlangt werden kann.

Zusatz 4. Der gegebene Ausdruck ist gleichsam der Stamm der Formel. Bei jeder wirklichen Beobachtung ist aber die Temperatur und der Feuchtigkeits-Zustand der Atmosphäre, die Richtung und Stärke der herrschenden Winde etc. veränderlich. Auch diese Grössen muss man in Rechnung bringen. Es muss durch Experimente ermittelt werden, wie sich die Dichtigkeit des Quecksilbers und die Elasticität der Luft mit der Temperatur ändern, nach welchem Gesetz sich beim Wechsel der Temperatur die Scala, auf welcher die Barometerstände abgelesen werden, verlängert oder verkürzt, welchen Einfluss der hygrometrische Stand der Luft, die Capillar-Kraft des Quecksilbers in den Röhren habe, und dergleichen. Diess giebt Correcturen der allgemeinen Formel, Einführung der Temperatur etc. und constante Coefficienten, die aus sorgfältig combinirten Experimenten abgeleitet werden, welche zu ermitteln Sache der Physik ist. Diese Grössen sind übrigens hinlänglich ermittelt, und die Formel für Barometer-Höhen hat eine Vollkommenheit, wie sie wenige Formeln der Physik haben. Aus diesem Grunde verfolgen wir sie auch nicht weiter, da alles Analytische in dem Stamm der Formel enthalten

ist. Es ist das unwandelbare Element, das einzige, das eine apriorische Erkenntniss aus Gründen giebt.

§. 221.

Formel für die Schwächung des Lichts beim Durchgang durch die Atmosphäre.

Diese Formel haben mehrere Physiker abgeleitet, wie Lambert in seiner Photometrie, Herschel in seiner Lehre vom Lichte, und Andere.

„Beobachtung. Saussure malte schwarze Kreise von verschiedenen Durchmessern auf weissen Grund, und entfernte sich nach und nach von ihnen, bis er den Punkt auffand, wo jeder dieser Kreise verschwand. Eine Scheibe von 2 Zoll Durchmesser verschwand in einer Entfernung von 314 Fuss, eine zweite von 2 Fuss Durchmesser in einer Entfernung von 3588 Fuss. Würde die Luft kein Licht verschlucken, so hätte die zweite Scheibe im Verhältniss zur ersten in einer Entfernung von $314 \times 12 = 3768$ Fuss verschwinden müssen. Da sie aber schon in einer Entfernung von 3588 Fuss verschwand, so geht Licht beim Durchgang durch die Atmosphäre verloren, und zwar ist das in einer Entfernung von $3588 - 314 = 3274$ ankommende Licht nur noch $\frac{3588}{3768} = 0{,}952$ des ursprünglichen Lichts.“

Wie viel oder wie wenig genau diess Experiment sein möge, ist für die Analysis gleichgültig; für sie ist es genug, dass ein bestimmter Quotient c existirt, der die Menge des Lichts ausdrückt, die nach dem Durchgange durch einen bestimmten Theil der Atmosphäre übrig bleibt. Die Physik wird diesen Coefficienten durch gut combinirte Experimente sicherlich noch hinreichend genau finden. Die Analysis hat nur die Formel für die Schwächung des Lichts zu geben.

Auflösung des Problems. Wird die Lichtmenge, die an einem bestimmten Punkte ankommt, durch v bezeichnet, so ist sie von der Länge des durchlaufenen Wegs x abhängig, sie ist eine Function von x, d. h. $v = fx$. Wird x um eine beliebig grosse Grösse dx vermehrt, so nimmt die Lichtmenge v um Δv zu. (Physikalisch ist diess eine Abnahme, aber analytisch wird sie

Zunahme genannt, und es wird sich herausstellen, dass Δv negativ ist.)

Analytisch entsteht nun die wohlgeordnete Reihe:

$$\Delta v = dv_x + \frac{1}{2}d^2v_x + \frac{1}{2.3}d^3v_x + ..$$

$$\Delta v = \frac{dv}{dx}dx + \frac{1}{2}\frac{d^2v}{dx^2}dx^2 + \frac{1}{2.3}\frac{d^3v}{dx^3}dx^3 + ..$$

Diese Reihe wird auf folgende Weise interpretirt: die ganze Zunahme des Lichts zerlegt sich in eine Reihe mehrerer oder unendlich vieler Zunahmen, deren erste dx, deren zweite dx^2, deren dritte dx^3 u. s. w. zum Factor hat.

Das erste Glied, das dx zum Factor hat, giebt, wenn zwei verschiedene dx genommen werden: $dv : dv_1 = dx : dx^1$, d. h. die ersten Zunahmen des Lichts verhalten sich einfach, wie die zurückgelegten Wege dx und dx^1.

Das zweite Glied giebt die Proportion: $d^2v : d^2v_1 = dx^2 : dx^{1 2}$, d. h. die zweiten Zunahmen des Lichts verhalten sich wie die Quadrate der zurückgelegten Wege dx und dx^1.

Das dritte Glied giebt die Proportion: $d^3v : d^3v_1 = dx^3 : dx^{1 3}$, d. h. die dritten Zunahmen verhalten sich wie die dritten Potenzen der zurückgelegten Wege dx und dx^1. U. s. w.

Die ganze Zunahme zerlegt sich also (nach der Analogie der Zunahme der Bewegung) in eine gleichförmige Lichtzunahme, in eine gleichförmig beschleunigte Lichtzunahme u. s. w. So viel giebt die Analysis. Es fragt sich nun, ob ein Natur-Gesetz besteht, das die Bildung einer Gleichung möglich macht, ob im ersten, ob im zweiten, oder ob in den höheren Differenzialien. Diese Bildung der Gleichung ist schon im ersten Differenzial möglich.

Eine gleichförmige Zunahme des Lichts ist ein Product des vorhandenen Lichts v und eines Theils oder eines Vielfachen des zurückgelegten Raumes dx, so dass $dv = v \,.\, ndx$ ist. Daraus findet man alle Glieder der Reihe. Es wird $d^2v = ndvdx = n^2vdx^2$, $d^3v = n^3vdx^2$ u. s. w.

Durch Integration der Gleichung $dv = vndx$, $\frac{dv}{v} = ndx$ findet man: $log\, v = nx + C$.

Die Constante findet man leicht. Ist der Weg x gleich Null, so ist $v = a$ die ursprüngliche Lichtstärke, und es wird $log\, a = C$. Diess substituirt giebt:

$$log\, v = nx + log\, a; \quad log\, \frac{v}{a} = nx; \quad v = ae^{nx}.$$

Es ist nun Aufgabe der Physik, die Constante n zu bestimmen. Legt man die Saussure'sche Beobachtung zu Grunde, so wird: $v = 0{,}9523$, $x = 3274$, also die Lichtmenge $a = 1$ gesetzt, $log\, 0{,}9523 = n \,.\, 3274$.

Daraus findet man $n = -\frac{1}{66980}$, so dass die Formel wird:

$$v = ae^{-\frac{x}{66980}}.$$

§. 222.

Zusätze.

Zusatz 1. Aus der gefundenen Formel wird deutlich, dass das Licht mit der Zunahme des Wegs nicht zunimmt, sondern abnimmt, und dass (die Saussure'sche Beobachtung als richtig vorausgesetzt) das erste Glied von Δv, d. h. die gleichförmige Abnahme gleich $\frac{v}{66980}dx$ ist, dass das zweite Glied, $\frac{1}{2}n^2vdx^2$, d. h. die gleichförmig beschleunigte Abnahme gleich $\frac{1}{2}\frac{v}{(66980)^2}dx^2$ ist u. s. w.

Die Summe dieses zweiten, des dritten und der nachfolgenden Glieder bewirkt, dass der grössere Körper in verhältnissmässig kleinerer Entfernung verschwindet, während er, wenn das erste Glied allein gelten würde, erst in einer seiner Grösse proportionirten Entfernung verschwinden würde.

Die gefundene Formel gilt übrigens, wie alle Formeln, für jeden gefundenen Werth von dx, und zwar für Integration ganz allgemein, und wenn es auf Reihen-Berechnung ankommt, für jedes dx, das die Reihe convergent macht, also in der obigen Formel für alle Werthe von dx, die nicht grösser als 66980 Einheiten des Wegs sind.

Zusatz 2. Wäre $\Delta v = dv$, d. h. bestünde der ganze Licht-Verlust nur in dem einzigen Gliede dv, dann müssten d^2v, d^3v etc.

gleich Null sein. Eine Folge davon wäre, dass $dv = Fvdx$ offenbar die Form $dv = kdx$ hätte, worin k ein constanter Coefficient von dx wäre, so dass $v = kx + l$ würde, und dass der Licht-Verlust einfach von der Länge des durchlaufenen Weges abhinge. Folge davon wäre, dass eine m mal grössere Lichtmenge einfach in einer m mal grösseren Entfernung verschwände. Wollte man nach dieser Folge die Constante n in der Formel: $log\, v = nx$ bestimmen, so würde man statt $v = 0{,}9523$ haben: $v = 1$, also $log\, 1 = nx$. Daraus folgt $n = 0$, d. h. es würde gar kein Licht verschluckt, so wenig als in der gleichförmigen Bewegung eine beschleunigende Kraft ist. Die physikalische Interpretation dieser Folge wäre folgende: Geht eine Lichtmenge durch den Weg x, so verliert sie $\frac{1}{\mu}x$; nun kommt die Lichtmenge $\left(v - \frac{1}{\mu}x\right)$ zum neuen Wege x, und sie verliert, obgleich sie nicht mehr v, sondern nur noch $\left(v - \frac{1}{\mu}x\right)$ ist, doch wieder nur $\frac{1}{\mu}x$, so dass der Verlust für den zweifachen Weg $2x$ nur $\frac{2}{\mu}x$ betrüge, und für den dreifachen Weg $\frac{3}{\mu}x$ u. s. w. Es würde daher der Licht-Verlust nur abhängig vom Wege sein, nicht aber abhängig von der Menge, mit welcher das Licht zur zweiten, dritten und zu den folgenden Luftschichten kommt. Das widerspricht den Thatsachen und Experimenten.

Es ist daher Δv nicht gleich dv, sondern

$$\Delta v = dv + \frac{1}{2}d^2v + \frac{1}{2.3}d^3v + \ldots$$

und es ist zwar nothwendig, dass dv nur die gleichförmige Abnahme des Lichts ausdrückt; aber auch, dass zu dv noch die Glieder: $\frac{1}{2}d^2v$, $\frac{1}{2.3}d^3v \ldots$ kommen, welche die gleichförmig beschleunigte, die dreifach beschleunigte Abnahme u. s. w. ausdrücken. Alle Glieder zusammengenommen geben erst Δv, die ganze Abnahme, die durch Experiment und Beobachtung bekannt ist.

Daraus kann man beurtheilen, welchen Werth die gewöhnliche Ableitung der Formel v hat. Sie ist folgende: „Die einfachste Hypothese, welche wir über Schwächung des Lichts in einem homogenen Mittel aufstellen können, ist die Annahme, dass für jede gleichgrosse Dicke ein gleicher aliquoter Theil des zu ihm gelangenden Lichts verschluckt werde. Es sei demnach der

Licht-Verlust $\frac{1}{n}$ des ankommenden Lichts, s der durchlaufene Weg, und v die noch vorhandene Lichtmenge, so ist

$$dv = -\frac{1}{n} v ds, \quad \text{also:} \quad v = a^{e-\frac{1}{n}s},$$

was die gesuchte Function v giebt."

Diess ist zu rasch gegangen, und man sieht leicht ein, dass es mehr um die Formel, als um die Erkenntniss zu thun war.

Zuerst wird hier dv ohneweiters statt Δv gesetzt, als ob Δv nur aus einem einzigen Gliede bestände.

Dann ist ein homogenes Mittel auch bei der Beobachtung von Saussure vorausgesetzt, denn seine Experimente wurden in einer horizontalen Ebene, nicht aber in einer vertikalen Höhe angestellt. Vertikal über einander sind die Luftschichten von verschiedener Dichtigkeit, aber horizontal werden sie als homogen genommen.

Endlich braucht man bei dieser Ableitung weder Δv, noch dv, noch ds, sondern man nimmt einfach: v das ankommende Licht, a das ursprüngliche Licht und s den Weg. Uebersetzt man nun die Worte der Ableitung in die Sprache der Analysis, dann folgt die Formel: $v = \frac{a}{n} s$. — Es hat seine Gründe, warum man nicht so verfahren ist. Die Formel nämlich wäre gänzlich falsch und widerspräche den Thatsachen. Aber nicht die Formel ist Schuld daran, sondern die Ableitung, und diese muss man ändern. Es ist keine Aenderung, wenn man dv statt v, v statt a und ds statt s setzt, denn das vorgesetzte d ist nicht eine Zauber-Ruthe, wie sich die Physiker vorzustellen scheinen, sondern dv und ds sind Grössen, wie v und s. Freilich giebt dann die Analysis durch ihre Hilfsmittel der Integration die richtige Formel, aber die Basis der Integration, nämlich das Differenzial $dv = nvds$ ist aus ganz andern Gründen das richtige erste Glied der Differenzial-Reihe Δv. Uebersieht man diese Gründe, so hat man zwar zufällig die rechte Formel erreicht, aber die Erkenntniss, die sie geben könnte, gründlich verloren.

Zusatz 3. Man hat die Formel $v = ae^{-\frac{x}{66980}}$ auch zur Berechnung der Lichtmenge benützt, die nach dem Durchgange durch die Atmosphäre zur Oberfläche der Erde kommt. „Setzt man die Höhe der Atmosphäre gleich 24500 Fuss (eine Höhe,

welche die Atmosphäre erreichen würde, wofern sie allenthalben dieselbe Dichtigkeit, wie an der Oberfläche des Meeres hätte), so wird:

$$v = ae^{-\frac{24500}{66980}} = 0{,}6937\,a,$$

und es wäre die Intensität des senkrecht auf die Atmosphäre fallenden und bis zur Oberfläche gelangenden Lichts 0,6937, wenn das von einem Gestirne zu der Grenze der Atmosphäre kommende Licht als Einheit angesehen wird," wozu wir noch setzen: und wenn die Atmosphäre von Unten bis Oben gleichförmig dicht, und nur 24500 Fuss hoch wäre.

Unsere Ableitung der Formel $v = ae^{nx}$ gilt auch für die wirkliche Atmosphäre, in welcher die Dichte der Luftschichten ungleichförmig ist und nach aufwärts abnimmt, wie das Mariotte'sche Gesetz ausdrückt. Denn wie immer auch die Functionen beschaffen sein mögen, jederzeit zerlegt sich Δv in eine Reihe von Gliedern, deren erstes dx, deren zweites dx^2 u. s. w. zum Factor hat. Das erste Glied führt durch den Factor dx in der ersten Potenz auf Gleichförmigkeit, und diess giebt die Mittel zur Bildung der erforderlichen Differenzial-Gleichung. Gäbe das erste Glied nicht die erforderliche Differenzial-Gleichung, so würde diese aus einem der nachfolgenden Glieder abgeleitet werden müssen.

Zusatz 4. Die Formel $v = ae^{nx}$ gilt auch dann noch, wenn die Constante n nach andern als den Saussure'schen Beobachtungen abgeleitet werden müsste, was wohl der Fall sein wird. Will man den Verlust des Lichts beim Durchgang durch die Atmosphäre bestimmen, so müssen wenigstens Experimente mit Lichtmengen gemacht werden, die in verschiedener Höhe über einander stehen. Ausserdem wird auch noch die Feuchtigkeits-Menge der Atmosphäre zu berücksichtigen sein. Die Formel $v = ae^{nx}$ ist daher ihrer analytischen Seite nach von absolutem Werthe, aber ihrer physikalischen Seite nach ist sie, nach dem jetzigen Stand der Physik, von sehr relativer Genauigkeit.

§. 223.

Der gewöhnliche Gebrauch der Differenzialien bei physikalischen Untersuchungen.

Auf ganz ähnliche Art verhält sich die Ableitung aller Formeln der Physik. Der Gang der Beweise, wie er durchgeführt worden ist, ist für alle übrigen massgebend. Auch die Art und Weise, wie die Formeln in der gewöhnlichen Methode der Physik hergestellt werden, hat durchaus Aehnlichkeit mit der Ableitung der Formel: $dv = -\frac{v}{n} ds$ im vorhergehenden §.; und was dort gegen solche Ableitung erinnert worden ist, kann gegen alle erinnert werden. Es ist ein ausserordentlich rasches Hinstellen der Differenzialformeln, die sich schon irgend wie finden. Was dabei gedacht werden könne, bleibt latent. Dadurch muss aber diejenige Erkenntniss, die von den Experimenten unabhängig ist, die Erkenntniss aus Gründen, verloren gehen.

Diese Leere, dieser Mangel an Erkenntniss, wird dann der Analysis aufgebürdet, es wird geklagt, dass sie nicht in's Innere der Natur führe; aber sehr mit Unrecht. Denn diese Leere entspringt ja gerade aus der Unterlassung des rechten Gebrauchs der Analysis. Es ist nicht zu viel gesagt, wenn behauptet wird, dass die Erkenntniss aus Gründen zu einer Zeit, in der die ausserordentlichen Hilfsmittel des Differenzial-Calculs noch unbekannt waren, relativ intensiver war, als nach Einführung und bloss mechanischer Anwendung dieses Calculs.

Durch solches Verfahren beraubt man sich aller Hilfsmittel die der Calcul bietet, man übersieht die Anhaltspunkte, die er in den so wohlgeordnet und so sicher aufeinanderfolgenden Gliedern giebt, man übersieht die Aufgaben, die darin enthalten sind, und die von selbst zu immer neuen Experimenten, zu immer tieferem Eindringen in das Wesen der Natur einladen. Man behandelt den Calcul, ohne seine Stimme zu vernehmen oder zu verstehen.

Uebrigens giebt es ein Mittel der Analysis, durch das man in's Innere der Natur dringen kann, es ist die Variations-Rechnung, die von dem ewigen Axiom ausgeht, dass die Natur mit derjenigen Kraft wirkt, die ein Maximum der Wirkung giebt,

und dass sie bei jeder Wirkung eine Kraft anwendet, die ein Minimum ist. Die Behandlung dieses Calculs, der überall auch keine andern, als endliche und messbare Grössen kennt, und zu dem auch erst der Schlüssel gegeben werden muss, liegt ausserhalb der Grenze der gegenwärtigen Untersuchung.

§. 224.

Schluss.

Im Vorhergehenden sind die Anwendungen des Differenzial-Calculs vollendet. Wir haben in den Rechnungen selbst, so wie in allen Anwendungen auf Analysis, Geometrie, Mechanik und Physik gefunden, dass ihr Calcul nur endliche, messbare und gleichsam greifbare Grössen kennt und anwendet, Grössen, die sich wie alle übrigen Grössen verhalten. Das Wesen und der Vorzug des Differenzial-Calculs besteht nur darin, dass er das Verwickeltste und Unbekannteste in eine wohlgeordnete Reihe einfacher Functionen zerlegt, die nun ihrerseits Anknüpfungspunkte an schon Bekanntes bieten. Dadurch kann das Unbekannte durch Bekanntes, das Verwickelte und Dunkle durch Einfaches und Klares ausgedrückt werden, was man Erkenntniss und Auffindung der Wahrheit nennt.

Der Calcul selbst ist leicht, leichter als viele vorhergehende Theile der Analysis, und wenn in den Anwendungen einige schwierigere Rechnungen vorkommen, so rührt diess nicht vom Calcul, sondern von der Natur der Probleme her, auf die er angewendet wird. In seinem besonnenen Gange führt er überall auf neue Aufgaben, durch deren Lösung die Erkenntniss reicher wird; er erlaubt Keinem, der ihn gebraucht, gedankenlos zu sein, er leitet zum Denken hin und ist Führer in diesem menschlich wichtigsten Geschäfte.

Die Symbole und die Rechnungen sind ganz die nämlichen geblieben, wie sie in der Behandlung der unendlich kleinen Grössen in Gebrauch waren. Man kann daher sagen, dass die Sache nicht neu ist. Und gewiss sind die Differenzialien so alt, wie das Wesen der Dinge selbst, die Wahrheit war immer im Calcul, aber versteckt und unerkannt; nur die Erkenntniss ist neu. Diese erkannte Wahrheit ist der Kern, der in allen auch noch so verschiedenen Theorien

des Unendlich-Kleinen verborgen war, ja es wird vielleicht Jedem, der in die Sache eindringt, vorkommen, als habe er sie schon immer gehabt. Und diess wäre kein Wunder. Denn die Operationen sind die nämlichen, nur das Verständniss dessen, was in den Operationen ist, ist ein anderes. Da aber die Operationen dieselben sind, so ist es natürlich, dass fast Jeder an die Wahrheit streifte, sei es in endlicher, sei es in asymptotischer Weise.

In dieser Hinsicht ist also der Vermuthung Raum gegeben, dass die klare Erkenntniss von selbst und leicht an die Stelle des trüben Wahns treten werde. Doch stelle ich mir diess nicht so leicht vor. Es sind nicht intellectuelle, es sind ethische Gründe, die dagegen wirken.

Ein nicht unbedeutender Mathematiker, L'Huillier, sagt in seiner Differenzial-Rechnung, die noch dazu eine gekrönte Preisschrift ist, Folgendes:

„*Maximopere cavendum est, ne credamus symbolum* $\frac{dy}{dx}$, *quod formam magnitudinis ex duabus compositae prae se fert, revera esse symbolum compositum, cujus termini sint dy et dx, quasi* ***dy*** *et* ***dx*** *denotent certas quantitates: aut ne credamus, ex aequatione* $\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$ *posse deduci hanc:* $d(x^n) = nx^{n-1}dx$. *Expressio* $\frac{dy}{dx}$ *incomplexa est atque peculiaris, ad designandos exponentes limitum rationum simultanearum quantitatum mutabilium y et x incrementorum facilitatis causa introducta: et quamvis vestigia conservet originis suae* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, *signa dy et dx sigillatim spectata, nullam amplius ad quantitates veras Δy et Δx relationem habere firmiter tenendum est. Quae monita eo magis urgenda esse censeo, quod doctrina haec quaestionibus nonnullis inanibus fuit exagitata, quae ne motae quidem fuissent, si ad genuinam symboli illius indolem Mathematici semper attendissent. — Exponens differentialis secundi ordinis functionis y et quantitatis mutabilis x, denotetur signo* $\frac{d^2y}{dx^2}$. *Et hic (imo etiam, si fieri posset, a fortiori), repetenda sunt, quae de simplicitate symboli hujus monui, non obstante ejus apparente compositione. Ne quis quaerat, quid sit* d^2y, *neque quid sit* dx^2. *Nullum, quod satisfaciat, obtinebit re-*

sponsum. Incautiores Mathematici terminos illos derivare nimium frequenter aggressi sunt.“

Das ist eine auffallende Sprache, aber sie ist nicht neu, sie kommt schon von Pascal her, der seiner Zeit, beim Beginne des Differenzial-Calculs, ebenfalls so sprach. Da die Wahrheit im Calcul verborgen war, da sie immer tangirt, und nie erreicht wurde, so ist Spiel und Gegenspiel sehr leicht erklärlich. Ununterbrochen seit den Zeiten Cavalieri's kannte man theilweise die Operationen des Differenzial-Calculs, und schon da beginnt, statt der Aufstellung der Wahrheit, einerseits die Entschuldigung, gleichsam die Abbitte, dass man so ungewöhnlich verfahre, und andererseits, gleichsam als Entschädigung für diess Bekenntniss, das Ausschlagen gegen diejenigen Forscher, die dagegen ankämpften, die freilich die Wahrheit auch nicht kannten, die aber dennoch in den unendlich kleinen Grössen und in ihrer Vernachlässigung die Würde und Festigkeit der Mathematik vermissten, und die im Grunde allein die zu erkennende Wahrheit höher achteten, als glänzende, aber unbegriffene Resultate.

So, wie Pascal und L'Huillier haben wenige Mathematiker gesprochen, aber sie sind doch in der Verfassung, dass sie fast ohne Ausnahme so denken müssen, und dass Viele mit dem allerfestesten Glauben glauben, es sei nie und nimmer möglich, dass die Differenzialien als endliche, messbare und gleichsam greifbare Grössen, als Grössen, die gerade so wie andere Grössen sind, erkannt werden können.

Es ist daher bei dieser Frage ein Jeder in einer Art betheiligt, die das Innerste seiner wissenschaftlichen Ueberzeugung angreift. Bei solcher Sachlage bedenkt man sich zweimal, ehe man eine Theorie, die man für unerreichbar hielt, annimmt. Und das ist gut. Mögen sie sich nicht zweimal, sondern zehnmal bedenken, mögen sie forschen und prüfen, je strenger, desto besser, je ernster, desto erwünschter, die Wissenschaft wird dabei gewinnen, und es wird schwer werden, gegen die Wahrheit auszuschlagen.

Druck von *C. Fr. Meyer* in Weissenburg.

Corrigenda.

Seite	Zeile	ist statt	zu lesen:
15	4 von Unten	der Ausdruck	die Ausdrücke.
20	1 von Oben	x^{n-1+r}	x^{-1+r}
29	8 v. U.	a_0 1	$a_0 = 1$.
49	15 v. O.	$\mu - 1$ (im Nenner)	$m - 1$.
73	7 v. U.	Constante x	Constante a.
104	11 v. O.	abhängig	unabhängig.
204	8 v. U.	$cos^{m-5} u$	$cos\, u^{m-5}$
223	4 v. O.	Variable	Variablen.
314	18 v. O.	veränderliche x	Veränderliche x.
320	10 v. U.	Linie ke	Linie kl.
374	7 v. O.	gegebenen	gegebene.
385	4 u. 5 v. O.	$\Delta\eta$	Δy.
424	16 v. O.	gn	gu.
446	8 v. U.	Fläche	Gleichung.
455	10 v. U.	Curve doppelter Krümmung	räumliche Curve.

Im Verlage von **G. Joseph Manz** in Regensburg ist erschienen und durch alle Buchhandlungen zu beziehen:

Dr. *M. Deutinger*,

Geschichte der Philosophie.

Ir Bd. 1te und 2te Abtheil. Geschichte der griechischen Philosophie. 2 Thle. Die griechische Philosophie von ihren Anfängen bis zu ihrem Abschlusse.

gr. 8. geh. 7 fl. od. 2 Thlr. 11¼ sgr.

Ueber vorstehendes Werk heisst es u. a. im XXXII. Bde 11s Heft der histor. polit. Blätter: „Diese Geschichte ist ein mit eben so viel Ausdauer, Umsicht und Sorgfalt, wie durchdringendem Urtheile gefertigtes Werk.“ In den beiden vorstehenden Bänden ist das ganze Gebiet der griechisch-römischen Philosophie durchmustert. Der erste bespricht, nach den Anfängen der orphischen und homerischen Zeiten, die ältere jonische Schule und Pythagoras, der mit vorzüglicher Sorgfalt behandelt ist (S. 224—267). Mit den Sophisten, Protagoras, Gorgias, die auf die Eleaten folgen, wird der erste Band geschlossen. Vom 2ten Bande ist mehr als die Hälfte der Darstellung und Würdigung der platonischen und aristotelischen Philosophie gewidmet (S. 73—404). Die verschiedenen Epochen der Academie, bis auf Cicero herab, sind jedoch eben so wenig vernachlässigt, als die stoische und epikuräische Philosophie.

Bischoff, Prof. Dr. A., System der **Elementar-Mathematik.** 1r Thl.: Die **Algebra.** gr. 8. 2 fl. od. 1 Thlr. 7½ sgr.

Huther, P., Anfangsgründe der **Geometrie,** vorzüglich zum Gebrauche an technischen Schulen. Mit 6 Figurentafeln (in 4.) gr. 8. 1 fl. od. 18¾ sgr.

Jüngling, G., Sammlung von Aufgaben und Aufsätzen aus Geometrie, Stereometrie und Trigonometrie nebst den Grundzügen der neueren Geometrie. Mit 3 Figurentafeln. gr. 8. 1 fl. 24 kr. od. 26¼ sgr.

Magnetismus, der **animalische,** in seinem Verhältnisse zu den Wundern des Christenthums. Nach einer Reihe von Artikeln der *civiltà cattolica* übersetzt. 8. geh. 1 fl. 12 kr. od. 22½ sgr.

Vorstehendes Werkchen ist aus der Feder eines Mannes, der sich wie als Physiker so als Theologe in Italien einen Namen erworben hat. — Die Uebersetzung ist nicht allein mit Sachkenntniss bearbeitet, sondern auch vielseitig mit Anmerkungen bereichert.

Wandner, Dr. J. B., Lehrbuch der technischen Mechanik, zum Gebrauche an Gewerbsschulen und beim Selbstunterrichte. Mit 9 Figurentafeln (in gr. 4.) gr. 8. 1 fl. 45 kr. od. 1 Thlr. 3¾ sgr.

F.X. BEER
kgl: Hofbuchbinder
in
MÜNCHEN
Ledergasse N: 25

F. X. BEER
kgl: Hofbuchbinder
in
MÜNCHEN
Ledergasse N: 25.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Mayr, Aloys,

Vollständige Theorie des Differenzial-Calculs mit Anwendungen auf Analysis, Geometrie und Mechanik

Regensburg 1854

Math.p. 335 u
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082372-1